

# P

## ELEMENTI DI TEORIA DELLE PIASTRE INFLESSE

### P.1 GENERALITÀ

Le *piastre* sono elementi strutturali, inizialmente piani, aventi spessore molto più piccolo in confronto alle altre dimensioni, e dotate di rigidità flessionale.

Nello studio delle piastre è usuale dividere lo spessore in due metà con un piano parallelo alle facce, e che pertanto viene chiamato *piano medio*.

Lo *spessore*  $h$  è misurato in direzione normale al piano medio e costituisce l'unico parametro geometrico che interviene nella definizione delle proprietà flessionali della piastra.

Ai fini del calcolo tecnico, si parla di *piastre sottili* quando il rapporto fra lo spessore  $h$  e la più piccola larghezza  $l$  della piastra risulta  $h/l < 1/20$ .

L'analisi delle piastre sottili si differenzia poi a seconda che si abbiano *piccoli spostamenti* (in genere in questo caso si accetta una freccia massima  $w_{max} < 0.75 h$ ) o *grandi spostamenti*. Nel primo caso la piastra *inflessa* (ossia caricata solo in direzione normale al suo piano medio) risponde alle sollecitazioni esterne solamente con la sua rigidità flessionale, mentre nel secondo caso si manifestano non-linearità geometriche che evocano una risposta che chiama in causa oltre alla rigidità flessionale (che si manifesta con tensioni a distribuzione bi-triangolare sullo spessore) anche la rigidità membranale (che si manifesta con tensioni a distribuzione costante sullo spessore). Grazie alla presenza di tensioni membranali preponderanti rispetto alle tensioni flessionali, la piastra mostra una capacità portante nettamente superiore.

Per lo studio delle piastre sottili inflesse ci si basa fondamentalmente sulla *teoria classica di Lagrange-Kirchhoff* (per i piccoli spostamenti), ovvero sulla *teoria di von Kármán* (per i grandi spostamenti).

### P.2 TEORIA CLASSICA DELLE PIASTRE INFLESSE

Si fa riferimento ad una *piastra sottile* ( $h/l < 1/20$ ) di materiale *omogeneo e isotropo* che sotto l'azione di un *carico laterale* si inflette sperimentando *piccoli spostamenti* ( $w_{max} < 0.75 h$ ).

Storicamente, le equazioni indefinite di equilibrio della piastra sottile si fanno risalire a Lagrange che ebbe a correggere l'impostazione data al problema dalla matematica Sophie Germain (che aveva presentato una memoria al concorso indetto nel 1809 dall'Accademia di Francia sul problema delle vibrazioni di superfici elastiche), talché dette equazioni sono riportate in letteratura come *equazioni di Germain-Lagrange* o anche solamente come *equazioni di Lagrange*.

Nel 1850 Kirchhoff formulò alcune assunzioni fondamentali (ipotesi di Kirchhoff) a sostegno del problema che consentirono di definire con chiarezza e semplicità la teoria delle piastre inflesse sottili, e per queste ragioni detta teoria viene oggi riferita pure come *teoria di Lagrange-Kirchhoff*.

### P.2.1 RIFERIMENTO GEOMETRICO

La piastra rettangolare, inizialmente piana, viene riferita ad una terna levogira di assi cartesiani  $x$ ,  $y$  e  $z$ , con il piano  $(x, y)$  coincidente con il piano medio e l'asse  $z$  orientato verso il basso<sup>1</sup>. In dette direzioni, le corrispondenti componenti di spostamento di un punto generico vengono denotate con  $u$ ,  $v$  e  $w$ , (Fig. P.1).

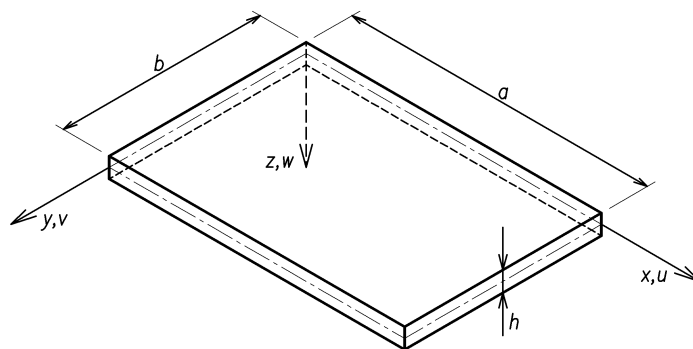


Figura P.1 — Il riferimento geometrico per piastre rettangolari

### P.2.2 IPOTESI DI KIRCHHOFF

Le *ipotesi di Kirchhoff*, che sono a fondamento della teoria classica delle piastre sottili, possono ritenersi una estensione analoga all'ipotesi di conservazione delle sezioni piane adottata per la formulazione classica della teoria tecnica delle travi di Eulero-Bernoulli-Navier. Esse sono così enunciabili:

- 1 — Il materiale della piastra è *elastico-lineare, omogeneo e isotropo*.
- 2 — La piastra è inizialmente piana, con *spessore sottile* in confronto alle altre due dimensioni.
- 3 — Gli *spostamenti*  $w$  conseguenti all'inflessione del piano medio sono *piccoli* in confronto con lo spessore  $h$ .

Questa assunzione porta a poter considerare gli angoli di inclinazione  $\varphi$  assimilabili alla  $\tan \varphi$  e quindi alla derivata prima di  $w$ ; inoltre, essendo il quadrato della derivata prima di  $w$  trascurabile rispetto all'unità, è lecito confondere la curvatura  $\chi$  della superficie elastica con la derivata seconda di  $w$ . Pertanto, con riferimento alle direzioni  $x$  e  $y$  si può porre:

$$\begin{aligned} \varphi_x &\simeq \tan \varphi_x = -\frac{\partial w}{\partial x} & \chi_x &= \frac{1}{r_x} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varphi_y &\simeq \tan \varphi_y = -\frac{\partial w}{\partial y} & \chi_y &= \frac{1}{r_y} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned}$$

- 4 — Un segmento rettilineo e normale al piano medio dopo l'inflessione della piastra rimane ancora rettilineo, inalterato in lunghezza e normale alla superficie elastica (*ipotesi di conservazione delle normali rette*).

Questa assunzione equivale a trascurare sia gli scorrimenti angolari dovuti al taglio trasversale ( $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ) sia la dilatazione lineare nella direzione dello spessore ( $\varepsilon_z = 0$ ).

<sup>1</sup> Si definisce *levogira* una terna tale che ponendosi nel semispazio positivo ( $z > 0$ ) si vede l'asse  $x$  sovrapporsi all'asse  $y$  ruotando in senso antiorario ("regola della mano destra"). Una terna levogira o sinistrorsa o antioraria viene anche chiamata *terna destra*.

5 — In conseguenza dell'inflessione *il piano medio non subisce deformazioni*, ossia sul piano medio sono nulle le dilatazioni lineari ( $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ ) e gli scorrimenti angolari ( $\gamma_{xy} = 0$ ). Pertanto il piano medio è anche *piano neutro*.

Questa ipotesi è sicuramente attendibile se gli spostamenti  $w$  sono abbastanza piccoli e se la piastra non è trattenuta al contorno. Sicché con questa assunzione sia le tensioni flessionali  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  sia le tensioni tangenziali  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  dovranno annullarsi in corrispondenza del piano medio.

6 — Lo sforzo  $\sigma_z$  in direzione normale al piano medio è piccolo in confronto alle massime tensioni  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  che si realizzano sulle facce della piastra, e perciò può essere trascurato.

Questa assunzione tuttavia non è più vera in prossimità di carichi trasversali altamente concentrati.

Grazie alle ipotesi di Kirchhoff la trattazione delle piastre inflesse assume minore complessità ed il problema da tridimensionale si riduce ad un problema in due dimensioni. Conseguentemente, le equazioni che governano il comportamento della piastra possono essere derivate in maniera diretta e concisa.

### P.2.3 CONVENZIONI DI SEGNO PER SPOSTAMENTI E ROTAZIONI

Gli *spostamenti*  $u$ ,  $v$  e  $w$  sono positivi quando sono concordi con il verso degli assi coordinati  $x$ ,  $y$  e  $z$  (si veda la Fig. P.1).

Per le *rotazioni*  $\varphi$  va tenuto presente che il senso cambia a seconda del punto di osservazione. In altre parole, la stessa rotazione può essere per esempio oraria se osservata dal semispazio positivo, ma è antioraria se l'osservatore si sposta nel semispazio negativo. Un modo per svincolarsi dalla posizione dell'osservatore è quello di considerare l'angolo acuto  $\vartheta_o$  inizialmente compreso fra due semirette orientate, imprimere la rotazione  $\varphi$  ad una delle due semirette, e valutare quindi l'angolo finale  $\vartheta$  che matura. Assumendo per  $\varphi$  valori relativi si avrà:  $\vartheta = \vartheta_o + \varphi$ . Se dopo la rotazione l'angolo  $\vartheta$  è diminuito, la rotazione  $\varphi$  è da considerarsi negativa.

Possiamo supporre che le due direzioni considerate prima della rotazione siano quelle degli assi coordinati, talché  $\vartheta_o = \pi/2$ . Se il sistema  $x$ ,  $y$  e  $z$  è levogiro e l'osservatore si pone sempre nel semispazio positivo si avranno le convenzioni di segno come fissate nella Fig. P.2.

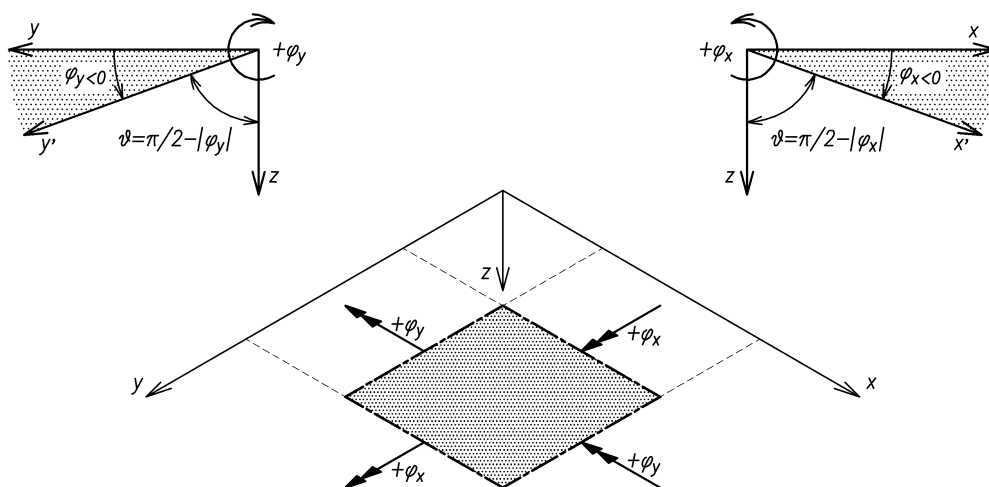


Figura P.2 — Convenzioni di segno per le rotazioni nei piani coordinati trasversali

### P.2.4 RELAZIONI CINEMATICHE

Dalle ipotesi di Kirchhoff, accettando le approssimazioni che derivano dalla piccolezza degli spostamenti, si possono ricavare le espressioni descrittive le componenti di spostamento e di deformazione che maturano in un punto generico  $P(x, y, z)$  della piastra.

In Fig. P.3, come esempio, sono rappresentate le componenti di spostamento del punto  $P$  con riferimento ad una sezione parallela al piano trasversale  $xz$ .

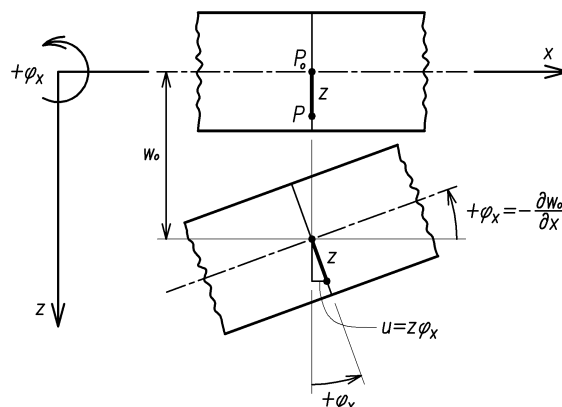


Figura P.3 — Componenti di spostamento nel piano  $xz$

### Il campo degli spostamenti

Considerato un segmento rettilineo di lunghezza pari a  $z$ , ortogonale al piano medio, con un estremo  $P_o(x, y)$  sul piano medio e l'altro estremo  $P(x, y, z)$  in posizione generica, l'assunzione che esso rimanga *inalterato in lunghezza* comporta che sia:

$$\boxed{\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0} \quad (\text{P.1})$$

Questa relazione dichiara l'indipendenza da  $z$  dello spostamento  $w(x, y, z)$  di un punto generico  $P$ , spostamento che pertanto può essere posto pari, ad esempio, allo spostamento  $w_o(x, y)$  della sua proiezione  $P_o$  sul piano medio. Ossia:

$$\boxed{w(x, y, z) = w_o(x, y)} \quad (\text{P.2})$$

Inoltre, l'assunzione che detto segmento  $P_oP$  rimanga *ortogonale pure alla superficie media* ad inflessione avvenuta comporta, in particolare, che le *sezioni* aventi per normale gli assi  $x$  e  $y$  *rimangano piane*, ruotando rispettivamente dell'angolo  $\varphi_x$  e  $\varphi_y$ .

Conseguentemente, tenuto in debito conto del segno algebrico delle varie grandezze in gioco, le componenti di spostamento  $u$  e  $v$  lungo le due direzioni coordinate  $x$  e  $y$  saranno:

$$u = u_o + z\varphi_x$$

$$v = v_o + z\varphi_y$$

Le rotazioni  $\varphi_x$  e  $\varphi_y$  sono approssimabili con le derivate prime di  $w_o$  rispetto a  $x$  e  $y$  rispettivamente, ma di segno contrario:

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi_x &= -\frac{\partial w_o}{\partial x} \\ \varphi_y &= -\frac{\partial w_o}{\partial y}\end{aligned}} \quad (\text{P.3})$$

Inoltre, in presenza di *solli carichi trasversali* (diretti cioè secondo  $z$ ) è plausibile che i punti del piano medio si spostino in maniera significativa soltanto in direzione normale al piano stesso, maturando inflessioni  $w_o(x, y)$ , mentre le altre due componenti di spostamento  $u_o(x, y)$  e  $v_o(x, y)$  risultano praticamente *trascurabili*.

In definitiva, tenuto conto di queste ultime considerazioni, il *campo degli spostamenti* potrà così essere descritto:

$$\boxed{\begin{aligned}u &= z \varphi_x = -z \frac{\partial w_o}{\partial x} \\ v &= z \varphi_y = -z \frac{\partial w_o}{\partial y} \\ w &= w_o\end{aligned}} \quad (\text{P.4})$$

### Il campo delle deformazioni

Per quanto riguarda la valutazione delle deformazioni non nulle  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  si potrà procedere a partire dalle determinazioni fatte per gli spostamenti  $u$ ,  $v$  e  $w$ .

Prima però sarà il caso di richiamare le relazioni che legano rotazioni  $\varphi$  e curvature  $\chi$  con la superficie elastica  $w_o(x, y)$ .

Le *curvature flessionali*  $\chi_x$  e  $\chi_y$ , rispettivamente in direzione  $x$  e  $y$ , sono così definite:

$$\begin{aligned}\chi_x &= \frac{1}{r_x} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \chi_y &= \frac{1}{r_y} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial w}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\end{aligned}$$

con  $r_x$  e  $r_y$  i raggi dei cerchi osculatori alla linea ottenuta intersecando, nel punto considerato, la superficie elastica con i piani paralleli rispettivamente al piano  $xz$  e al piano  $yz$ .

In analogia alle curvature flessionali si introducono le cosiddette *curvature torsionali*  $\chi_{xy} = \chi_{yx}$  così definite:

$$\begin{aligned}\chi_{xy} &= \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial w}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \chi_{yx} &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}\end{aligned}$$

Il campo delle deformazioni si potrà così definire:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(z\varphi_x)}{\partial x} = z \frac{\partial\varphi_x}{\partial x} = z \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial w}{\partial x} \right) = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = z \chi_x \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(z\varphi_y)}{\partial y} = z \frac{\partial\varphi_y}{\partial y} = z \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial w}{\partial y} \right) = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = z \chi_y \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial(z\varphi_x)}{\partial y} + \frac{\partial(z\varphi_y)}{\partial x} = z \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial w}{\partial x} \right) + z \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial w}{\partial y} \right) = \\ &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2z \chi_{xy}\end{aligned}$$

In sintesi:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= z \chi_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= z \chi_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= 2z \chi_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned} \tag{P.5}$$

## P.2.5 SOLLECITAZIONI E CARATTERISTICHE UNITARIE DI SOLLECITAZIONE

### Il campo delle tensioni

Nota il campo delle deformazioni, il corrispondente campo delle tensioni (*sollecitazioni*) può essere ricavato ricorrendo alle leggi costitutive del materiale (relazioni di legame sforzi-deformazioni).

Per un materiale *elastico-lineare*, *omogeneo* e *isotropo*, le leggi costitutive nel caso di uno stato di tensione *triassiale* sono date dalle *leggi di Hooke generalizzate*:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}\end{aligned} \tag{P.6}$$

Per le ipotesi di Kirchhoff sono nulle le seguenti deformazioni:

$$\boxed{\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0} \quad (\text{P.7})$$

Inoltre, va fatta una considerazione sulla tensione  $\sigma_z$ . Quando la piastra è caricata, ad esempio sulla faccia superiore, con un carico distribuito  $p(x, y)$ , si avrà una tensione  $\sigma_z = -p$  sulla faccia superiore ( $z = -h/2$ ) e  $\sigma_z = 0$  sulla faccia inferiore ( $z = +h/2$ ) scarica. Ora, se la piastra è abbastanza *sottile*,  $p(x, y)$  non può avere un valore troppo elevato, conseguentemente  $\sigma_z$  risulterà di qualche ordine di grandezza più piccola rispetto alle tensioni  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  che maturano per l'inflessione della piastra e che spirano parallelamente al piano medio, per cui si può ritenere:

$$\boxed{\sigma_z = 0} \quad (\text{P.8})$$

Pertanto, le relazioni costitutive valide per una *piastra inflessa sottile* si riducono alle tre seguenti:

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \end{aligned}} \quad (\text{P.9})$$

da cui si ricavano agevolmente le espressioni per il *campo delle tensioni* conseguenti all'inflessione:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \end{aligned}} \quad (\text{P.10})$$

Tenuto conto delle relazioni cinematiche, le tensioni possono scriversi pure in questo modo:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1 - \nu^2} z (\chi_x + \nu \chi_y) = -\frac{E}{1 - \nu^2} z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1 - \nu^2} z (\chi_y + \nu \chi_x) = -\frac{E}{1 - \nu^2} z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= 2Gz \chi_{xy} = \frac{E}{1 + \nu} z \chi_{xy} = -\frac{E}{1 + \nu} z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned}} \quad (\text{P.11})$$

Si osserva che dette tensioni hanno tutte andamento lineare sullo spessore, *annullandosi sul piano medio*. Conseguentemente, essendo esse autoequilibrate nei riguardi delle traslazioni parallele al piano medio *non ci sarà alcuna risultante di tipo membranale*, mentre le risultanti non nulle saranno rappresentate soltanto da *momenti flettenti* (ad opera delle  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ ) e da *momenti torcenti* (ad opera delle  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{yx}$ ).

### Risultanti delle tensioni

Per la valutazione delle risultanti delle tensioni agenti su un *fronte di larghezza unitaria* (talché si parla di *caratteristiche unitarie di sollecitazione*) si può immaginare di estrarre dalla piastra un elemento di controllo avente le facce parallele ai piani coordinati, con base quadrata di lati unitari e altezza pari allo spessore  $h$ . Sulle facce normali agli assi  $x$  e  $y$  le tensioni parallele al piano medio ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ ) danno luogo alle seguenti risultanti:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \, dz \\ M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z \, dz \\ M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z \, dz \end{aligned} \quad (\text{P.12})$$

$M_x$  e  $M_y$  rappresentano *momenti flettenti* per unità di larghezza di sezione, mentre  $M_{xy}$  è un *momento torcente* sempre per unità di larghezza di sezione.

Da osservare che, in un punto, essendo  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  il momento torcente agente sulla faccia di normale  $x$  sarà uguale al momento torcente agente sulla faccia di normale  $y$ , ossia:

$$\boxed{M_{xy} = M_{yx}} \quad (\text{P.13})$$

In aggiunta ai momenti flettenti  $M_x$  e  $M_y$  ed ai momenti torcenti  $M_{xy}$  e  $M_{yx}$ , sulle facce trasversali dell'elemento di controllo agiscono pure le *forze di taglio*  $T_x$  e  $T_y$  quali risultanti delle tensioni tangenziali  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  spiranti lungo  $z$ . Queste tensioni hanno valore *non trascurabile* rispetto alle tensioni di inflessione  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ , benché i corrispondenti scorrimenti angolari  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  siano considerati nulli sulla base delle ipotesi di Kirchhoff. Le forze di taglio su un fronte di larghezza unitaria risultano pertanto:

$$\begin{aligned} T_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \, dz \\ T_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \, dz \end{aligned} \quad (\text{P.14})$$

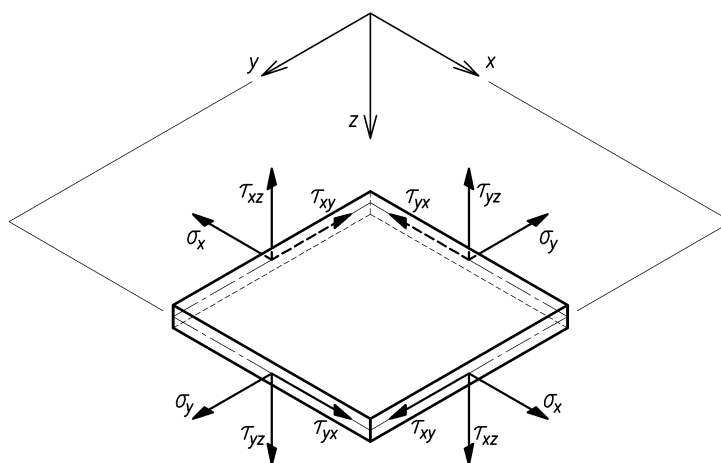
### Convenzioni di segno per tensioni e risultanti delle tensioni

Il segno delle caratteristiche di sollecitazione è strettamente legato alla convenzione adottata per le tensioni. Con riferimento a sezioni parallele ai piani coordinati, sul generico elementino di controllo distingueremo *facce positive* e *facce negative* a seconda che le normali da esse uscenti siano rispettivamente concordi o discordi con gli assi coordinati.

Una tensione normale o tangenziale sarà considerata *positiva* se sulla *faccia positiva* è *concorde* con il verso degli assi coordinati, mentre sulla *faccia negativa* è *discorda*.



In Fig. P.4 tutte le tensioni rappresentate sono positive.



**Figura P.4** — *Convenzioni di segno per le tensioni*

Nella Fig. P.5 tutte le caratteristiche unitarie di sollecitazione rappresentate sono positive, in particolare sono mostrate:

- le tensioni normali  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  che fanno insorgere momenti flettenti  $M_x$  e  $M_y$  positivi (si osserva che nella semi-piastra positiva, con  $z > 0$ , agiscono tensioni normali positive);
- le tensioni tangenziali  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{yx}$  che inducono momenti torcenti  $M_{xy}$  e  $M_{yx}$  positivi (anche qui si osserva che nella semi-piastra positiva agiscono tensioni tangenziali positive);
- le tensioni tangenziali trasversali (ossia in direzione  $z$ )  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  che danno forze di taglio  $T_x$  e  $T_y$  positive.

### Caratteristiche di sollecitazione in funzione delle grandezze cinematiche

Le risultanti delle tensioni (caratteristiche delle sollecitazioni) possono essere scritte anche in funzione delle grandezze cinematiche legate alla superficie elastica inflessa.

Le grandezze cinematiche cui si farà riferimento sono le curvatures  $\chi_x$ ,  $\chi_y$  e  $\chi_{xy}$  e gli spostamenti  $w(x, y)$  in direzione normale al piano medio.

Per le *caratteristiche di momento*  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_{xy}$ , che sono date esclusivamente dalle tensioni conseguenti all'inflessione della piastra, ossia dalle tensioni  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  parallele al piano medio, si farà ricorso semplicemente all'applicazione delle leggi costitutive del materiale.

Mentre per le *caratteristiche di taglio*  $T_x$  e  $T_y$ , risultanti dalle tensioni tangenziali  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  normali al piano medio, non possono essere evocate direttamente le leggi costitutive, in quanto per le ipotesi di Kirchhoff sono nulle le deformazioni  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$ , ma ancora una volta si dovrà ricorrere a considerazioni di equilibrio.

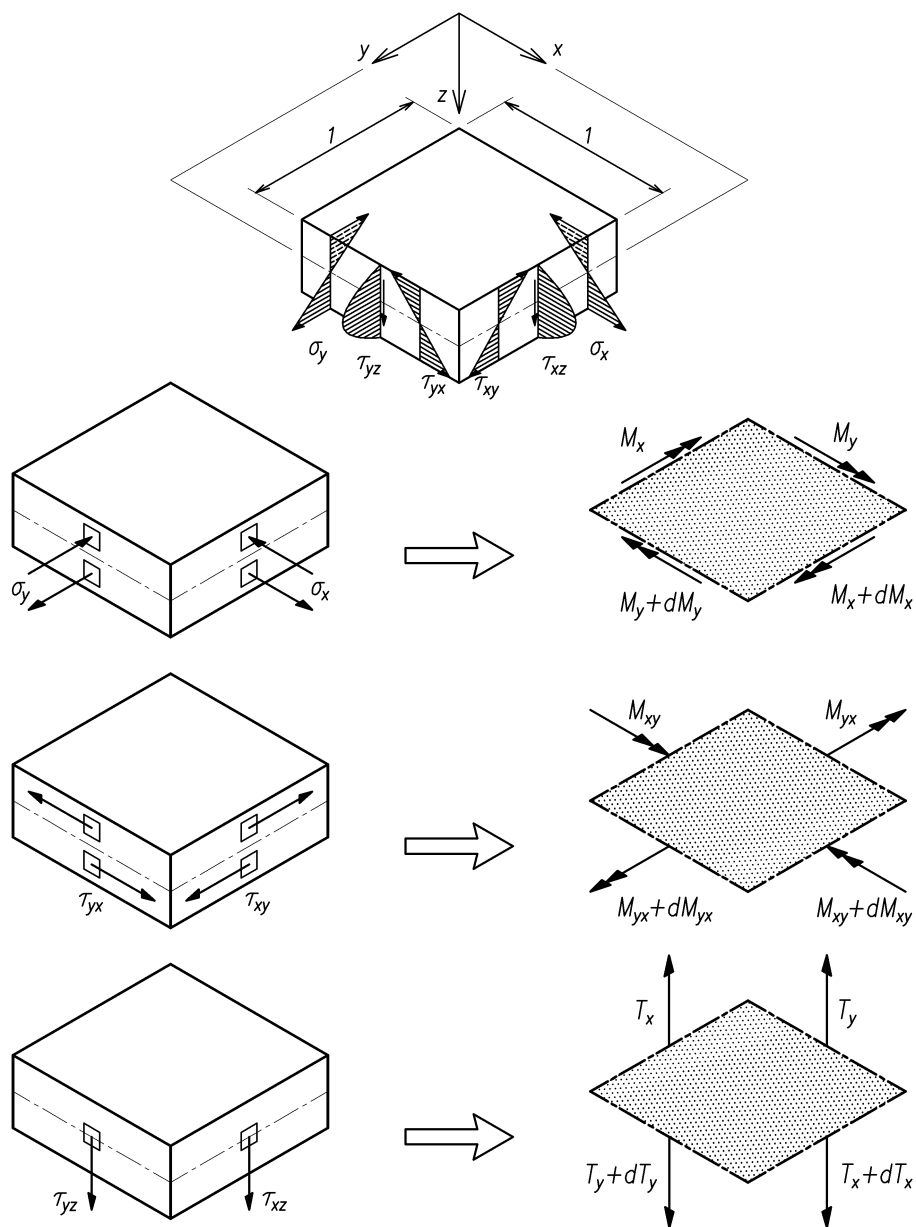


Figura P.5 — Convenzioni di segno per le risultanti delle tensioni

Il momento flettente  $M_x$  si potrà pertanto così esprimere:

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \, dz = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E z}{1 - \nu^2} (\chi_x + \nu \chi_y) z \, dz = \frac{E}{1 - \nu^2} (\chi_x + \nu \chi_y) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \, dz = \\
 &= D (\chi_x + \nu \chi_y)
 \end{aligned}
 \tag{P.15}$$

e analogamente il momento flettente  $M_y$ :

$$M_y = D (\chi_y + \nu \chi_x)
 \tag{P.16}$$

Ricordando che le curvature sono legate alla superficie elastica  $w(x, y)$  dalle espressioni seguenti:

$$\begin{aligned} \chi_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \chi_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \chi_{xy} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (\text{P.17})$$

si avrà:

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{P.18})$$

Si è indicata con  $D$  la *rigidezza flessionale* della piastra con riferimento ad una striscia di larghezza unitaria:

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (\text{P.19})$$

Si osserva che la rigidezza flessionale può essere scritta anche nella forma:

$$D = E' J = \left( \frac{E}{1 - \nu^2} \right) \left( \frac{h^3}{12} \right) \quad (\text{P.20})$$

con

$J = h^3/12$  il *momento d'inerzia* della sezione rettangolare di base unitaria e altezza pari allo spessore  $h$ ;

$E' = E/(1 - \nu^2)$  il *modulo di elasticità effettivo*, maggiore del modulo di Young  $E$  di circa il 10% (con  $\nu = 0.3$ ). In altri termini, nella piastra il materiale è come se rispondesse con una maggiore rigidezza dovuta al fatto che nella striscia unitaria considerata le *dilatazioni trasversali sono impedito* dalle strisce adiacenti che manifestano analoghe tendenze deformative.

Il *momento torcente*  $M_{xy}$  viene ad essere:

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z \, dz = \int_{-h/2}^{h/2} G 2 z \chi_{xy} z \, dz = \frac{E}{1 + \nu} \chi_{xy} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \, dz = \\ &= (1 - \nu) D \chi_{xy} \end{aligned} \quad (\text{P.21})$$

avendo sfruttato la relazione  $G = E/2(1 + \nu)$  valida per materiali omogenei e isotropi.

In funzione degli spostamenti  $w(x, y)$  sarà:

$$M_{xy} = -(1 - \nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{P.22})$$

Le espressioni per le tensioni “bidimensionali” (ossia quelle parallele al piano di giacitura della piastra e specificate mediante i soli pedici  $x$  e  $y$ ) in funzione dei momenti agenti si possono così ricavare:

$$\sigma_x = E'(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = E'(z \chi_x + \nu z \chi_y) = E'z(\chi_x + \nu \chi_y) = E'z \frac{M_x}{D} = E'z \frac{M_x}{E'J} = z \frac{M_x}{h^3/12}$$

$$\sigma_y = E'(\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) = E'(z \chi_y + \nu z \chi_x) = E'z(\chi_y + \nu \chi_x) = E'z \frac{M_y}{D} = E'z \frac{M_y}{E'J} = z \frac{M_y}{h^3/12}$$

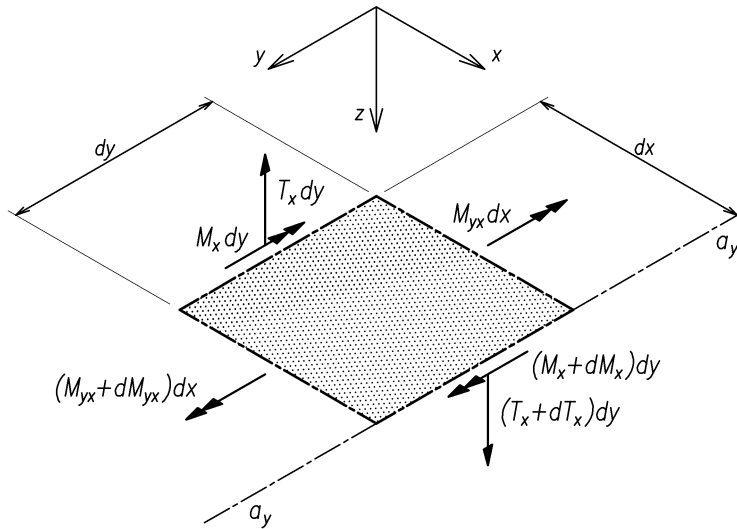
$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} 2z \chi_{xy} = \frac{E}{(1 + \nu)} z \frac{M_{xy}}{(1 - \nu) D} = E'z \frac{M_{xy}}{E'J} = z \frac{M_{xy}}{h^3/12}$$

È interessante osservare l’analogia formale delle espressioni ottenute, che per sintesi si riscrivono:

$$\sigma_x = z \frac{M_x}{h^3/12} \quad \sigma_y = z \frac{M_y}{h^3/12} \quad \tau_{xy} = z \frac{M_{xy}}{h^3/12} \quad (\text{P.23})$$

Le caratteristiche di taglio ( $T_x$  e  $T_y$ ) possono essere espresse in funzione delle caratteristiche di momento ( $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_{xy}$ ) considerando l’equilibrio alla rotazione del generico elementino di controllo di base  $dx \times dy$  e altezza  $h$ . Quindi, tramite le nuove espressioni cui si perviene,  $T_x$  e  $T_y$  potranno essere riformulate in funzione delle grandezze cinematiche della piastra inflessa.

Ricaviamo l’espressione per il taglio  $T_x$  considerando l’equilibrio alla rotazione dell’elemento di controllo attorno ad un asse  $a_y$  parallelo ad  $y$  (Fig. P.6).



**Figura P.6** — Equilibrio alla rotazione dell’elemento di controllo attorno all’asse  $a_y // y$

Trascurando i contributi legati al carico distribuito  $p(x, y)$  ed ai tagli trasversali  $T_y$  e  $(T_y + dT_y)$  perché infinitesimi di ordine superiore, si potrà scrivere:

$$-T_x dy dx - M_x dy + (M_x + dM_x) dy - M_{yx} dx + (M_{yx} + dM_{yx}) dx = 0$$

ossia:

$$T_x dy dx = dM_x dy + dM_{yx} dx$$

da cui:

$$\boxed{T_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}} \quad (\text{P.24})$$

e in funzione delle curvature flessionali e torsionali:

$$\boxed{T_x = D \frac{\partial}{\partial x} (\chi_x + \nu \chi_y) + D \frac{\partial}{\partial y} [(1 - \nu) \chi_{yx}]} \quad (\text{P.25})$$

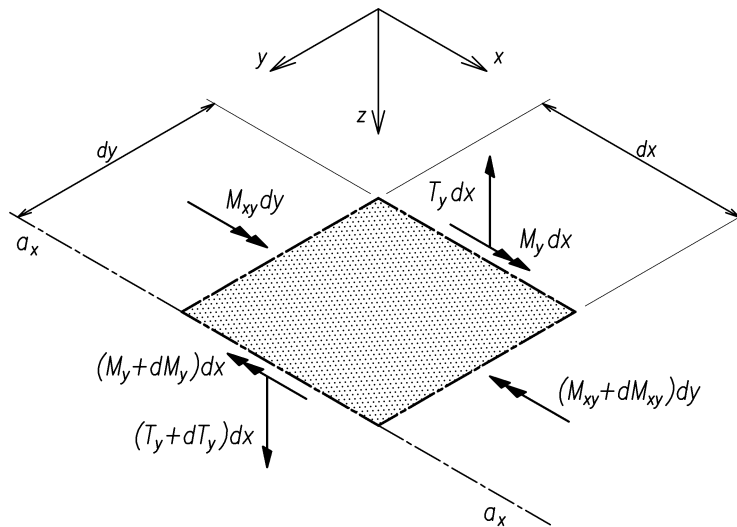
e in funzione degli spostamenti  $w(x, y)$ :

$$T_x = D \left[ -\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \left( -\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) + (1 - \nu) \left( -\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right) \right] = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

ovvero, introducendo l'operatore differenziale di Laplace  $\nabla^2$ :

$$\boxed{T_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w)} \quad (\text{P.26})$$

In maniera analoga si può trovare l'espressione per il *taglio*  $T_y$  imponendo l'equilibrio alla rotazione dell'elemento di controllo attorno ad un asse  $a_x$  *parallelo ad x* (Fig. P.7).



**Figura P.7** — Equilibrio alla rotazione dell'elemento di controllo attorno all'asse  $a_x // x$

Si avrà:

$$T_y dx dy + M_y dx - (M_y + dM_y) dx + M_{xy} dy - (M_{xy} + dM_{xy}) dy = 0$$

ossia:

$$T_y dx dy = dM_y dx + dM_{xy} dy$$

da cui:

$$\boxed{T_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}} \quad (\text{P.27})$$

e in funzione di  $\chi_x$ ,  $\chi_y$  e  $\chi_{xy}$ :

$$\boxed{T_y = D \frac{\partial}{\partial y} (\chi_y + \nu \chi_x) + D \frac{\partial}{\partial x} [(1 - \nu) \chi_{xy}]} \quad (\text{P.28})$$

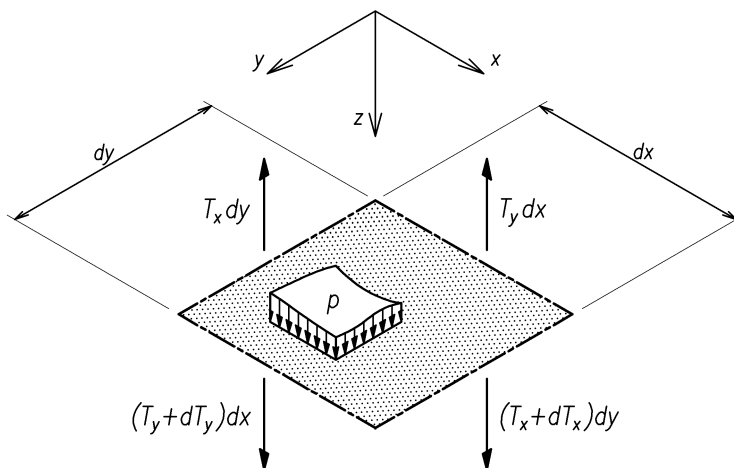
e in funzione di  $w(x, y)$ :

$$T_y = D \left[ -\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \nu \left( -\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) + (1 - \nu) \left( -\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \right] = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

ovvero, tramite il laplaciano  $\nabla^2$ :

$$\boxed{T_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w)} \quad (\text{P.29})$$

L'equilibrio alla traslazione secondo  $z$  consente di legare assieme  $T_x$  e  $T_y$  in un'unica relazione (Fig. P.8).



**Figura P.8** — Equilibrio alla traslazione dell'elemento di controllo secondo  $z$

Tenuto conto della presenza di un carico distribuito  $p(x, y)$  agente normalmente al piano medio, si potrà scrivere:

$$p dx dy - T_x dy + (T_x + dT_x) dy - T_y dx + (T_y + dT_y) dx = 0$$

ossia:

$$dT_x dy + dT_y dx = -p dx dy$$

da cui:

$$\boxed{\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = -p} \quad (\text{P.30})$$

e in funzione dei momenti flettenti e torcenti:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) = -p$$

e tenuto conto che  $M_{xy} = M_{yx}$  si arriva alla seguente:

$$\boxed{\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p} \quad (\text{P.31})$$

che costituisce l'equazione indefinita di equilibrio di una piastra sottile inflessa in funzione delle caratteristiche di momento.

### P.2.6 L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELLA SUPERFICIE ELASTICA

Tenuto conto delle relazioni esistenti fra caratteristiche unitarie di momento e grandezze cinematiche, ossia:

$$\boxed{\begin{aligned} M_x &= D(\chi_x + \nu \chi_y) = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= D(\chi_y + \nu \chi_x) = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= (1 - \nu) D \chi_{xy} = -(1 - \nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned}} \quad (\text{P.32})$$

l'equazione indefinita di equilibrio:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p$$

può essere scritta dapprima in funzione delle curvature e poi in funzione degli spostamenti  $w(x, y)$ , venendo a definire in tal modo l'equazione differenziale della superficie elastica della piastra inflessa.

In questa prospettiva, conviene trovare preventivamente le relazioni differenziali esistenti tra la curvatura torsionale  $\chi_{xy}$  e le curvature flessionali  $\chi_x$  e  $\chi_y$ .

Per quanto concerne le derivate parziali prime si avrà:

$$\frac{\partial \chi_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial \chi_x}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \chi_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial \chi_y}{\partial x}$$

Le due derivate parziali miste risulteranno così:

$$\frac{\partial^2 \chi_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \chi_{xy}}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \chi_y}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \chi_y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \chi_{xy}}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \chi_{xy}}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \chi_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial y^2}$$

Il risultato delle ultime due relazioni consente di affermare:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \chi_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \chi_{xy}}{\partial x \partial y}} \quad (\text{P.33})$$

Forti di questo risultato, l'equazione indefinita di equilibrio in funzione delle curvature risulta:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\chi_x + \nu \chi_y) + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 \chi_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\chi_y + \nu \chi_x) = -\frac{p}{D}$$

$$\frac{\partial^2 \chi_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \chi_y}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \chi_{xy}}{\partial x \partial y} - 2\nu \frac{\partial^2 \chi_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \chi_y}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \chi_x}{\partial y^2} = -\frac{p}{D}$$

e in definitiva:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \chi_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \chi_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \chi_y}{\partial y^2} = -\frac{p}{D}} \quad (\text{P.34})$$

Sostituendo alle curvature le espressioni in funzione degli spostamenti si ottiene:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -\frac{p}{D}$$

ovvero:

$$\boxed{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}} \quad (\text{P.35})$$

che costituisce l'equazione differenziale della superficie elastica  $w(x, y)$ , anche nota come *equazione di Lagrange*.



Detta equazione può essere scritta in forma abbreviata introducendo l'operatore differenziale  $\nabla^4$  ("nabla quarto" o "laplaciano quadro") così definito:

$$\nabla^4 = (\nabla^2)^2$$

con  $\nabla^2$  ("nabla quadro" o "laplaciano") che a sua volta, in coordinate cartesiane e in due dimensioni, risulta essere:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Pertanto scriveremo:

$$\boxed{\nabla^4 w = \frac{p}{D}} \quad (\text{P.36})$$

Trattasi di un'equazione differenziale lineare alle derivate parziali la cui integrazione si sa eseguire in modo esatto soltanto in un numero ristretto di casi. Le soluzioni per i casi più semplici e più frequenti nella pratica possono essere espresse mediante serie doppie di Fourier (Navier) o serie semplici (Lévy) o ancora ricorrendo al metodo delle differenze finite (Marcus).

Per determinare  $w(x, y)$  andranno definite opportune costanti di integrazione dipendenti dalle condizioni al contorno della piastra.

### P.2.7 LE CONDIZIONI AL CONTORNO

Si è visto che l'analisi di una piastra inflessa sottile può essere ridotta, tramite l'equazione di Lagrange, allo studio della sua superficie elastica  $w(x, y)$ . Il comportamento strutturale può essere descritto da uno stato biassiale sia per le tensioni sia per le deformazioni.

In conseguenza delle ipotesi di Kirchhoff, l'equazione differenziale alle derivate parziali cui si perviene è del quarto ordine. Conseguentemente, nella soluzione dovranno intervenire quattro costanti di integrazione per ciascuna direzione coordinata (vale a dire due condizioni per ciascun lato del contorno), e quindi otto condizioni in totale. Ora sappiamo che su ciascun lato di contorno possono essere individuate tre *grandezze statiche* (momento flettente, momento torcente e taglio trasversale) e tre corrispondenti *grandezze cinematiche* (rotazione di flessione, rotazione di torsione e spostamento trasversale). In Fig. P.9 sono rappresentate tutte queste grandezze con riferimento ad un elementino di larghezza  $dy$  sul lato di contorno con  $x = a$ .

In ciascuna terna solo due grandezze sono fra loro indipendenti, e pertanto la terza grandezza sarà legata a una delle due attraverso una opportuna relazione. Ad esempio, per quanto concerne la terna cinematica sappiamo che fra rotazione  $\varphi_x$  e spostamento  $w(x, y)$  esiste la seguente relazione differenziale:  $\varphi_x = -\partial w / \partial x$ . Mentre nella terna di grandezze statiche una relazione viene ricavata introducendo la cosiddetta *forza di taglio effettiva*  $\bar{T}_x$ , in grado di combinare assieme taglio trasversale  $T_x$  e momento torcente  $M_{xy}$ .

#### Forze di sostituzione sul contorno

Con riferimento, ad esempio, al lato di contorno  $x = a$  (Fig. P.10), il momento torcente  $M_{xy} dy$  agente su un fronte infinitesimo di larghezza  $dy$  si può pensare che possa essere sostituito con una coppia di forze trasversali avente braccio pari proprio a  $dy$ , senza che tale sostituzione venga a modificare il comportamento della piastra. Infatti, per il *principio di Saint-Venant* il regime

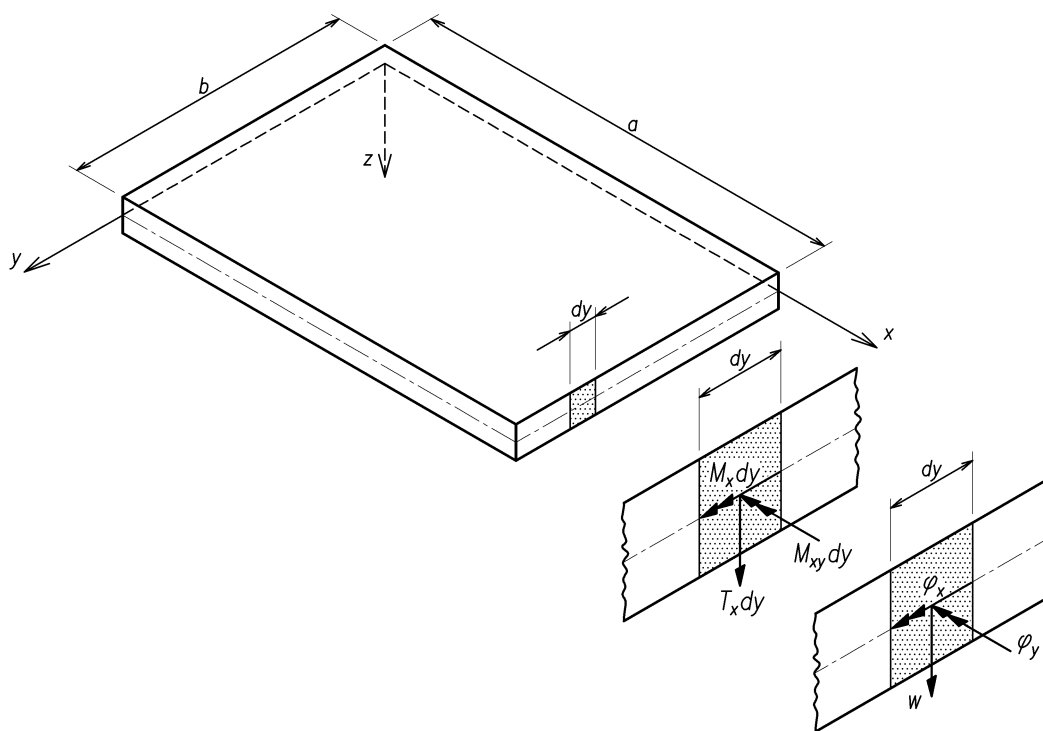


Figura P.9 — Grandezze statiche e cinematiche sul contorno con  $x = a$

statico ed elastico della piastra si modifica sensibilmente soltanto nelle immediate vicinanze del contorno stesso (si può dire sino ad una distanza circa uguale allo spessore  $h$  della piastra), mentre in tutto il resto della regione interna rimane praticamente invariato.

Dopo la sostituzione, all'interfaccia fra due elementi adiacenti di larghezza  $dy$  vengono ad agire due forze di verso opposto la cui risultante è pari a:  $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy$ . Questa forza a sua volta può essere pensata come la risultante di una forza  $V_x$  distribuita su un fronte infinitesimo ancora largo  $dy$ , ma posto a cavallo dell'interfaccia degli elementi precedentemente considerati. Ovvero si andrà a scrivere:

$$V_x dy = \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy$$

con ovviamente:

$$\boxed{V_x = \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}} \tag{P.37}$$

Analogo ragionamento può essere fatto sull'altro lato di contorno con  $y = b$ , pervenendo a definire la forza:

$$\boxed{V_y = \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}} \tag{P.38}$$

Alle forze distribuite  $V_x$  e  $V_y$  viene dato il nome di *forze di sostituzione* in quanto vanno a sostituire i momenti torcenti  $M_{xy}$  e  $M_{yx}$  agenti sulle facce di contorno rispettivamente con normale  $x$  e  $y$ .

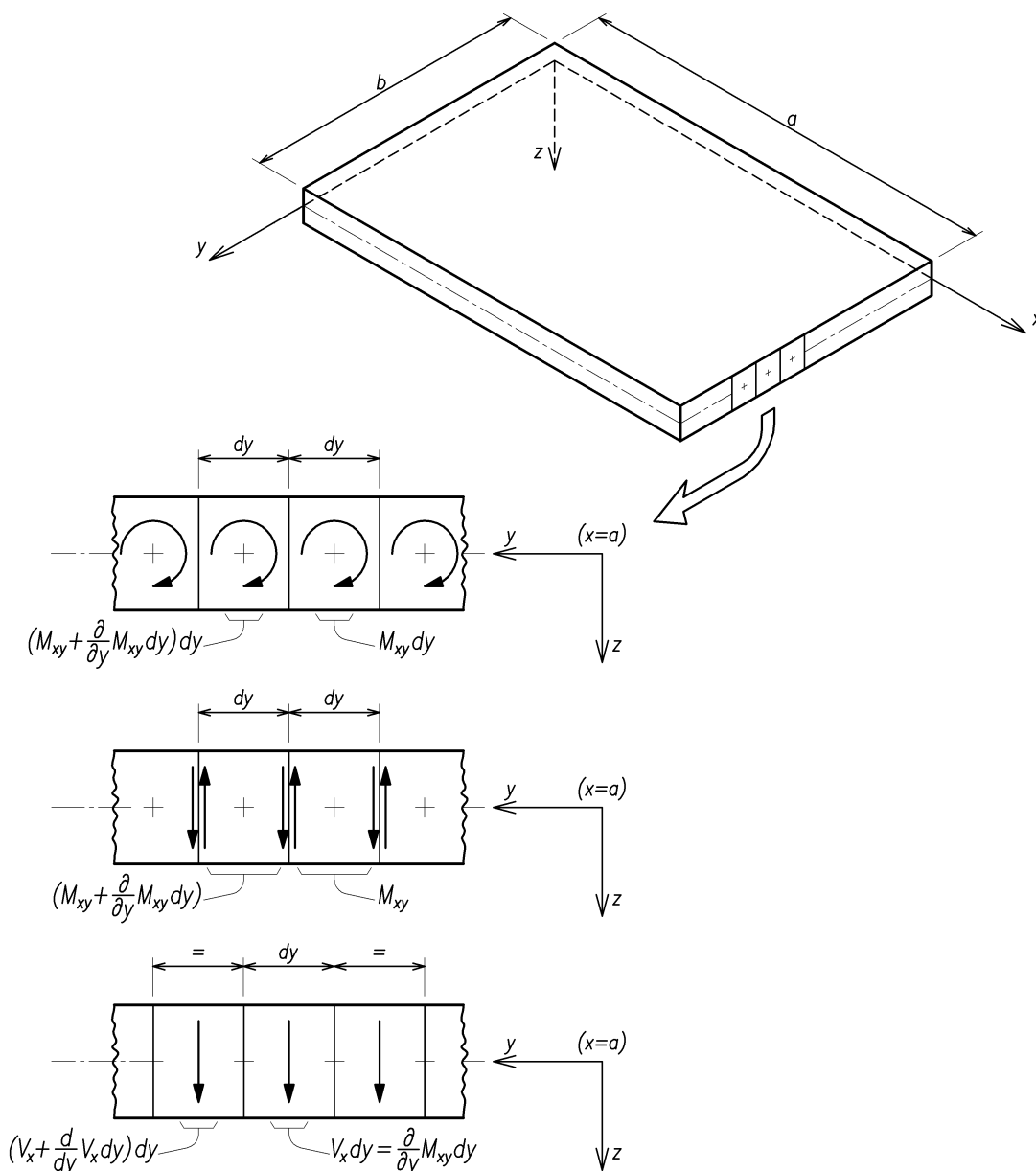


Figura P.10 — Forze di sostituzione sul contorno con  $x = a$

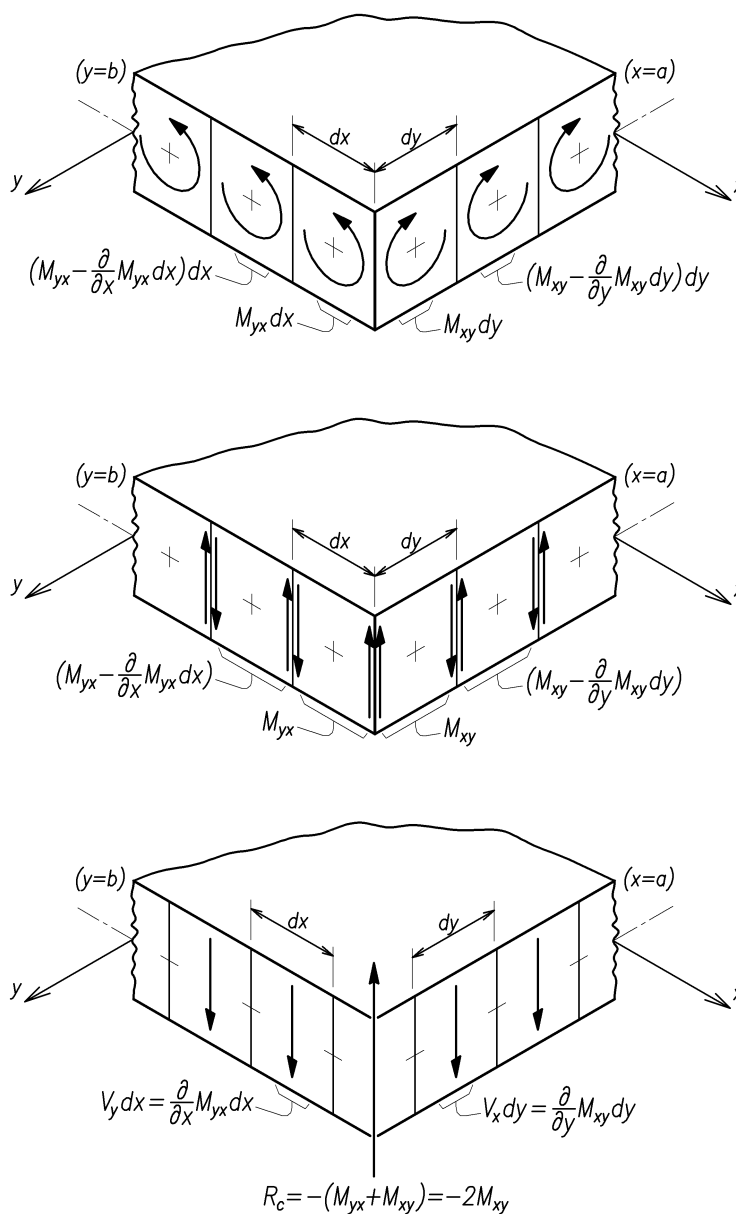
**Forze di taglio effettive sul contorno**

Sul contorno, oltre alle forze di sostituzione  $V_x$  e  $V_y$  appena individuate agiscono pure forze di taglio  $T_x$  e  $T_y$ , tutte aventi la medesima direzione trasversale. Pertanto, sovrapponendo gli effetti, possiamo considerare per ogni faccia un'unica forza di taglio distribuita, indicata rispettivamente con  $\bar{T}_x$  e  $\bar{T}_y$ , cui si assegna la denominazione di *forza di taglio effettiva*. Si avrà:

$\bar{T}_x = T_x + V_x = T_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (\text{sul contorno di normale } x)$	(P.39)
$\bar{T}_y = T_y + V_y = T_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \quad (\text{sul contorno di normale } y)$	

**Forze di vertice**

In prossimità del vertice le due facce di contorno si incontrano ortogonalmente, e qui, per la reciprocità delle tensioni tangenziali, risulterà:  $M_{xy} = M_{yx}$ . Sostituendo detti momenti con coppie di forze equivalenti di braccio  $dy$  e  $dx$  rispettivamente si osserva che in corrispondenza dello spigolo viene a mancare quella parziale compensazione della forza risultante dovuta all'elementino adiacente (Fig. P.11). Pertanto, sullo spigolo rimane ad agire una forza pari a  $-M_{xy}$  sulla faccia di normale  $x$  ed una forza pari a  $-M_{yx}$  sulla faccia di normale  $y$ , concorde con la prima (il segno “-” è dovuto al fatto che con  $M_{xy}$  e  $M_{yx}$  entrambi positivi, la forza di vertice viene a spirare in direzione opposta a  $z$ ).



**Figura P.11** — Forza al vertice  $(a, b)$  del contorno

Tenuto conto dell'uguaglianza dei momenti torcenti  $M_{xy}$  e  $M_{yx}$  nel punto, la *forza di vertice*  $R_C$  sarà:

$$\boxed{R_C = -(M_{yx} + M_{xy}) = -2 M_{xy}} \quad (\text{P.40})$$

A causa della presenza di queste forze  $R_C$  concentrate agli angoli, la piastra, se non opportunamente trattenuta, tenderebbe ad alzare o abbassare i quattro vertici, a seconda del segno di  $M_{xy}$  nel vertice.

Quindi si può concludere che, nella teoria di Kirchhoff, la distribuzione del momento torcente sul contorno di una piastra rettangolare è equivalente ad una opportuna distribuzione di forze taglianti trasversali (le forze di sostituzione  $V_x$  e  $V_y$ ) più forze concentrate nei quattro vertici (le forze di vertice  $R_C$ ).

Le *forze di taglio effettive*  $\bar{T}_x$  e  $\bar{T}_y$  sul contorno possono essere espresse in funzione di  $w$  in questo modo:

$$\begin{aligned} \bar{T}_x &= T_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ -(1 - \nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] = \\ &= -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \\ \bar{T}_y &= T_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ -(1 - \nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] = \\ &= -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{P.41})$$

e così pure la *forza concentrata al vertice*  $R_C$ :

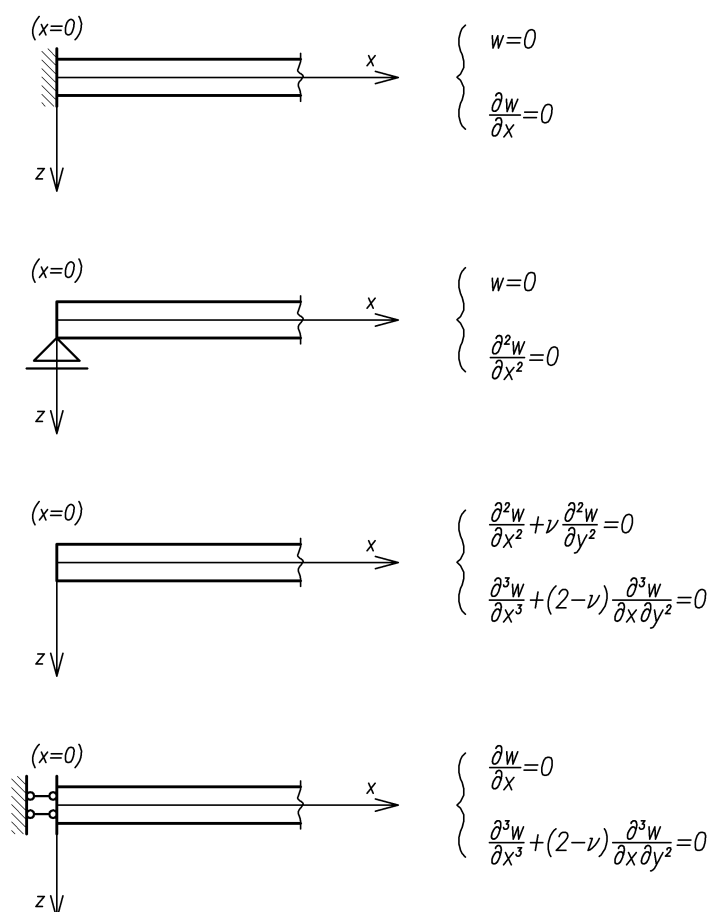
$$\boxed{R_C = -2 M_{xy} = 2(1 - \nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}} \quad (\text{P.42})$$

### Condizioni al contorno di casi fondamentali

Le condizioni da imporre al contorno della piastra possono essere di natura statica, cinematica o mista.

Esplicitiamo alcuni casi fondamentali facendo riferimento, come esempio, al contorno di normale l'asse  $x$ , con  $x = 0$  (Fig. P.12); potranno così essere prese in considerazione le seguenti grandezze:

Grandezze statiche		Grandezze cinematiche	
momento flettente	$M_x$	rotazione di flessione	$\varphi_x$
momento torcente	$M_{xy}$	rotazione di torsione	$\varphi_y$
taglio effettivo	$\bar{T}_x$	spostamento trasversale	$w$



**Figura P.12** — Condizioni al contorno di casi fondamentali

**Contorno incastrato**

L'incastrato impone che siano nulli lungo tutto il lato gli spostamenti trasversali  $w$  e le rotazioni di flessione  $\varphi_x = -\frac{\partial w}{\partial x}$ , pertanto deve risultare:

$$\boxed{\begin{array}{l} w = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{array}} \quad (\text{P.43})$$

**Contorno appoggiato**

L'appoggio semplice impedisce ai punti del contorno di spostarsi trasversalmente, ma consente alla piastra di ruotare liberamente senza che maturi alcun momento flettente. Si dovranno quindi imporre una condizione cinematica ( $w = 0$ ) e una condizione statica ( $M_x = 0$ ), che tradotte in funzione di  $w$  divengono:

$$\begin{array}{l} w = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{array}$$

siccome il lato rimane rettilineo, su di esso la curvatura lungo  $y$  è identicamente nulla (e quindi  $\chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ ), talché si potrà scrivere:

$$\boxed{\begin{array}{l} w = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{array}} \quad (\text{P.44})$$

**Contorno libero**

Se il lato della piastra è libero, in tutti i suoi punti devono essere nulli il momento flettente ( $M_x = 0$ ) ed il taglio effettivo trasversale ( $\bar{T}_x = 0$ ). Queste due condizioni statiche si esplicitano in funzione di  $w$  rispettivamente in questo modo:

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \end{array}} \quad (\text{P.45})$$

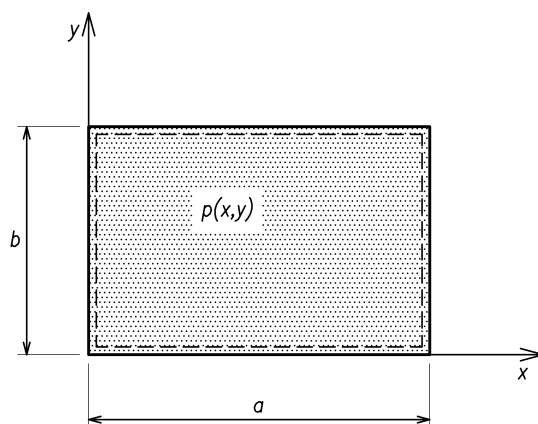
**Contorno su slitta trasversale (doppio pendolo)**

In questo caso il bordo è libero di scorrere trasversalmente non offrendo alcuna resistenza alle forze taglienti effettive trasversali ( $\bar{T}_x = 0$ ) e con rotazione di flessione impedita ( $\varphi_x = 0$ ). Le due condizioni miste, in funzione di  $w$ , risultano:

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{array}} \quad (\text{P.46})$$

### P.3 LA PIASTRA RETTANGOLARE APPOGGIATA AL CONTORNO SOLUZIONI MEDIANTE SERIE DOPPIE

Consideriamo in un riferimento cartesiano  $(x, y, z)$  levogiro una piastra rettangolare di lati  $(a \times b)$  appoggiata lungo il contorno e impedita di sollevarsi negli angoli (Fig. P.13).



**Figura P.13** — Piastra inflessa appoggiata al contorno soggetta a carico distribuito  $p(x, y)$

Chiamato  $w(x, y)$  lo spostamento lungo l'asse  $z$ , in presenza di un carico  $p(x, y)$  applicato normalmente al piano della piastra, le *condizioni al contorno* da rispettare sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} w = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{array} \right. \quad \text{per } x = 0 \text{ e } x = a$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right. \quad \text{per } y = 0 \text{ e } y = b$$
(P.47)

Si può dimostrare innanzitutto che in presenza di un *carico sinusoidale* del tipo:

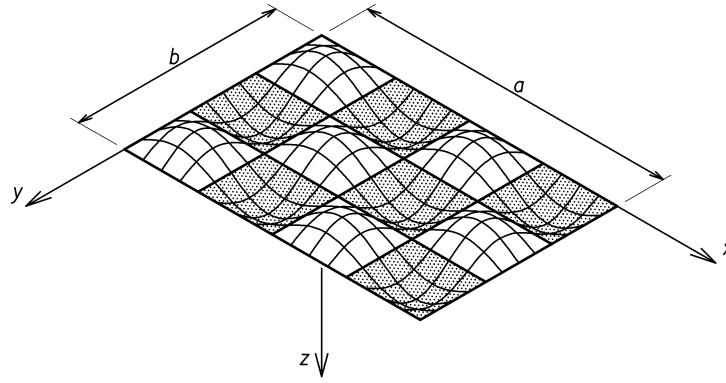
$$p(x, y) = p_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$
(P.48)

la *superficie elastica* risulta affine a quella di carico, ossia:

$$w(x, y) = w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$
(P.49)

in cui  $m$  e  $n$  sono numeri interi qualsiasi che rappresentano il numero di semionde sinusoidali rispettivamente in direzione  $x$  e  $y$  (Fig. P.14).





**Figura P.14** — Carico sinusoidale e superficie elastica affine per  $m = 4$  e  $n = 3$

La piastra può essere considerata come divisa in  $(m \times n)$  rettangoli di lati  $(a/m \times b/n)$ , con il carico disposto a scacchiera, alternativamente positivo e negativo. In ciascun rettangolo parziale il carico avrà andamento sinusoidale basato su una sola semionda sia in direzione  $x$  sia in direzione  $y$ , con il massimo valore assoluto al centro pari a  $|p_{mn}|$ .

In maniera affine la superficie elastica può essere divisa negli stessi sottodomini rettangolari e in ciascun rettangolo parziale il massimo spostamento si registrerà al centro, con valore assoluto pari a  $|w_{mn}|$ .

Si può dimostrare facilmente che l'equazione della superficie elastica  $w(x, y)$  soddisfa le condizioni al contorno, e come il valore di  $w_{mn}$  possa essere ricavato dall'equazione di Lagrange  $\nabla^4 w = p/D$ . In vista di queste dimostrazioni ricaviamo le varie derivate parziali di  $w(x, y)$ .

$$\begin{aligned}
 w &= w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\
 \frac{\partial w}{\partial x} &= w_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \left(\frac{m\pi}{a}\right) \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \\
 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} &= -w_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \left(\frac{m\pi}{a}\right)^3 \\
 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 \\
 \frac{\partial w}{\partial y} &= w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \left(\frac{n\pi}{b}\right) \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \\
 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} &= -w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \left(\frac{n\pi}{b}\right)^3 \\
 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \\
 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} &= -w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right) \\
 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} &= w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2
 \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione di Lagrange:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}$$

si ha:

$$\begin{aligned} & w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + \\ & + 2 w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \\ & + w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 = \frac{p_{mn}}{D} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{aligned}$$

ossia:

$$w_{mn} \left[ \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \right] = \frac{p_{mn}}{D}$$

e quindi l'equazione è soddisfatta se:

$$\boxed{w_{mn} = \frac{p_{mn}}{\pi^4 D \left[ (m/a)^2 + (n/b)^2 \right]^2}} \quad (\text{P.50})$$

Il risultato ottenuto può essere gioevolmente utilizzato per ricavare la superficie elastica  $w(x, y)$  in presenza di un carico  $p(x, y)$  qualsiasi. Il carico  $p(x, y)$  può essere infatti rappresentato attraverso una serie doppia di Fourier le cui componenti sinusoidali danno contributi affini per la determinazione della superficie elastica. La superficie elastica definitiva sarà così ottenuta in virtù del principio di sovrapposizione degli effetti.

Le prime soluzioni di questo problema sotto forma di serie doppia di Fourier furono date da Navier nel 1820.

In sintesi, se il carico  $p$  varia su tutta la piastra secondo una *legge qualsiasi*  $p = p(x, y)$ , questa può essere sviluppata nella seguente *serie doppia di Fourier*:

$$\boxed{p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)} \quad (\text{P.51})$$

dove i coefficienti  $p_{mn}$  sono dati da:

$$\boxed{p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a p(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy} \quad (\text{P.52})$$

e, sovrapponendo gli effetti, la *superficie elastica*  $w(x, y)$  risulterà rappresentata pur essa da una serie doppia di Fourier i cui termini sono del tipo già ricavato per un carico sinusoidale:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (\text{P.53})$$

ovvero:

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn}}{[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (\text{P.54})$$

Ottenuta così la funzione  $w(x, y)$ , da essa si potranno dedurre le caratteristiche unitarie di sollecitazione all'*interno della piastra* (ossia i momenti flettenti  $M_x$  e  $M_y$ , il momento torcente  $M_{xy}$ , e le forze di taglio  $T_x$  e  $T_y$ ), nonché le *reazioni sul contorno* (ossia le forze di taglio trasversale effettive  $\bar{T}_x$  e  $\bar{T}_y$ , e le forze di vertice  $R_C$  in grado di impedire il sollevamento del contorno).

Con riferimento ad un tratto di sezione di larghezza unitaria si avrà:

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -D (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ T_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ T_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \bar{T}_x &= -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \\ \bar{T}_y &= -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right] \\ R_C &= 2D (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (\text{P.55})$$

### P.3.1 Carico uniformemente ripartito su tutta la piastra

Nel caso di carico *costante* su tutta la piastra:

$$\boxed{p(x, y) = p_o} \quad (\text{P.56})$$

si vengono ad avere notevoli semplificazioni.

I coefficienti  $p_{mn}$  diventano:

$$\begin{aligned} p_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a p_o \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy = \\ &= \frac{4p_o}{\pi^2 m n} [1 - \cos(m\pi)][1 - \cos(n\pi)] = \frac{4p_o}{\pi^2 m n} [1 - (-1)^m][1 - (-1)^n] \end{aligned}$$

Si osserva che risulta  $p_{mn} \neq 0$  solo con valori di  $m$  e  $n$  *entrambi dispari*. Pertanto, si potrà scrivere:

$$\boxed{p_{mn} = \frac{16p_o}{\pi^2 m n} \quad \text{con} \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots)} \quad (\text{P.57})$$

Introducendo questa espressione di  $p_{mn}$  nell'espressione della *superficie elastica* si ottiene:

$$\boxed{w(x, y) = \frac{16p_o}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)}{m n [(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \quad \text{con} \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots)} \quad (\text{P.58})$$

La *freccia massima* si realizza al centro della piastra ( $x = a/2, y = b/2$ ), e vale:

$$w_{max} = \frac{16p_o}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(m\pi/2) \sin(n\pi/2)}{m n [(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \quad \text{con} \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots)$$

Si osserva inoltre che:

$$\begin{aligned} \sin(m\pi/2) &= (-1)^{(m-1)/2} \\ \sin(n\pi/2) &= (-1)^{(n-1)/2} \end{aligned}$$

per cui sostituendo si ha:

$$\boxed{w_{max} = \frac{16p_o}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n-2)/2}}{m n [(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \quad \text{con} \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots)} \quad (\text{P.59})$$

Privo il calcolo delle derivate parziali seconde di  $w(x, y)$  si possono calcolare le *caratteristiche unitarie di momento*  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_{xy}$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{16 p_o}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)}{m n [(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -\frac{16 p_o}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)}{m n [(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{16 p_o}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b)}{m n [(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{16 p_o}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)}{m n [(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \frac{16 p_o}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b)}{m n [(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) \left(\frac{n\pi}{b}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \\ &= \frac{16 p_o}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m/a)^2 + \nu (n/b)^2}{m n [(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \\ &= \frac{16 p_o}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu (m/a)^2 + (n/b)^2}{m n [(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ M_{xy} &= -D (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \\ &= -\frac{16 p_o (1 - \nu)}{\pi^4 a b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\end{aligned} \tag{P.60}$$

con le sommatorie estese ai soli numeri interi dispari ( $m, n = 1, 3, 5, \dots$ ).

Per il calcolo delle *forze di taglio*  $T_x$  e  $T_y$  vanno dapprima determinate le derivate parziali terze di  $w(x, y)$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} &= -\frac{16 p_o}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)}{m n [(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^3 \\ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} &= -\frac{16 p_o}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b)}{m n [(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^3 \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} &= -\frac{16 p_o}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)}{m n [(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \\ \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} &= -\frac{16 p_o}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b)}{m n [(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)\end{aligned}$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
 T_x &= -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = \\
 &= \frac{16 p_o}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m/a)}{m n [(m/a)^2 + (n/b)^2]} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\
 T_y &= -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right] = \\
 &= \frac{16 p_o}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n/b)}{m n [(m/a)^2 + (n/b)^2]} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)
 \end{aligned} \tag{P.61}$$

con  $m, n = 1, 3, 5, \dots$

Si potranno ancora determinare le *reazioni distribuite sui bordi*:

$$\begin{aligned}
 \bar{T}_x &= -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = \\
 &= \frac{16 p_o}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m/a) [(m/a)^2 + (2 - \nu) (n/b)^2]}{m n [(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\
 \bar{T}_y &= -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right] = \\
 &= \frac{16 p_o}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n/b) [(2 - \nu) (m/a)^2 + (n/b)^2]}{m n [(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)
 \end{aligned} \tag{P.62}$$

e la *forza concentrata ai vertici*:

$$\begin{aligned}
 R_C &= 2D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \\
 &= \frac{32 p_o (1 - \nu)}{\pi^4 a b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b)}{[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2}
 \end{aligned} \tag{P.63}$$

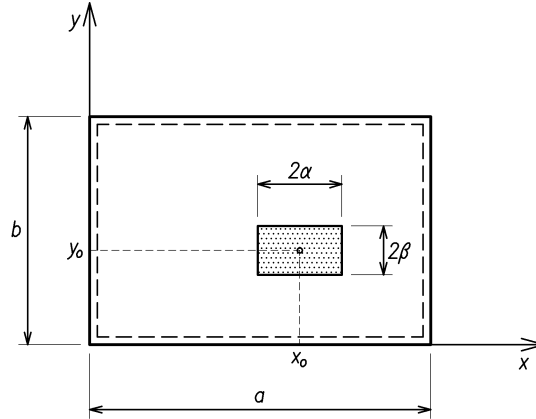
che scritta con riferimento al vertice ( $x = a$ ,  $y = b$ ) diviene:

$$R_C = \frac{32 p_o (1 - \nu)}{\pi^4 a b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \quad \text{con} \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots) \tag{P.64}$$

Per ragioni di simmetria la stessa forza  $R_C$  si avrà pure negli altri tre vertici della piastra.

### P.3.2 Carico uniformemente ripartito su un rettangolo parziale (*patch load*)

Si abbia un carico  $P$  uniformemente ripartito nella subregione  $(2\alpha \times 2\beta)$  con centro in  $(x_o, y_o)$ , (Fig. P.15).



**Figura P.15** — Piastra inflessa appoggiata al contorno soggetta a carico d'impronta

Il carico  $p(x, y)$  sarà costante nella subregione e varrà zero altrove:

$$\begin{cases} p(x, y) = \frac{P}{4\alpha\beta} & \text{in } (2\alpha \times 2\beta) \\ p(x, y) = 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (\text{P.65})$$

In generale,  $p(x, y)$  espresso in serie doppia di Fourier nell'intero dominio  $(a \times b)$  risulta:

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

con  $m, n = 1, 3, 5, \dots$

I coefficienti  $p_{mn}$  si ricavano con l'espressione:

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a p(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy$$

Tenuto conto che il contributo degli integrali è diverso da zero soltanto nella subregione caricata, si potrà scrivere pure:

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_{y_o-\beta}^{y_o+\beta} \int_{x_o-\alpha}^{x_o+\alpha} \frac{P}{4\alpha\beta} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy \quad (\text{P.66})$$

ovvero, continuando:

$$\begin{aligned}
 p_{mn} &= \frac{P}{a b \alpha \beta} \int_{y_o-\beta}^{y_o+\beta} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy \int_{x_o-\alpha}^{x_o+\alpha} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx = \\
 &= \frac{P}{\alpha \beta m n \pi^2} \left[ \cos\left(\frac{m\pi}{a}(x_o - \alpha)\right) - \cos\left(\frac{m\pi}{a}(x_o + \alpha)\right) \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \left[ \cos\left(\frac{n\pi}{b}(y_o - \beta)\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{b}(y_o + \beta)\right) \right]
 \end{aligned}$$

o anche<sup>2</sup>:

$$\boxed{p_{mn} = \frac{4P}{\alpha \beta m n \pi^2} \sin\left(\frac{m\pi x_o}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi \alpha}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_o}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi \beta}{b}\right)} \quad (\text{P.67})$$

Introducendo  $p_{mn}$  nell'equazione generale della *superficie elastica*:

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn}}{[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

si ottiene l'equazione di  $w(x, y)$  per il caso considerato:

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 w(x, y) &= \frac{4P}{\pi^6 D \alpha \beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)}{m n [(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \cdot \\
 &\quad \cdot \sin\left(\frac{m\pi x_o}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi \alpha}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_o}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi \beta}{b}\right)
 \end{aligned}
 } \quad (\text{P.68})$$

con  $m, n = 1, 3, 5, \dots$

In queste espressioni ritroviamo ovviamente il caso di un carico uniformemente distribuito su tutta la piastra. Inoltre, tramite esse, si potrà risolvere pure il caso di una forza concentrata in un punto generico.

---

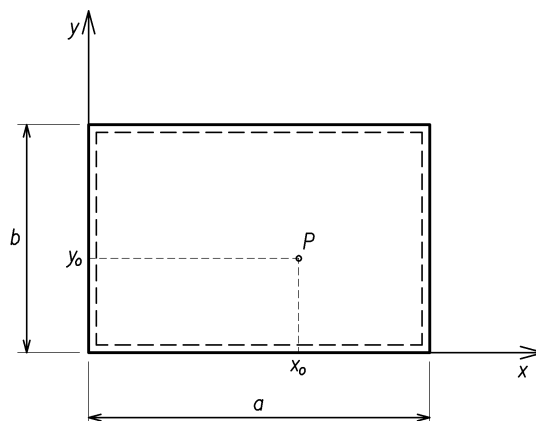
<sup>2</sup> Formule di addizione:

$$\begin{aligned}
 \cos(\varphi + \vartheta) &= \cos \varphi \cos \vartheta - \sin \varphi \sin \vartheta \\
 \cos(\varphi - \vartheta) &= \cos \varphi \cos \vartheta + \sin \varphi \sin \vartheta
 \end{aligned}$$



### P.3.3 Carico concentrato in un punto generico della piastra (point load)

I risultati ottenuti per il caso “patch load” permettono di risolvere il problema legato al caso di un *carico concentrato*  $P$  in un punto di coordinate  $(x_o, y_o)$  della piastra, (Fig. P.16).



**Figura P.16** — *Piastra inflessa appoggiata al contorno soggetta a carico concentrato*

Infatti, ipotizzando che il punto sia il centro di una subregione rettangolare  $(2\alpha \times 2\beta)$ , basterà ridurre l'area di carico idealmente a zero.

I coefficienti  $p_{mn}$  risulteranno dal calcolo del seguente limite:

$$p_{mn} = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 0}} \frac{4P}{\alpha\beta m n \pi^2} \sin\left(\frac{m\pi x_o}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi\alpha}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_o}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi\beta}{b}\right)$$

Osservando che:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \sin\left(\frac{m\pi\alpha}{a}\right) = \frac{m\pi}{a}$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{1}{\beta} \sin\left(\frac{n\pi\beta}{b}\right) = \frac{n\pi}{b}$$

risulterà:

$$p_{mn} = \frac{4P}{ab} \sin\left(\frac{m\pi x_o}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_o}{b}\right) \quad (\text{P.69})$$

e conseguentemente:

$$w(x, y) = \frac{4P}{\pi^4 D a b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)}{[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \sin\left(\frac{m\pi x_o}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_o}{b}\right) \quad (\text{P.70})$$

con  $m, n = 1, 3, 5, \dots$