

Struttura per Scadenza dei Tassi

31

STRUTTURA PER SCADENZA DEI TASSI

- ▷ Obiettivo è la costruzione della struttura per scadenza dei tassi (o CURVA DEI TASSI).
- ▷ A tal fine si considera un modello idealizzato di mercato obbligazionario, caratterizzato da numerose ipotesi semplificatrici, più o meno forti.
- ▷ Nella realtà la curva dei tassi è relativa ad un emittente (e.g. uno stato) o ad un certo tipo di mercato (LIBOR, EURIBOR, imprese con un dato rating), ad una certa valuta, ad un certo intervallo temporale, ...

IPOTESI: SCADENZARIO

- ▷ Sia \mathbb{T} lo **scadenzario** (tenor), cioè l'insieme delle epoche in cui avvengono le transazioni. In particolare, concentriamo l'attenzione su due casi.

- ★ Scadenzario **discreto** (finito o infinito):

$$\mathbb{T} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots\}.$$

Caso particolare: $t_i - t_{i-1} = \Delta$ per ogni $i \geq 1$.

- ★ Scadenzario **continuo**:

$$\mathbb{T} = [0, T] \text{ oppure } \mathbb{T} = [0, +\infty[$$

- ★ $0 =$ oggi; il tempo viene misurato in anni.

IPOTESI: MERCATI PERFETTI

- ▷ Mercato **COMPETITIVO**: gli agenti sono **price-takers** (non price-makers) cioè con le loro azioni non modificano i prezzi.
- ▷ Mercato privo di **FRIZIONALITÀ**: non ci sono **tassazioni** sui guadagni, né **costi di transazione**, non ci sono vincoli di **vendita allo scoperto** (short-selling) e i titoli sono **perfettamente divisibili**.
- ▷ Mercato privo di **OPPORTUNITÀ DI ARBITRAGGIO (AOA)**. Un'**arbitraggio** (free-lunch) è una strategia che produce una sequenza di cash-flows nonnegativi in ogni epoca ed in ogni stato del mondo, e, con probabilità positiva, un cash-flow positivo in qualche epoca.
- ★ AOA è condizione necessaria per l'**equilibrio**;
- ★ AOA \Rightarrow **Legge del prezzo unico**: due strategie che offrono gli stessi cash-flows devono avere lo stesso valore iniziale.

STRUTTURA PER SCADENZA DEI PREZZI

- ▷ Per ogni $s \in \mathbb{T}$, $s > 0$ supponiamo che vi sia un titolo a cedola nulla (TCN) con scadenza in s , di valore nominale 1€, e che tale titolo possa essere scambiato ad ogni epoca $t \in \mathbb{T}$, $t < s$. Il suo prezzo sarà indicato con $B(t, s)$.
- ▷ $B(t, s)$ può essere visto come **fattore di sconto** tra s e t : il valore in t di C € in s è $CB(t, s)$.
- ▷ Proprietà di $B(t, s)$:
 - ★ Ci mettiamo nel caso in cui i TCN siano **default-free**, cioè pagano con certezza 1€ a scadenza. A tal fine possiamo pensare a titoli emessi da uno stato o altro emittente con rating elevato. Di conseguenza deve essere $B(s, s) = 1$.
 - ★ Per AOA, deve essere inoltre $B(t, s) > 0$ per $t < s$ e $B(t, s) = 0$ per $t > s$.
- ▷ Si chiama **struttura per scadenza dei prezzi (discount function)** all'epoca $t \in \mathbb{T}$ la funzione

$$s \rightarrow B(t, s); \quad s \geq t, \quad s \in \mathbb{T}.$$

35

STRUTTURA PER SCADENZA DEI TASSI A PRONTI

- ▷ Convenzione: tutti i tassi che consideriamo sono **annualizzati**.
- ▷ Definiamo il **tasso a pronti** in t per l'epoca s , $r(t, s)$, con $t, s \in \mathbb{T}$, $t < s$ tramite la

$$B(t, s) = e^{-(s-t)r(t,s)}.$$

- ★ Quindi $r(t, s)$ è il tasso di rendimento (intensità d'interesse), in regime di interesse composto, corrispondente all'operazione in cui si compra in t il TCN e lo si detiene fino alla scadenza s .
- ★ Si tratta di tassi a pronti (**spot**), cioè tassi concordati in t per un investimento che inizia in t stesso.
- ▷ Riesce dunque

$$r(t, s) = -\frac{1}{s-t} \log B(t, s)$$

- ▷ La **struttura per scadenza dei tassi a pronti** all'epoca $t \in \mathbb{T}$ è la funzione

$$s \rightarrow r(t, s); \quad s \geq t, \quad s \in \mathbb{T}.$$

Il grafico di tale funzione è la **curva dei tassi**.

36

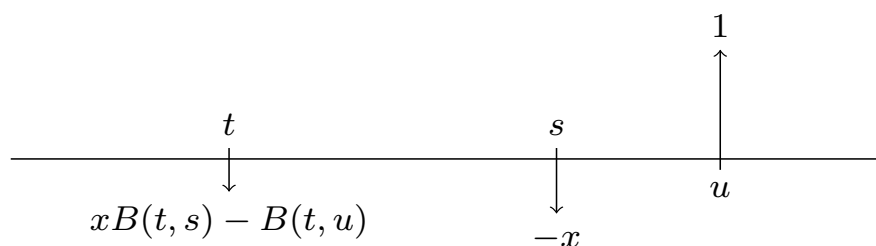
DAY COUNT CONVENTIONS

- ▷ Al fine di calcolare tassi e rendimenti, occorre calcolare la frazione d'anno che intercorre fra due date. Prevalgono regole di calcolo diverso a seconda dei mercati e degli strumenti. La maggior parte delle regole rientrano fra le seguenti (o fra loro varianti).
 1. **Actual/Actual**: numero effettivo di giorni fra le due date rapportato al numero effettivo di giorni nell'anno (365 o 366), con correzioni se fra due anni diversi.
 2. **Actual/360** (Variante: Actual/365): numero effettivo di giorni fra le due date diviso 360 (o 365).
 3. **30/360**: ogni mese ha 30 giorni, ogni anno ha 360 giorni.
- ▷ Esempio: frazione d'anno tra 27/2/07 e 5/1/07: 1) $53/365 = 0.1452$, 2) $53/360 = 0.1472$, 3) $52/360 = 0.1444$.
- ▷ Importanti sono anche le 'business date conventions', in base alle quali date di pagamento che coincidono con festività vengono convertite in date lavorative.
- ▷ Excel: *YEARFRAC* e *WORKDAY*; **R**: eg pacchetti **RQuantlib** e la suite **RMetrics**

37

TASSI A TERMINE

- ▷ A differenza dei tassi a pronti, i **tassi a termine** o **forward** sono relativi a investimenti concordati in un dato istante, che iniziano in un istante successivo.
- ▷ Fissati $t, s, u \in \mathbb{T}$ con $t \leq s < u$, consideriamo la seguente operazione costruita all'epoca t .
 - ★ Acquisto un TCN con scadenza u : flusso in t pari a $-B(t, u)$ ed in u pari a $+1$;
 - ★ vendo x TCN con scadenza s : flusso in t pari a $+xB(t, s)$ ed in s pari a $-x$.



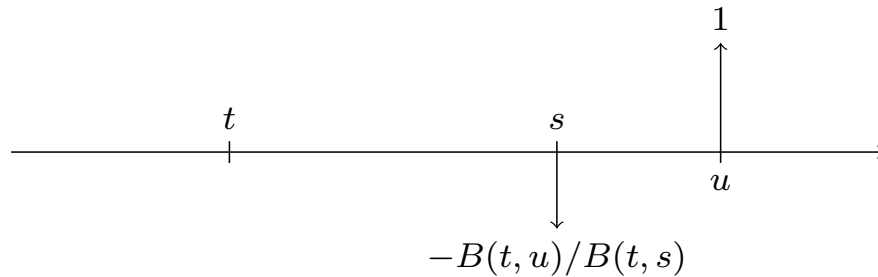
38

... TASSI A TERMINE

- ▷ ★ Scegliamo x in maniera tale che il flusso in t sia nullo:

$$xB(t, s) - B(t, u) = 0 \Leftrightarrow x = B(t, u)/B(t, s).$$

- ★ La situazione è allora



- ▷ Tale operazione genera flussi di cassa in s ed u , ma non in t (istante in cui l'operazione è concordata).

39

... TASSI A TERMINE

- ▷ Si definisce **tasso a termine** in t per il periodo $[s, u]$, $f(t, s, u)$, il tasso di rendimento (in regime di interesse composto) corrispondente a questa operazione:

$$\frac{B(t, u)}{B(t, s)} = e^{-(u-s)f(t, s, u)},$$

da cui si ricava che

$$f(t, s, u) = -\frac{1}{u-s} \log \frac{B(t, u)}{B(t, s)}.$$

- ▷ La **struttura per scadenza dei tassi forward** all'epoca t è la funzione

$$(s, u) \rightarrow f(t, s, u), \quad u > s \geq t, \quad s, u \in \mathbb{T}.$$

40

PREZZI, TASSI A PRONTI E A TERMINE

- ▷ È equivalente conoscere, ad una certa epoca t , i prezzi $B(t, s)$, i tassi a pronti $r(t, s)$ o i tassi a termine $f(t, s, u)$.
- ★ Infatti, noti i prezzi, si determinano (per costruzione) i tassi a termine.
 - ★ Viceversa, noti i tassi a termine, si hanno come caso particolare i tassi a pronti: ponendo $s = t$ in $f(t, s, u)$ si trova

$$\begin{aligned} f(t, t, u) &= - \frac{1}{u-t} \log \frac{B(t, u)}{B(t, t)} \\ &= - \frac{1}{u-t} \log B(t, u) \\ &= r(t, u). \end{aligned}$$

- ★ Infine, come già osservato, noti i tassi a pronti, sono noti anche i prezzi.

41

PREZZI, TASSI A PRONTI E A TERMINE

- ▷ Per $t, u \in \mathbb{T}$ e $t < u$, $r(t, u) > 0 \Leftrightarrow B(t, u) < 1$ cioè i tassi a pronti sono positivi se e solo se il corrispondente TCN vende a sconto.
- ▷ L'ultima proprietà ha le seguenti implicazioni: le seguenti proposizioni sono equivalenti
1. $B(t, s) > B(t, u)$ per $t, s, u \in \mathbb{T}$ e $t \leq s < u$
 2. $f(t, s, u) > 0$ per $t, s, u \in \mathbb{T}$ e $t \leq s < u$
 3. $B(t, u) < 1$ per $t, u \in \mathbb{T}$ e $t < u$
 4. $r(t, u) > 0$ per $t, u \in \mathbb{T}$ e $t < u$
- (1) \Leftrightarrow (2) segue dalla definizione di $f(t, s, u)$,

$$B(t, u) = B(t, s)e^{-f(t, s, u)(u-s)}.$$

(3) \Leftrightarrow (4) è stata vista sopra.

(1) \Rightarrow (3) basta prendere $t = s$ in (1).

Per provare che (3) \Rightarrow (1), consideriamo la seguente strategia: in t acquisto di un TCN con scadenza s , vendita di un TCN con scadenza u ; in s acquisto di un TCN con scadenza u

PREZZI, TASSI A PRONTI E A TERMINE

- ▷ I flussi di cassa sono:
- ★ in t , $-B(t, s) + B(t, u)$
 - ★ in s , $1 - B(s, u)$
 - ★ in u , $1 - 1 = 0$

essendo il flusso in s dato da $1 - B(s, u) > 0$ (da (3)), il flusso in t deve essere $-B(t, s) + B(t, u) < 0$, cioè $B(t, u) < B(t, s)$ altrimenti ci sarebbe un arbitraggio.

- ▷ quindi i tassi sono positivi sse la ‘discount function’ è decrescente.

43

PREZZI, TASSI A PRONTI E A TERMINE

- ▷ Fissiamo $t < s < u$;
- ★ partendo dalla

$$B(t, u) = B(t, s)e^{-(u-s)f(t,s,u)},$$

sostituendo i tassi a pronti si trova

$$e^{-(u-t)r(t,u)} = e^{-(s-t)r(t,s)} e^{-(u-s)f(t,s,u)},$$

- ★ passando ai logaritmi e esplicitando $r(t, u)$,

$$r(t, u) = \frac{s-t}{u-t} r(t, s) + \frac{u-s}{u-t} f(t, s, u)$$

cioè il tasso ‘a lungo termine’ $r(t, u)$ è **media ponderata** del tasso ‘a breve termine’ $r(t, s) = f(t, t, s)$ e del tasso forward $f(t, s, u)$;

44

TASSI A PRONTI E A TERMINE

- ▷ Dalla relazione che esprime $r(t, u)$ come media ponderata di $r(t, s)$ e $f(t, s, u)$ si trova che, per $t, s, u \in \mathbb{T}$ ($t < s < u$)

$$r(t, s) > r(t, u) \Leftrightarrow r(t, s) > r(t, u) > f(t, s, u)$$

$$r(t, s) < r(t, u) \Leftrightarrow r(t, s) < r(t, u) < f(t, s, u).$$

- ▷ Ne segue che
- ★ Se la struttura dei tassi a pronti è crescente (decrescente) allora è dominata dai (domina i) tassi a termine.
 - ★ Quando la curva dei tassi a pronti ‘cambia andamento’, cioè passa da crescita a decrescenza o viceversa, allora la curva dei tassi a termine ‘attraversa’ quella dei tassi a pronti.

45

TASSI E INTENSITÀ

- ▷ In luogo delle intensità di interesse, $r(t, s)$ (spot) e $f(t, s, u)$ (forward), si possono utilizzare i corrispondenti tassi di interesse.
- ▷ Il legame tra queste quantità è dato da

$$(1 + \text{tasso})^{\text{periodo}} = e^{\text{periodo} \cdot \text{intensità}}.$$

- ▷ Avremo quindi i tassi $i(t, s)$ (spot) e $i_f(t, s, u)$ (forward), definiti da

$$1 + i(t, s) = e^{r(t, s)}$$

$$1 + i_f(t, s, u) = e^{f(t, s, u)},$$

e legati da

$$(1 + i(t, u))^{u-t} = (1 + i(t, s))^{s-t} (1 + i_f(t, s, u))^{u-s},$$

quindi il fattore di capitalizzazione ‘a lungo’ $1 + i(t, u)$ è media geometrica dei corrispondenti fattori ‘a breve’ e a termine.

46

TASSI SEMPLICI

- ▷ A volte si calcola il rendimento di un'operazione basandosi su tassi **semplici** (cioè in regime di interesse semplice), soprattutto per investimenti di durata inferiore a 1 anno.
- ▷ Definiamo allora il **tasso semplice** a pronti in t per l'epoca s , $L(t, s)$, con $t, s \in \mathbb{T}$ e $t \leq s$, come il tasso in regime di interesse semplice corrispondente ad un investimento tra t e s :

$$B(t, s) = \frac{1}{1 + L(t, s)(s - t)},$$

da cui si ricava

$$L(t, s) = \frac{1}{s - t} \left[\frac{1}{B(t, s)} - 1 \right].$$

- ▷ La **struttura per scadenza dei tassi semplici** all'epoca $t \in \mathbb{T}$ è la funzione

$$s \rightarrow L(t, s), \quad s \geq t, \quad s \in \mathbb{T}.$$

Il grafico di tale funzione è la curva dei tassi semplici.

47

TASSI SEMPLICI A TERMINE

- ▷ Il tasso semplice a termine in t per il periodo $[s, u]$, $L_f(t, s, u)$, con $t \leq s < u$ e $t, s, u \in \mathbb{T}$ è definito implicitamente da

$$(1 + L(t, s)(s - t))(1 + L_f(t, s, u)(u - s)) = (1 + L(t, u)(u - t)),$$

- ▷ Il legame con le altre quantità introdotte in precedenza è dato da:

$$\begin{aligned} L_f(t, s, u) &= \frac{1}{u - s} \left[\frac{1 + L(t, u)(u - t)}{1 + L(t, s)(s - t)} - 1 \right] \\ &= \frac{1}{u - s} \left[\frac{B(t, s)}{B(t, u)} - 1 \right] \\ &= \frac{e^{(u-s)f(t,s,u)} - 1}{u - s}. \end{aligned}$$

- ▷ Il tasso a lungo semplice non è media di tasso breve e tasso forward

48

SCADENZARIO DISCRETO

- ▷ Consideriamo il caso $\mathbb{T} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots\}$;
- ★ poniamo $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$ per $i \geq 0$.
 - ★ Per $t_i, t_j \in \mathbb{T}$ con $t_i \leq t_j < \sup \mathbb{T}$, definiamo il **tasso a termine uniperiodale** in t_i per t_j , $f(t_i, t_j)$, come il tasso a termine dell'investimento stabilito in t_i , che comincia in t_j e termina nell'epoca successiva t_{j+1} :

$$\begin{aligned} f(t_i, t_j) &= f(t_i, t_j, t_{j+1}) \\ &= -\frac{1}{\Delta_j} \log \frac{B(t_i, t_{j+1})}{B(t_i, t_j)}. \end{aligned}$$

- ▷ La **struttura dei tassi a termine uniperiodali** all'epoca $t \in \mathbb{T}$ è la funzione

$$s \rightarrow f(t, s), \quad t < s < \sup \mathbb{T}, \quad t, s \in \mathbb{T}.$$

Il grafico di tale funzione è la **curva dei tassi a termine uniperiodali**.

49

SCADENZARIO DISCRETO

- ▷ Dai tassi uniperiodali si possono ricostruire le altre quantità:
- ★ I prezzi dei TCN e i tassi a pronti: per $t_i < t_j$ con $t_i, t_j \in \mathbb{T}$,

$$B(t_i, t_j) = e^{-\sum_{l=i}^{j-1} \Delta_l f(t_i, t_l)}, \quad r(t_i, t_j) = \frac{1}{t_j - t_i} \sum_{l=i}^{j-1} \Delta_l f(t_i, t_l),$$

- ★ I tassi a termine: per $t_i \leq t_j < t_k$, con $t_i, t_j, t_k \in \mathbb{T}$,

$$f(t_i, t_j, t_k) = \frac{1}{t_k - t_j} \sum_{l=j}^{k-1} \Delta_l f(t_i, t_l).$$

- ★ I tassi a pronti e a termine sono **medie ponderate** dei tassi uniperiodali sui corrispondenti periodi di investimento.
- ▷ Definiamo ancora il **tasso a pronti uniperiodale** in $t_i \in \mathbb{T}$ con $t_i < \sup \mathbb{T}$, $r(t_i)$, come

$$r(t_i) = f(t_i, t_i) = r(t_i, t_{i+1}) = -\frac{1}{\Delta_i} \log B(t_i, t_{i+1})$$

cioè $B(t_i, t_{i+1}) = e^{-\Delta_i r(t_i)}$.

TASSI SEMPLICI UNIPERIODALI

- ▷ In regime di interesse semplice, si definiscono i corrispondenti tassi semplici uniperiodali a termine:

$$\begin{aligned} L_f(t_i, t_j) &= L_f(t_i, t_j, t_{j+1}) \\ &= \frac{1}{\Delta_j} \left[\frac{B(t_i, t_j)}{B(t_i, t_{j+1})} - 1 \right] \\ &= \frac{e^{\Delta_j f(t_i, t_j)} - 1}{\Delta_j}, \end{aligned}$$

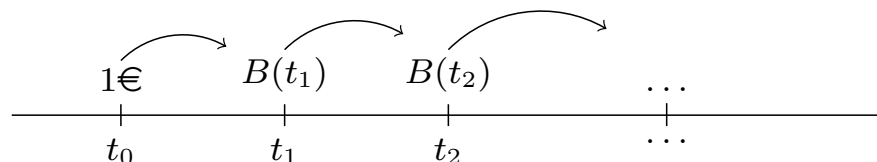
- ▷ e quello a pronti:

$$\begin{aligned} L(t_i) &= L_f(t_i, t_i) = L(t_i, t_{i+1}) \\ &= \frac{1}{\Delta_i} \left[\frac{1}{B(t_i, t_{i+1})} - 1 \right] \\ &= \frac{e^{\Delta_i r(t_i)} - 1}{\Delta_i}. \end{aligned}$$

51

MONEY MARKET INSTRUMENT

- ▷ Chiamiamo **money market instrument** il titolo, il cui prezzo all'epoca t è indicato con $B(t)$, costruito a partire dai TCN di tutte le scadenze mediante la seguente strategia (detta **roll-over**):
- ★ in $t_0 = 0$, 1€ viene investito in TCN con scadenza t_1 , epoca in cui si riceve l'ammontare $B(t_1) = e^{\Delta_0 r(0)}$;
 - ★ ad ogni epoca successiva t_i , l'ammontare $B(t_i)$ viene investito in TCN con scadenza t_{i+1} , epoca in cui si riceve $B(t_i)e^{\Delta_i r(t_i)}$;



- ▷ Riassumendo, tale strumento finanziario è tale che il suo prezzo verifica la $B(0) = B(t_0) = 1$ e, per $t_i \in \mathbb{T}$,

$$B(t_i) = e^{\sum_{l=0}^{i-1} \Delta_l r(t_l)} = \prod_{l=0}^{i-1} \frac{1}{B(t_l, t_{l+1})} = \prod_{l=0}^{i-1} (1 + \Delta_l L(t_l)).$$

52

Tassi EURIBOR - $t_i=1/12/06$

$t_j - t_i$	$L(t_i, t_j)$
1s	3.33
2s	3.45
3s	3.52
1m	3.59
2m	3.62
3m	3.64
4m	3.68
5m	3.72
6m	3.74
7m	3.77
8m	3.79
9m	3.81
10m	3.83
11m	3.84
12m	3.85

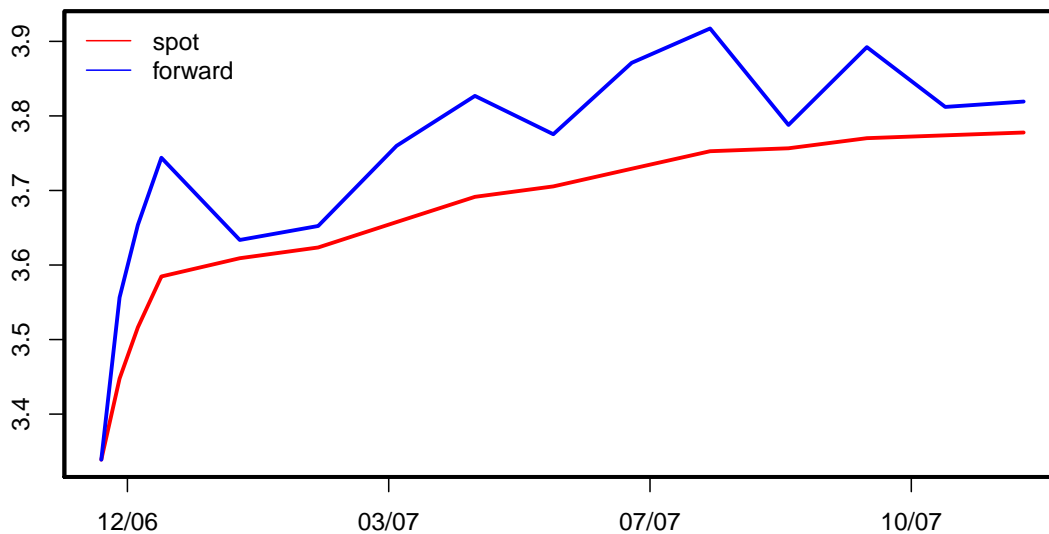
53

Tassi EURIBOR composti - $t_i=1/12/06$

$t_j - t_i$	$r(t_i, t_j)$	$f(t_i, t_{j-1})$
1s	3.33	3.33
2s	3.45	3.57
3s	3.52	3.65
1m	3.58	3.73
2m	3.61	3.63
3m	3.62	3.66
4m	3.66	3.76
5m	3.69	3.83
6m	3.71	3.77
7m	3.73	3.87
8m	3.74	3.84
9m	3.76	3.86
10m	3.77	3.89
11m	3.77	3.81
12m	3.78	3.82

54

TASSI A PRONTI E A TERMINE



55

SCADENZARIO CONTINUO

- ▷ Nel caso $\mathbb{T} = [0, T]$ oppure $\mathbb{T} = [0, +\infty[$, per $t, s \in \mathbb{T}$ con $t \leq s < \sup \mathbb{T}$ definiamo il **tasso forward istantaneo** in t per s come (assumendo che il limite esista)

$$f(t, s) = \lim_{u \downarrow s} f(t, s, u).$$

- ▷ Riesce

$$\begin{aligned} f(t, s) &= \lim_{u \downarrow s} \left(-\frac{1}{u-s} \log \frac{B(t, u)}{B(t, s)} \right) \\ &= -\lim_{u \downarrow s} \frac{\log B(t, u) - \log B(t, s)}{u-s} \\ &= -\frac{\partial}{\partial s} \log B(t, s) \\ &= -\frac{\frac{\partial}{\partial s} B(t, s)}{B(t, s)}. \end{aligned}$$

56

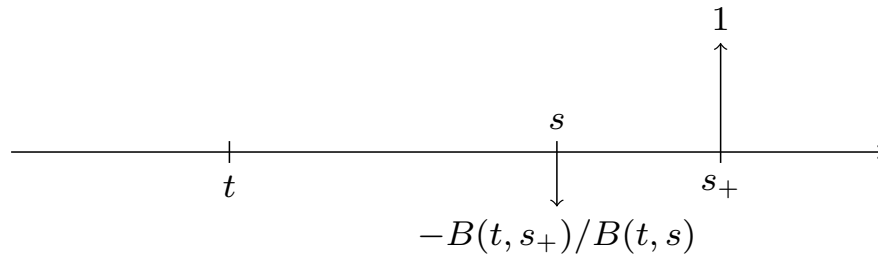
SCADENZARIO CONTINUO

▷ Interpretazione:

- ★ ‘ $f(t, s) = f(t, s, s_+)$ ’, cioè $f(t, s)$ è il tasso a termine istantaneo concordato in t , per un investimento che inizia in s e finisce un istante dopo (in s_+).
- ★ Infatti consideriamo l’operazione concordata in t , in cui acquisto un TCN che scade in $s_+ = s + \Delta s$ (con $\Delta s > 0$) e vendo $B(t, s_+)/B(t, s)$ TCN con scadenza s . Il costo in t di tale operazione è 0

$$\frac{B(t, s_+)}{B(t, s)} B(t, s) - B(t, s_+) = 0,$$

per cui la situazione è



57

TASSI FORWARD ISTANTANEI

▷ ★ L’interesse generato da tale operazione è

$$\begin{aligned} \text{Montante} - \text{Capitale iniziale} &= 1 - \frac{B(t, s_+)}{B(t, s)} \\ &\cong 1 - \frac{B(t, s) - f(t, s)B(t, s)\Delta s}{B(t, s)} \\ &= f(t, s)\Delta s. \end{aligned}$$

▷ La **struttura dei tassi a termine istantanei** all’epoca $t \in \mathbb{T}$ è la funzione

$$s \rightarrow f(t, s), \quad t, s \in \mathbb{T}, \quad t \leq s < \sup \mathbb{T}.$$

Il grafico di tale funzione è la **curva dei tassi a termine istantanei**.

58

TASSI FORWARD ISTANTANEI

▷ Dai tassi istantanei si ricavano tutte le altre quantità.

★ infatti riesce, per $t, s \in \mathbb{T}$ con $t < s$,

$$\begin{aligned} \int_t^s f(t, v)dv &= - \int_t^s \frac{\partial}{\partial v} \log B(t, v)dv \\ &= -[\log B(t, s) - \log B(t, t)] \\ &= -\log B(t, s), \end{aligned}$$

da cui

$$B(t, s) = e^{-\int_t^s f(t, v)dv}.$$

★ Noti i prezzi si possono trovare anche gli altri tassi in funzione di quelli istantanei.

59

TASSI FORWARD ISTANTANEI

▷ ★ Si trova infatti che per $t, s \in \mathbb{T}$ con $t < s$

$$\begin{aligned} r(t, s) &= -\frac{1}{s-t} \log B(t, s) \\ &= \frac{1}{s-t} \int_t^s f(t, v)dv, \end{aligned}$$

★ più in generale, per $t, s, u \in \mathbb{T}$ con $t \leq s < u$,

$$\begin{aligned} f(t, s, u) &= \frac{u-t}{u-s} r(t, u) - \frac{s-t}{u-s} r(t, s) \\ &= \frac{1}{u-s} \left(\int_t^u f(t, v)dv - \int_t^s f(t, v)dv \right) \\ &= \frac{1}{u-s} \int_s^u f(t, v)dv. \end{aligned}$$

★ Quindi i tassi $r(t, s)$ e $f(t, s, u)$ sono le **medie** dei tassi istantanei sui corrispondenti periodi di investimento.

60

TASSO A PRONTI ISTANTANEO

- ▷ Possiamo ancora definire, per $t \in \mathbb{T}$ con $t < \sup \mathbb{T}$, il **tasso a pronti istantaneo** come

$$\begin{aligned} r(t) &= f(t, t) \\ &= \lim_{s \downarrow t} r(t, s) \\ &= - \left[\frac{\partial}{\partial s} \log B(t, s) \right]_{s=t} \\ &= - \left[\frac{\partial}{\partial s} B(t, s) \right]_{s=t} \end{aligned}$$

quindi è il tasso che remunera un investimento che inizia in t e finisce immediatamente dopo (in ' $t_+ = t + \Delta t$ ').

61

TASSO SEMPLICI ISTANTANEI

- ▷ Se partiamo dai tassi semplici e definiamo in maniera analoga a prima i tassi istantanei

$$L_f(t, s) = \lim_{u \downarrow s} L_f(t, s, u), \quad L(t) = L_f(t, t),$$

si trova

$$\begin{aligned} L_f(t, s) &= \lim_{u \downarrow s} L_f(t, s, u) \\ &= \lim_{u \downarrow s} \frac{B(t, s) - B(t, u)}{(u - s)B(t, u)} \\ &= - \frac{\frac{\partial}{\partial s} B(t, s)}{B(t, s)} \\ &= f(t, s) \end{aligned}$$

e quindi anche $L(t) = r(t)$. I tassi istantanei sono gli stessi in regime di interesse composto e semplice.

62

MONEY MARKET INSTRUMENT

- ▷ Possiamo infine definire il **money market instrument** o **conto bancario** come il titolo (supposto esistente), il cui prezzo all'epoca t si indica con $B(t)$, costruito a partire dai TCN relativi a tutte le scadenze:
- ★ si parte con 1€ all'epoca 0;
 - ★ in ogni istante t il valore di questo titolo viene investito in TCN che scadono immediatamente dopo, e così via. Formalmente, il prezzo del titolo verifica

$$\begin{cases} B(0) = 1 \\ dB(t) = B(t)r(t)dt, \end{cases}$$

- ★ quindi si trova

$$B(t) = e^{\int_0^t r(v)dv}.$$

63

UN MODELLO PARAMETRICO: NELSON-SIEGEL (1987)

- ▷ $\mathbb{T} = [0, \infty[$.
- ★ Fissiamo $t \geq 0$; il modello specifica la forma dei tassi forward istantanei all'epoca t per ogni scadenza successiva:

$$f(t, s) = \beta_0 + \beta_1 e^{-(s-t)/a} + \beta_2 \frac{s-t}{a} e^{-(s-t)/a},$$

con $\beta_0, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ e $a > 0$. Il modello dipende da 4 parametri.

- ★ $f(t, s)$ dipende solo dall'ampiezza del periodo $s - t$. Nel seguito possiamo allora considerare $t = 0$:

$$f(0, t) = \beta_0 + \beta_1 e^{-t/a} + \beta_2 \frac{t}{a} e^{-t/a}.$$

- ▷ Questo modello e sue varianti vengono usato frequentemente per descrivere e/o stimare la curva dei tassi.
- ▷ https://www.ecb.europa.eu/stats/financial_markets_and_interest_rates/euro_area_yield_curves/html/index.en.html

64

... NELSON-SIEGEL

▷ Deriviamo le altre quantità:

★ i tassi a pronti sono dati da

$$\begin{aligned} r(0, t) &= \frac{1}{t} \int_0^t f(0, u) du \\ &= \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{1 - e^{-t/a}}{t/a} - \beta_2 e^{-t/a}. \end{aligned}$$

★ Più in generale, i tassi forward per l'intervallo $[s, u]$ sono

$$\begin{aligned} f(0, s, u) &= \frac{1}{u - s} \int_s^u f(0, v) dv \\ &= \beta_0 + \frac{\beta_1 + \beta_2}{(u - s)/a} (e^{-s/a} - e^{-u/a}) \\ &\quad + \frac{\beta_2}{u - s} (se^{-s/a} - ue^{-u/a}). \end{aligned}$$

65

... NELSON-SIEGEL

▷ ★ Infine, i prezzi dei TCN (la 'discount function') sono

$$\begin{aligned} B(0, t) &= e^{-t r(0, t)} \\ &= e^{-t\beta_0 - (\beta_1 + \beta_2)a(1 - e^{-t/a}) + \beta_2 te^{-t/a}} \end{aligned}$$

▷ Osserviamo che, fissato a , i tassi (a pronti o a termine) dipendono da β_0 , β_1 , β_2 in maniera lineare \Rightarrow regressione lineare può essere usata per stimare i parametri (con a fissato).

▷ Interpretazione dei parametri:

★ $f(0, t)$ è somma di tre componenti:

$$f(0, t) = c_1(t) + c_2(t) + c_3(t),$$

con

$$c_1(t) = \beta_0, \quad c_2(t) = \beta_1 e^{-t/a}, \quad c_3(t) = \beta_2 \frac{t}{a} e^{-t/a}.$$

66

... NELSON-SIEGEL

▷ Riesce

- ★ c_1 è costante: $\lim_{t \rightarrow 0} c_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} c_1(t) = \beta_0$;
- ★ c_2 è monotona decrescente se $\beta_1 > 0$, crescente se $\beta_1 < 0$, (costante se $\beta_1 = 0$).
Inoltre $\lim_{t \rightarrow 0} c_2(t) = c_2(0) = \beta_1$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} c_2(t) = 0$.
- ★ Se $\beta_2 = 0$, $c_3(t)$ è costante. Se $\beta_2 > 0$, c_3 cresce fino a $t^* = a$ e poi decresce (t^* è punto di massimo assoluto). Se invece $\beta_2 < 0$, c_3 decresce fino a t^* e poi è crescente (t^* punto di minimo assoluto). Inoltre riesce $\lim_{t \rightarrow 0} c_3(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} c_3(t) = 0$.

▷ Di conseguenza, si può interpretare

- ★ c_1 come componente di **lungo termine** (è l'unica che ha limite non nullo in ∞),
- ★ c_2 come componente di **breve termine** (il limite in 0 è non nullo)
- ★ e c_3 come componente di **medio periodo** (ha limite 0 sia in 0 che in ∞).

67

... NELSON-SIEGEL

▷ Osserviamo ancora che

- ★ Il tasso istantaneo per una scadenza 'infinita' è

$$f(0, \infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(0, t) = \beta_0.$$

- ★ Il tasso istantaneo a pronti ('spot rate') è

$$r(0) = f(0, 0) = r(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(0, t) = \beta_0 + \beta_1.$$

- ★ Il parametro a è un parametro di posizione: non cambia il 'tipo di andamento' della curva dei tassi, ma la 'comprime' (se a piccolo) o 'allunga' (se a grande) infatti, è $f(0, t; a) = f(0, kt; ka)$.

▷ Per $r(0, t)$ si possono fare le stesse osservazioni che per $f(0, t)$. In particolare $r(0, \infty) = \beta_0$, $r(0, 0) = r(0) = \beta_0 + \beta_1$, e le forme di $s \rightarrow r(t, s)$ possono essere costanti, monotone o campanulari.▷ In **R**: pacchetti **fBonds**, **NMOF**, **YieldCurve**, **termstrc**

68

... NELSON-SIEGEL

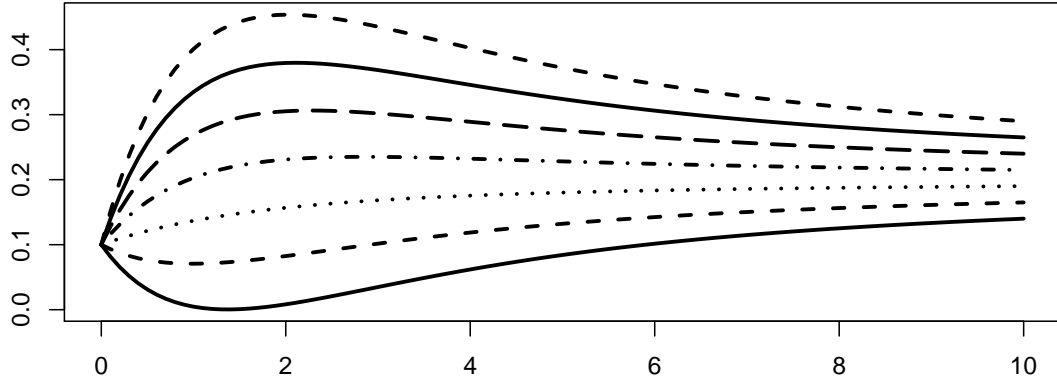


FIGURA: $r(0, t)$: $a = 1$, $\beta_0 = 0.2$, $\beta_1 = -0.1$,
 $\beta_2 = -0.5, -0.25, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$

... NELSON-SIEGEL

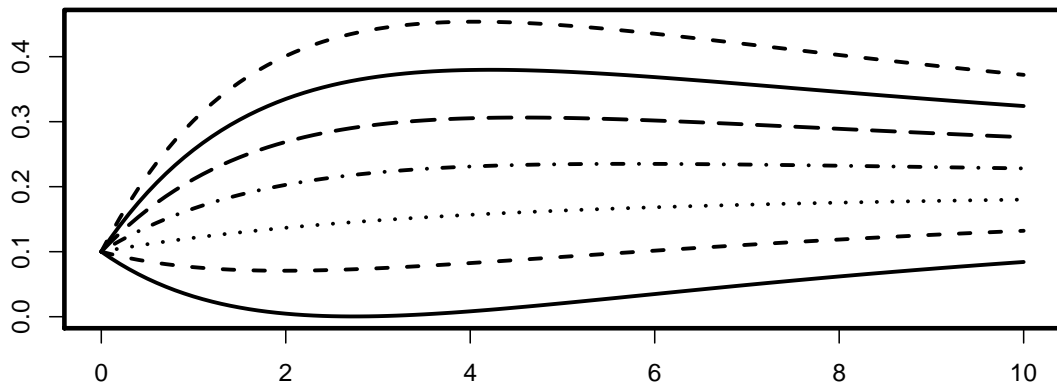


FIGURA: $r(0, t)$: $a = 2$, $\beta_0 = 0.2$, $\beta_1 = -0.1$,
 $\beta_2 = -0.5, -0.25, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$

... NELSON-SIEGEL

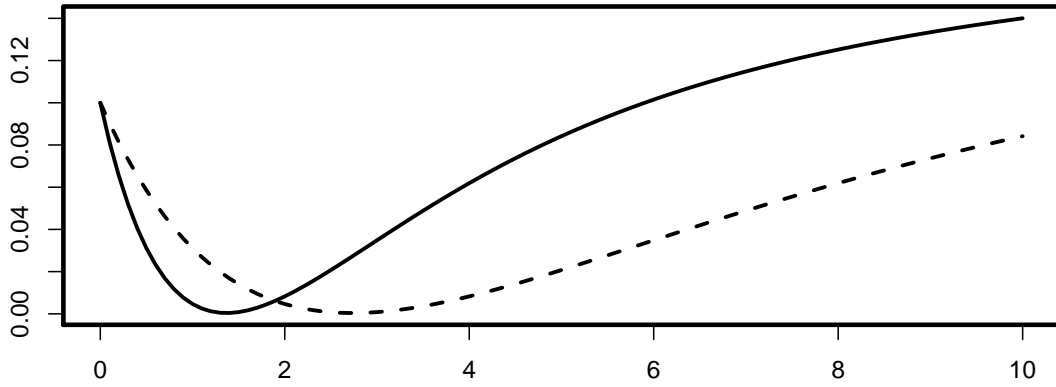


FIGURA: $r(0,t)$: $a = 1, 2, \beta_0 = 0.2, \beta_1 = -0.1, \beta_2 = -0.5$

71

... NELSON-SIEGEL

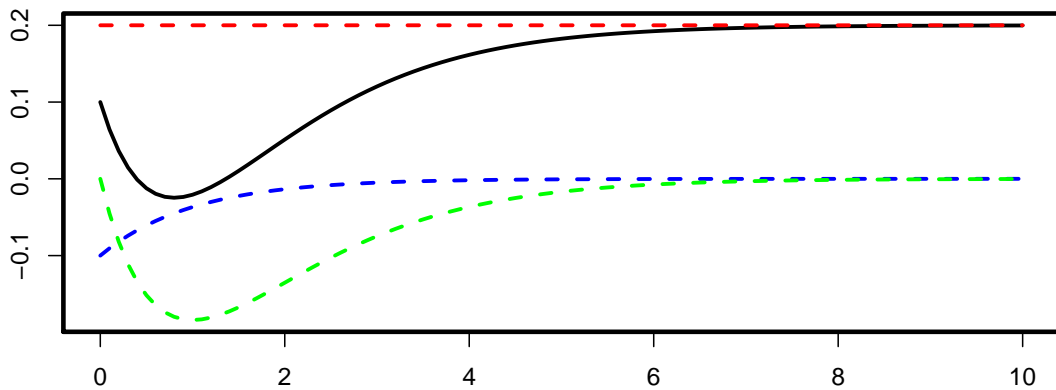


FIGURA: $r(0,t)$: $a = 1, 2, \beta_0 = 0.2, \beta_1 = -0.1, \beta_2 = -0.5$

72

PROPRIETÀ EMPIRICHE DELLA CURVA DEI TASSI

- ▷ Le curve dei tassi che si osservano in pratica rientrano fra le seguenti forme:
 - ★ **piatta** (flat);
 - ★ **crescente** (normale);
 - ★ **decescente** (invertita);
 - ★ **campanulare** (humped);
 - ★ **a S** o a cucchiaio.
- ▷ La famiglia di curve dei tassi del tipo Nelson-Siegel cattura le prime 4 forme.
- ▷ Al fine di riprodurre anche l'ultima forma, sono state proposte alcune estensioni di Nelson-Siegel, in particolare il modello di Svensson:

$$f(0, t) = \beta_0 + \beta_1 e^{-t/a} + \beta_2 \frac{t}{a} e^{-t/a} + \beta_3 \frac{t}{a_1} e^{-t/a_1}.$$

73

VALORE DI UN FLUSSO DI CASSA

- ▷ Data la struttura per scadenza dei tassi ad un'epoca $t \in \mathbb{T}$, deriviamo il prezzo di un titolo che paga flussi pari a $I_h \geq 0$ in t_h , $h = 1, \dots, n$, con $t < t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Indicato con P tale prezzo, deve essere

$$P = \sum_{h=1}^n I_h B(t, t_h) = \sum_{h=1}^n I_h e^{-r(t, t_h)(t_h - t)}.$$

- ▷ Infatti la strategia in cui acquisto in t la quantità I_h di TCN con scadenza t_h ($h = 1, \dots, n$) produce gli stessi flussi di cassa del titolo in questione, quindi per la legge del prezzo unico il prezzo del titolo deve essere uguale al valore della strategia.
- ▷ Il valore del flusso dipende quindi **inversamente** da un certo numero di punti sulla curva dei tassi (**'fattori di rischio'**).

74

YIELD TO MATURITY

- ▷ L'**Yield to Maturity** (YTM, Redemption Yield, Rendimento a Scadenza) è il **tasso interno di rendimento** (supposto esistente) r dell'operazione in cui si paga P in t e si riceve la sequenza di flussi I_h in t_h , $h = 1, \dots, n$:

$$P = \sum_{h=1}^n I_h e^{-r(t, t_h)(t_h - t)} = \sum_{h=1}^n I_h e^{-r(t_h - t)}.$$

- ▷ Si tratta quindi di un valore che sintetizza (una 'media') i tassi $r(t, t_h)$, $h = 1, \dots, n$ e quindi verifica

$$\min_h r(t, t_h) \leq r \leq \max_h r(t, t_h).$$

- ▷ Per un TCN che scade in $t_n = s$, riesce $r = r(t, s)$.

75

... YIELD TO MATURITY

- ▷ Ipotesi sottostante l'YTM è che
- ★ si detenga il titolo fino a scadenza.
 - ★ si possa reinvestire al tasso r fino all'ultima epoca ogni cash-flow ricevuto.

Infatti, dalla definizione di YTM si deduce che

$$P e^{r(t_n - t)} = \sum_{h=1}^n I_h e^{r(t_n - t_h)}.$$

- ▷ Difetto del YTM è quindi l'assumere una **struttura per scadenza piatta** dei tassi e trascurare di conseguenza il rischio di reinvestimento.
- ▷ Tuttavia l'YTM è comunemente usato come misura del rendimento di un'obbligazione.
- ▷ Se si ragiona in termini di tassi invece che di intensità, indicato con i il tasso interno di rendimento, la relazione è $i = e^r - 1$.

76

... COUPON BOND

- ▷ Nel caso di un coupon bond, sia $I_h = I$ per $h = 1, \dots, n - 1$ e $I_n = I + C$, dove I è la cedola e C il nominale; inoltre sia $t_h = t + h\Delta$ per $h = 1, \dots, n$.
- ▷ Il coupon bond **quota alla pari** (sotto, sopra) se e solo se l'YTM (tasso su base periodale) $i_\Delta = (1 + i)^\Delta - 1$ coincide (è maggiore, minore) con il tasso cedolare I/C .
 - ★ Riesce infatti, ponendo $v = (1 + i)^{-\Delta} = (1 + i_\Delta)^{-1}$,

$$\begin{aligned} P &= I \sum_{h=1}^n (1 + i)^{-h\Delta} + C(1 + i)^{-n\Delta} \\ &= Iv \frac{1 - v^n}{1 - v} + Cv^n \\ &= (1 - v^n) \left(I \frac{v}{1 - v} - C \right) + C. \end{aligned}$$

- ★ Quindi $P = C$ se e solo se $I/C = (1 - v)/v$ e quindi se e solo se $i_\Delta = I/C$.

- ▷ Ad esempio, un bond con cedole annuali pari a 3%, nominale 100 e scadenza 10 anni quota alla pari (sotto, sopra) se e solo se l'YTM è $i = 3\%$ ($>$, $<$) ($r = 2.96\%$).

77

PAR RATE

- ▷ Si chiama **par rate** (par yield, tasso di parità) relativo ad una certa scadenza t_n e frequenza Δ il tasso nominale c tale che la corrispondente obbligazione con nominale $C = 100$, che paga cedole $I = c\Delta 100$ in $t_h = t + h\Delta$, quota alla pari.
- ▷ In altri termini il tasso cedolare $c\Delta$ è il YTM su base periodale dell'obbligazione.
- ▷ Data la struttura per scadenza dei tassi, deve essere

$$100 = I \sum_{i=1}^n B(t, t_i) + 100B(t, t_n),$$

da cui si ricava

$$c \equiv c(t, n) = \frac{1 - B(t, t_n)}{\Delta \sum_{h=1}^n B(t, t_h)}.$$

- ▷ Per $t \in \mathbb{T}$ fissato, la **struttura per scadenza dei par rate** è la funzione

$$n \rightarrow c(t, n); \quad n \geq 1.$$

Il suo grafico è la curva dei par rates.

78

PAR RATE

▷ Riesce (ponendo $t_0 = t$)

★

$$\begin{aligned} c(t, n) &= \frac{1 - B(t, t_n)}{\Delta \sum_{h=1}^n B(t, t_h)} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{B(t, t_j)}{\sum_{h=1}^n B(t, t_h)} \frac{B(t, t_{j-1}) - B(t, t_j)}{\Delta B(t, t_j)} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{B(t, t_j)}{\sum_{h=1}^n B(t, t_h)} L_f(t, t_{j-1}, t_j). \end{aligned}$$

★ Quindi il par rate è una media dei tassi a termine semplici; è allora

$$\min_i L_f(t, t_{i-1}, t_i) \leq c(t, n) \leq \max_i L_f(t, t_{i-1}, t_i).$$

★ Inoltre, si ha

$$c(t, n+1) = \alpha c(t, n) + (1-\alpha) L_f(t, t_n, t_{n+1}), \quad \alpha = \frac{\sum_{h=1}^n B(t, t_h)}{\sum_{h=1}^{n+1} B(t, t_h)},$$

quindi se la struttura per scadenza dei par rates è crescente (decescente) allora sono dominati dai (dominano i) tassi a termine corrispondenti.

79

Gestione del Rischio Finanziario

... YIELD TO MATURITY

▷ È comune ragionare in termini di prezzo di un titolo come funzione (decescente) dell'YTM:

$$P \equiv P(r) = \sum_{h=1}^n I_h e^{-r(t_h-t)}.$$

▷ Come si comporta P al variare di r ?

★

$$P'(r) = - \sum_{h=1}^n I_h (t_h - t) e^{-r(t_h-t)} < 0$$

$$P''(r) = \sum_{h=1}^n I_h (t_h - t)^2 e^{-r(t_h-t)} > 0$$

★ Quindi P è funzione **decescente convessa** dell'YTM. Al crescere del YTM il prezzo decresce con tassi marginali decrescenti

★ Essendo P continua e $\lim_{r \rightarrow \infty} P(r) = 0$ e $P(0) = \sum_h I_h$ si deduce che l'YTM esiste unico se $0 < P < \sum_h I_h$.

... YIELD TO MATURITY

- ▷ ★ La convessità implica che una variazione positiva dell'YTM comporta una variazione (negativa) del prezzo in valore assoluto minore della variazione (positiva) corrispondente ad un uguale variazione di segno negativo dell'YTM:

$$P(r) - P(r + \Delta r) < P(r - \Delta r) - P(r).$$

- ★ Dividendo per $P(r)$, lo stesso risultato si applica alle variazioni percentuali (variazioni/prezzo):

$$\frac{P(r) - P(r + \Delta r)}{P(r)} < \frac{P(r - \Delta r) - P(r)}{P(r)}.$$

81

DURATION (MACAULAY, 1938)

- ▷ Per calcolare approssimativamente l'entità delle variazioni assolute e percentuali del prezzo si introducono le seguenti quantità: la DOLLAR DURATION, $\$D$ e la DURATION D , definite da

$$\$D = -P'(r), \quad D = -\frac{P'(r)}{P(r)} = -(\log P(r))'$$

- ▷ La prima **approssima** la **variazione** di P , la seconda la sua **variazione percentuale**, quando il YTM varia di una quantità 'piccola' Δr :

$$\Delta P(r) = P(r + \Delta r) - P(r) \cong P'(r)\Delta r = -\$D \Delta r,$$

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} = \frac{P(r + \Delta r) - P(r)}{P(r)} \cong \frac{P'(r)\Delta r}{P(r)} = -D \Delta r$$

82

... DURATION

- ▷ La Duration può essere interpretata come **media temporale**:

$$\begin{aligned} D &= -\frac{P'(r)}{P(r)} \\ &= \frac{\sum_{h=1}^n I_h(t_h - t)e^{-r(t_h-t)}}{P(r)} \\ &= \sum_{h=1}^n w_h(t_h - t), \end{aligned}$$

con $w_h = I_h e^{-r(t_h-t)} / P(r)$.

- ▷ Si tratta quindi della media delle vite a scadenza dei flussi pesate con i flussi scontati usando l'YTM.
- ▷ Riesce quindi

$$t_1 - t \leq D \leq t_n - t,$$

e l'uguaglianza vale se e solo se c'è una sola scadenza. Quindi per un TCN la duration coincide con la vita a scadenza.

83

CONVEXITY

- ▷ L'approssimazione 'del primo ordine' che si ottiene con la duration può essere migliorata considerando un termine di 'secondo ordine';
- ★ questo corrisponde ad approssimare con un polinomio di secondo grado (parabola) piuttosto che di primo grado (retta).
 - ★ Si ha allora

$$\Delta P(r) \cong -\$D \Delta r + \frac{1}{2} \$Conv (\Delta r)^2,$$

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \cong -D \Delta r + \frac{1}{2} Conv (\Delta r)^2.$$

- ★ $Conv = P''(r)/P(r)$ è la CONVEXITY e $\$Conv = P''(r)$ è la DOLLAR CONVEXITY.

- ▷ La convexity è il momento secondo (ponderato) delle vite a scadenza:

$$Conv = \sum_{h=1}^n w_h(t_h - t)^2.$$

84

... DURATION

- ▷ Se ragioniamo in termini di tasso i piuttosto che di intensità r , essendo il legame $r = \log(1 + i)$, possiamo introdurre la funzione

$$\bar{P}(i) = P(\log(1 + i)) = \sum_{h=1}^n I_h(1 + i)^{-(t_h - t)}.$$

- ▷ Riesce allora

★

$$\frac{\bar{P}'(i)}{\bar{P}(i)} = \frac{P'(\log(1 + i))}{1 + i} = -\frac{\$D}{1 + i}, \quad \frac{\bar{P}'(i)}{\bar{P}(i)} = -\frac{D}{1 + i} = -\text{MD},$$

★ dove $\text{MD} = \frac{D}{1+i}$ è la DURATION MODIFICATA.

★ Al fine di approssimare una variazione percentuale piccola Δi nel tasso, si utilizza

$$\frac{\Delta \bar{P}(i)}{\bar{P}(i)} \cong -\text{MD} \Delta i$$

- ▷ Al secondo ordine: $\bar{P}''(i)/\bar{P}(i) = (\text{Conv} + D)/(1 + i)^2$.

85

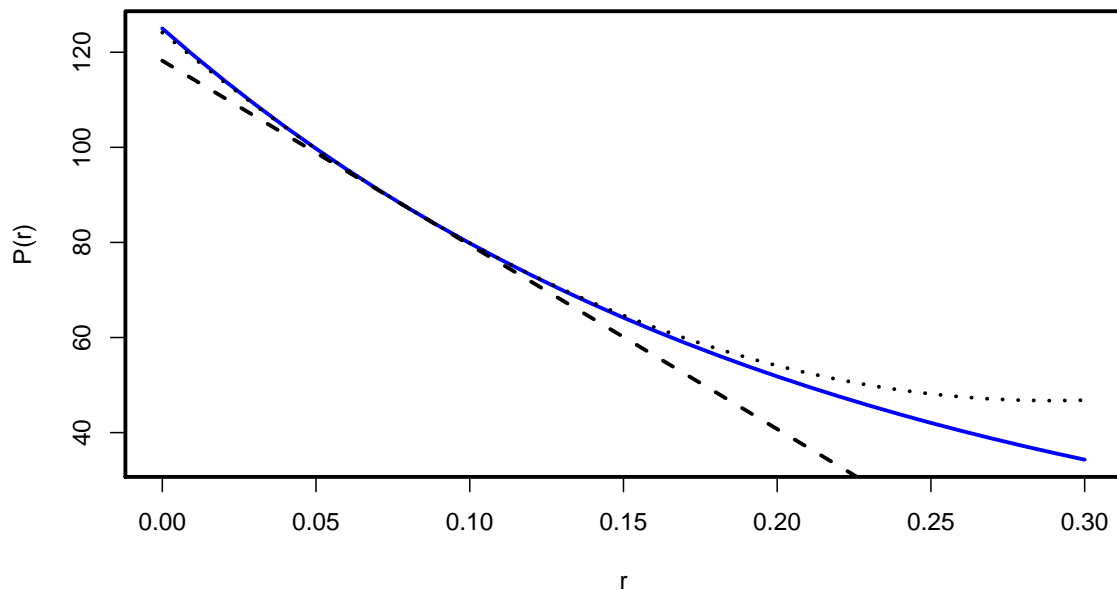
... DURATION

- ▷ Esempio: coupon bond, cedole semestrali, scadenza 5 anni, cedole 2.5%, $P = 87.23$, YTM $r=8\%$ ($i=8.33\%$, $i_2=4.08\%$), duration e convexity $D = 4.44$, $\text{Conv} = 21.23$.

Δr (b.p.)	ΔP	$\$D$	$\$D \& \$Conv$	$\Delta P/P$ (%)	D	$D \& Conv$
-400	17.08	15.49	16.98	19.58	17.76	19.46
-300	12.50	11.62	12.45	14.33	13.32	14.28
-200	8.13	7.75	8.12	9.32	8.88	9.31
-100	3.97	3.87	3.97	4.55	4.44	4.55
-80	3.16	3.10	3.16	3.62	3.55	3.62
-60	2.36	2.32	2.36	2.70	2.66	2.70
-40	1.56	1.55	1.56	1.79	1.78	1.79
-20	0.78	0.77	0.78	0.89	0.89	0.89
20	-0.77	-0.77	-0.77	-0.88	-0.89	-0.88
40	-1.53	-1.55	-1.53	-1.76	-1.78	-1.76
60	-2.29	-2.32	-2.29	-2.63	-2.66	-2.63
80	-3.04	-3.10	-3.04	-3.49	-3.55	-3.48
100	-3.78	-3.87	-3.78	-4.34	-4.44	-4.33
200	-7.39	-7.75	-7.38	-8.47	-8.88	-8.46
300	-10.83	-11.62	-10.79	-12.41	-13.32	-12.37
400	-14.11	-15.49	-14.01	-16.17	-17.76	-16.07

86

... DURATION



87

DURATION DI UN COUPON BOND

- ▷ Nel caso specifico di un coupon bond, sia $I_h = I$ per $h = 1, \dots, n - 1$ e $I_n = I + C$, dove I è la cedola e C il nominale; inoltre sia $t_h = t + h$ per $h = 1, \dots, n$ (senza perdita di generalità abbiamo preso $\Delta = 1$, cioè cedole annuali).
- ▷ La duration è funzione decrescente del tasso cedolare I/C : al crescere della cedola diminuisce il peso del rimborso a scadenza

$$\frac{\partial D}{\partial(I/C)} < 0.$$

- ▷ La duration è funzione decrescente del tasso di rendimento

$$\frac{\partial D}{\partial r} < 0.$$

88

... DURATION DI UN COUPON BOND

- ▷ All'aumentare del numero di cedole, il comportamento della duration non è sempre monotono: è crescente se $i \leq \frac{I}{C}$ (bond quota alla pari o sopra la pari), mentre è prima crescente poi decrescente se $i > \frac{I}{C}$ (bond quota sotto la pari). Infine, indicata con D_n la duration per il titolo con n cedole, D_n converge verso un valore limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D_n = \frac{1+i}{i},$$

che è la duration di una rendita perpetua.

89

... DURATION DI UN COUPON BOND

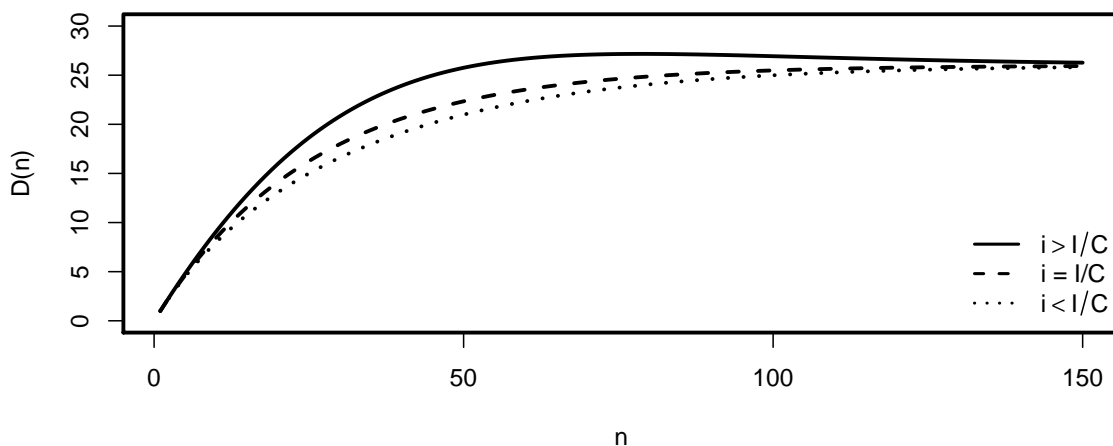


FIGURA: $C = 100$, $i = 4\%$, $I = 2, 4, 6$.

90