

Zeri di funzione

S. Maset
Dipartimento di Matematica e Geoscienze
Università di Trieste
maset@units.it

June 15, 2018

1 Introduzione

Da qui in avanti nel corso, non ci occuperemo più degli errori di arrotondamento in quanto supporremo (idealmente) di poter trattare ogni numero reale nella sua interezza con tutte le sue infinite cifre.

La nostra attenzione sarà ora riservata a quel tipo di errori di discretizzazione che sorgono dal dover trattare, comunque, solo con oggetti matematici descrivibili da un numero finito di numeri reali.

Si consideri il problema di risolvere equazioni del tipo

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

dove f è una funzione reale di variabile reale, cioè $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Le soluzioni

x di (1) sono dette *zeri* della funzione f o *radici* dell'equazione (1).

Si osservi che un'equazione

$$g(x) = h(x)$$

è ricondotta alla forma (1) scrivendo

$$f(x) = g(x) - h(x) = 0.$$

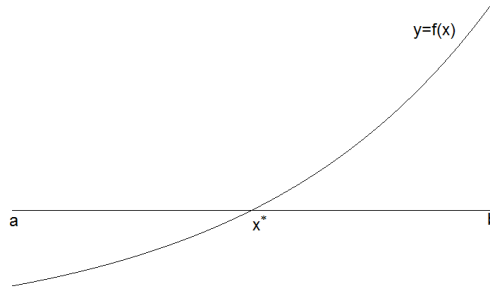
Studieremo qui alcuni metodi numerici per la risoluzione di (1), da utilizzare nel caso in cui, come accade nella stragrande maggioranza dei casi, (1) non sia risolvibile elementarmente.

2 Intervalli di localizzazione di uno zero

Nel seguito si supponrà noto un intervallo $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, tale che:

- (i) f è definita e continua in $[a, b]$;

- (ii) $f(a)$ e $f(b)$ sono non nulli e di segno opposto;
- (iii) f è strettamente crescente o strettamente decrescente in $[a, b]$.

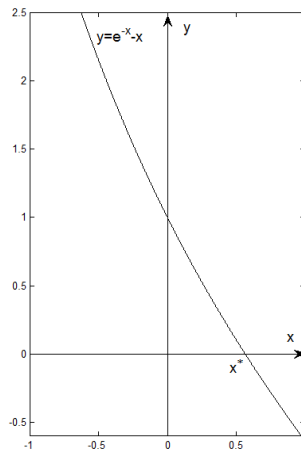


I punti (i) e (ii) permettono di concludere che esiste uno zero di f in (a, b) (per il teorema di Bolzano di Analisi I) e il punto (iii) che questo zero è unico.

Denotiamo con x^* tale unico zero di f . L'intervallo $[a, b]$ è detto un *intervallo di localizzazione* dello zero x^* .

Come esempio consideriamo la funzione

$$f(x) = e^{-x} - x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$



Proviamo che f ha un unico zero e determiniamo un suo intervallo di localizzazione.

Per tale funzione

$$f(x) = e^{-x} - x, \quad x \in \mathbb{R},$$

si ha

$$f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Quindi la funzione f è strettamente decrescente su tutto il dominio \mathbb{R} .

Dal fatto che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty,$$

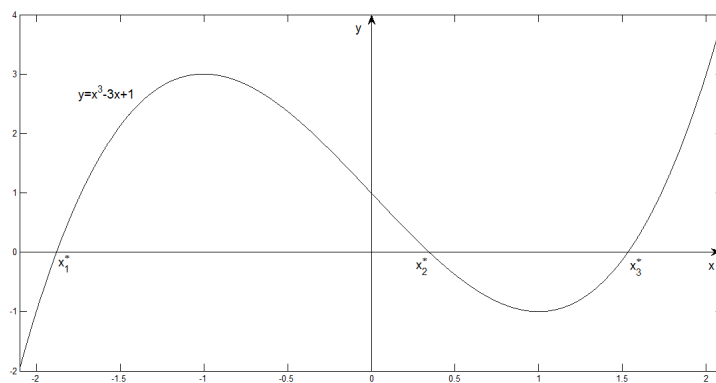
segue allora che f ha un unico zero. Poichè

$$f(0) = 1 > 0 \text{ e } f(1) = e^{-1} - 1 < 0,$$

un suo intervallo di localizzazione è $[0, 1]$.

Come altro esempio consideriamo la funzione

$$f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$



Proviamo che f ha tre zeri e determiniamo un intervallo di localizzazione per ciascuno di essi.

Per tale funzione

$$f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

si ha

$$f'(x) = 3(x^2 - 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Quindi la funzione f è strettamente crescente in $(-\infty, -1]$, strettamente decrescente in $[-1, 1]$ e strettamente crescente in $[1, +\infty)$.

Da

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad f(-1) = 3, \quad f(1) = -1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

ne viene allora che f ha tre zeri.

Avendosi

$$f(-2) = -1, \quad f(-1) = 3, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = -1 \text{ e } f(2) = 3,$$

i tre zeri hanno gli intervalli di localizzazione $[-2, -1]$, $[0, 1]$ e $[1, 2]$.

Esercizio. Provare che l'equazione

$$\sin x = \frac{1}{2}x$$

ha un'unica radice nell'intervallo $(0, \pi)$. Determinare un intervallo di localizzazione per essa.

Esercizio. Provare che l'equazione

$$x^3 + x + 1 = 0$$

ha un'unica radice. Determinare un intervallo di localizzazione di ampiezza minore o uguale a $\frac{1}{2}$ per essa.

Dato un intervallo di localizzazione di uno zero x^* di una funzione f , presenteremo ora due metodi numerici per il calcolo di x^* :

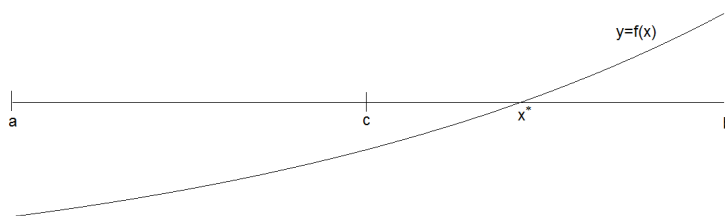
- il *metodo di bisezione* o *metodo dicotomico*;
- il *metodo di Newton* o *metodo delle tangenti*.

Entrambi i metodi non calcolano x^* in modo esatto, ma forniscono solo una sua approssimazione. Tuttavia, tale approssimazione può essere resa buona quanto si vuole.

3 Il metodo di bisezione

Sia $[a, b]$ un intervallo di localizzazione dello zero x^* di f . Consideriamo il punto medio

$$c = \frac{a + b}{2}$$



dell'intervallo $[a, b]$ e calcoliamo il valore $f(c)$.

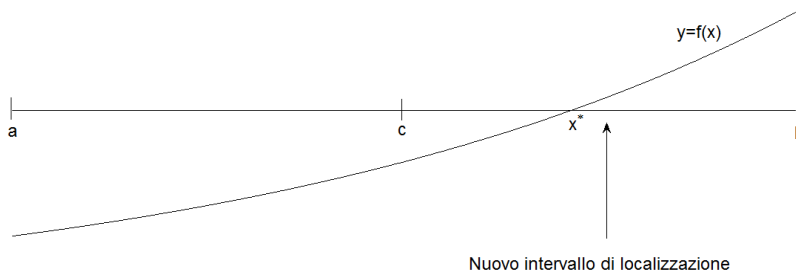
Se $f(c) = 0$, allora c è lo zero x^* .

Se $f(c) \neq 0$, allora una e una sola tra le coppie $(f(a), f(c))$ e $(f(c), f(b))$ ha le componenti di segno opposto.

Infatti, se entrambe le coppie $(f(a), f(c))$ e $(f(c), f(b))$ avessero le componenti dello stesso segno, oppure se entrambe avessero le componenti di segno opposto, allora $f(a)$ e $f(b)$ avrebbero lo stesso segno, in contraddizione con l'assunzione (ii) precedente.

Se $f(c)$ e $f(b)$ hanno segno opposto, allora c'è uno zero di f in (c, b) , essendo f continua in $[c, b] \subseteq [a, b]$. Poichè x^* è l'unico zero di f in (a, b) , si conclude che x^* si trova nell'intervallo (c, b) . Quindi $[c, b]$ è un nuovo intervallo di localizzazione di x^* .

Analogamente, se $f(a)$ e $f(c)$ hanno segno opposto, allora x^* si trova nell'intervallo (a, c) e $[a, c]$ è un nuovo intervallo di localizzazione di x^* .



Quindi, tramite la valutazione del segno di $f(c)$ siamo grado di dimezzare l'ampiezza dell'intervallo di localizzazione dello zero.

Riapplicando il procedimento al nuovo intervallo, si dimezza di nuovo l'ampiezza dell'intervallo di localizzazione. Si può continuare così fino ad ottenere un intervallo di localizzazione di ampiezza arbitrariamente piccola.

Questo è il cosiddetto *metodo di bisezione* per il calcolo degli zeri di una funzione. Esso è anche detto *metodo dicotomico*, in quanto effettua una dicotomia dell'intervallo, cioè una divisione in due parti disgiunte, per meglio localizzare lo zero.

Dato un intervallo di localizzazione $[a, b]$ per lo zero x^* , si prende come approssimazione \widetilde{x}^* di x^* il punto medio di $[a, b]$.

Infatti, se si cerca un'approssimazione $\widetilde{x}^* \in [a, b]$ di x^* che minimizzi

$$\sup_{x^* \in (a, b)} |\widetilde{x}^* - x^*| = \max\{\widetilde{x}^* - a, b - \widetilde{x}^*\},$$

vale a dire che minimizzi l'estremo superiore delle possibili distanze tra \widetilde{x}^* e x^* al variare di x^* in (a, b) (ricordare che non è noto dove stia x^* in (a, b)), si deve prendere \widetilde{x}^* uguale al punto medio : si ha, per $\widetilde{x}^* \in [a, b]$,

$$\max\{\widetilde{x}^* - a, b - \widetilde{x}^*\} \begin{cases} = \frac{b-a}{2} & \text{se } \widetilde{x}^* = \frac{a+b}{2} \\ > \frac{b-a}{2} & \text{se } \widetilde{x}^* \neq \frac{a+b}{2}. \end{cases}$$

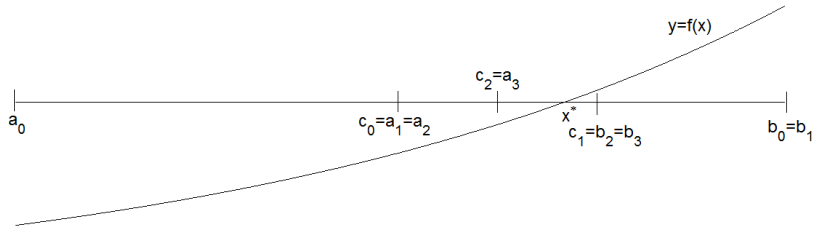
Sia ora

$$[a_0, b_0], [a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots$$

la successione degli intervalli di localizzazione determinati dal metodo di bisezione e sia

$$c_0, c_1, c_2, \dots$$

la successione dei punti medi di tali intervalli, cioè la successione delle approssimazioni di x^* .



Come illustrato in figura, la successione delle distanze $|c_0 - x^*|, |c_1 - x^*|, |c_2 - x^*|, \dots$ può non essere monotona decrescente.

Poichè

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\},$$

si ottiene

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{b - a}{2^n}, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Pertanto, per ogni $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, l'errore (assoluto) $c_n - x^*$ dell'approssimazione c_n di x^* soddisfa

$$|c_n - x^*| < e_n,$$

dove

$$e_n := \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b - a}{2^{n+1}}$$

è l'estremo superiore delle possibili distanze tra c_n e x^* al variare di x^* in (a_n, b_n) .

A priori, è possibile stabilire dopo quante iterazioni del metodo di bisezione si avrà

$$|c_n - x^*| \leq \text{TOL}, \quad (3)$$

dove TOL è un'assegnata tolleranza sul modulo dell'errore di approssimazione.

Da

$$|c_n - x^*| < e_n \quad \text{e} \quad e_n = \frac{b - a}{2^{n+1}}$$

segue che vale (3) se il numero di iterazioni n soddisfa

$$\frac{b - a}{2^{n+1}} \leq \text{TOL},$$

cioè

$$n \geq \log_2 \left(\frac{b - a}{\text{TOL}} \right) - 1.$$

Per cui, dopo

$$n = \left\lceil \log_2 \left(\frac{b-a}{\text{TOL}} \right) \right\rceil - 1,$$

iterazioni del metodo di bisezione si è certi che vale (3).

Ad esempio, per trovare l'unico zero di

$$f(x) = e^{-x} - x, \quad x \in \mathbb{R},$$

che ha $[0, 1]$ come intervallo di localizzazione, con errore in modulo non maggiore di $\text{TOL} = 10^{-10}$ bastano

$$n = \left\lceil \log_2 \left(\frac{1}{10^{-10}} \right) \right\rceil - 1 = \left\lceil 10 \cdot \underbrace{\log_2 10}_{=3.3219} \right\rceil - 1 = 33$$

iterazioni.

Sia y un numero reale e sia \tilde{y} una sua approssimazione. Se

$$|\tilde{y} - y| \leq 10^{-t} \tag{4}$$

per qualche intero positivo t , allora diremo che \tilde{y} approssima y con t cifre decimali esatte (considerando come cifre decimali quella immediatamente prima del punto decimale e quelle dopo).

Per giustificare questo modo di dire, osserviamo che se \tilde{y} ha la rappresentazione in base 10,

$$\tilde{y} = b_p \dots b_1 b_0 \underset{\uparrow}{b_{-1}} \dots b_{-t+1} b_{-t} b_{-t-1} b_{-t-2} \dots$$

e b_{-t} è diverso da 0 e 9, allora da (4) segue

$$y \geq \tilde{y} - 10^{-t} = b_p \dots b_1 b_0 . b_{-1} \dots b_{-t+1} (b_{-t} - 1) b_{-t-1} b_{-t-2} \dots$$

e

$$y \leq \tilde{y} + 10^{-t} = b_p \dots b_1 b_0 . b_{-1} \dots b_{-t+1} (b_{-t} + 1) b_{-t-1} b_{-t-2} \dots$$

Quindi y ha la rappresentazione in base 10,

$$y = b_p \dots b_1 b_0 . b_{-1} \dots b_{-t+1} (b_{-t} - 1 \text{ o } b_{-t} \text{ o } b_{-t} + 1) \dots,$$

dove le prime t cifre decimali sono uguali a quelle di \tilde{y} .

Ad esempio, per

$$\tilde{y} = 1.1234765$$

e $|\tilde{y} - y| \leq 10^{-5}$, si ha

$$1.1234665 = 1.1234765 - 10^{-5} \leq y \leq 1.1234765 + 10^{-5} = 1.1234865,$$

e quindi

$$y = 1.1234(6 \text{ o } 7 \text{ o } 8) \dots$$

Notare che se b_{-t} è 0 o 9, allora y potrebbe non avere le prime t cifre decimali uguali a quelle di \tilde{y} .

Ad esempio, per

$$\tilde{y} = 1.9999953$$

e $|\tilde{y} - y| \leq 10^{-5}$, si ha

$$1.9999853 = 1.9999953 - 10^{-5} \leq y \leq 1.9999953 + 10^{-5} = 2.0000053$$

e quindi y e \tilde{y} potrebbero avere tutte le cifre decimali non uguali.

Continueremo a dire che \tilde{y} approssima y con t cifre decimali esatte anche quando t in $|\tilde{y} - y| \leq 10^{-t}$ non è un numero intero.

Per ogni $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, scriviamo

$$e_n = \frac{b-a}{2^{n+1}} = 10^{-t_n}$$

dove t_n è un opportuno numero reale.

Per $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, avendosi

$$|c_n - x^*| < e_n = 10^{-t_n},$$

si ha che c_n approssima x^* con t_n cifre decimali esatte.

Risulta,

$$10^{-t_{n+1}} = e_{n+1} = \frac{1}{2}e_n = \frac{1}{2}10^{-t_n}, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\},$$

e quindi, passando ai logaritmi in base 10,

$$t_{n+1} = t_n + \underbrace{\log_{10} 2}_{\approx 0.3010}, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Così ci vogliono quattro iterazioni, e tre non bastano, per aumentare t_n di una unità. In realtà t_n aumenta di 1.2041 in quattro iterazioni.

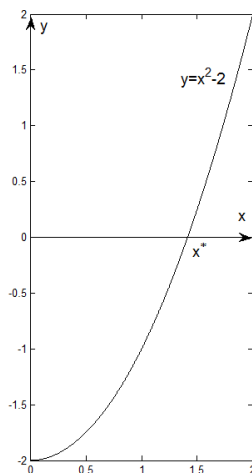
Per cui, nel metodo di bisezione si ha l'approssimazione c_n ha t_n cifre decimali esatte e t_n aumenta di 0.3010 ogni iterazione e così aumenta di una unità solo dopo quattro iterazioni.

Come esempio di utilizzo del metodo di bisezione, consideriamo il calcolo di

$$\sqrt{2} = 1.41421 \dots$$

come zero di

$$f(x) = x^2 - 2, \quad x \geq 0.$$



Per tale funzione

$$f(x) = x^2 - 2, \quad x \geq 0,$$

si ha

$$f'(x) = 2x > 0, \quad x > 0,$$

e quindi la funzione è strettamente crescente in $[0, +\infty)$.

Da

$$f(0) = -2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

segue che la funzione ha un unico zero che è $\sqrt{2}$.

Un intervallo di localizzazione è $[1, 2]$ avendosi

$$f(1) = -1 \quad \text{e} \quad f(2) = 2.$$

| n | a_n | b_n | c_n | t_n | $x^* = \sqrt{2}$ |
|-----|------------------|------------------|-------------------------|-------|------------------|
| 0 | 1 | 2 | <u>1.5</u> | 0.3 | 1.41421 ... |
| 1 | 1 | 1.5 | <u>1.25</u> | 0.6 | 1.41421 ... |
| 2 | 1.25 | 1.5 | <u>1.375</u> | 0.9 | 1.41421 ... |
| 3 | 1.375 | 1.5 | <u>1.4375</u> | 1.2 | 1.41421 ... |
| 4 | 1.375 | 1.4375 | <u>1.40625</u> | 1.5 | 1.41421 ... |
| 5 | 1.40625 | 1.4375 | <u>1.421875</u> | 1.8 | 1.41421 ... |
| 6 | 1.40625 | 1.421875 | <u>1.4140625</u> | 2.1 | 1.41421 ... |
| 7 | 1.4140625 | 1.421875 | <u>1.41796875</u> | 2.4 | 1.41421 ... |
| 8 | 1.4140625 | 1.41796875 | <u>1.416015625</u> | 2.7 | 1.41421 ... |
| 9 | 1.4140625 | 1.416015625 | <u>1.4150390625</u> | 3.0 | 1.41421 ... |
| 10 | 1.4140625 | 1.4150390625 | <u>1.4145507812 ...</u> | 3.3 | 1.41421 ... |
| 11 | 1.4140625 | 1.4145507812 ... | <u>1.4143066406 ...</u> | 3.6 | 1.41421 ... |
| 12 | 1.4140625 | 1.4143066406 ... | <u>1.4141845703 ...</u> | 3.9 | 1.41421 ... |
| 13 | 1.4141845703 ... | 1.4143066406 ... | <u>1.4142456054 ...</u> | 4.2 | 1.41421 ... |

Il metodo di bisezione è illustrato nella tabella. Le cifre decimali esatte dell'approssimazione c_n sono sottolineate.

Si hanno due, tre e quattro cifre esatte dopo tre, sei e dieci iterazioni, rispettivamente. Guardando al valore di t_n si hanno due, tre e quattro cifre esatte dopo sei, nove e tredici iterazioni.

Esercizio. In questo esempio del calcolo di $\sqrt{2}$, quante iterazioni del metodo di bisezione sono sufficienti per avere un'approssimazione con 20 cifre decimali esatte?

Esercizio. Mostrare che la formula

$$n = \left\lceil \log_2 \left(\frac{b-a}{\text{TOL}} \right) \right\rceil - 1$$

può anche scriversi come

$$n = \lceil 3.3219 (\log_{10}(b-a) + t) \rceil - 1$$

dove t è tale che $\text{TOL} = 10^{-t}$.

Il metodo di bisezione richiede solo la determinazione di un intervallo di localizzazione dello zero per poter essere applicato e fornisce un'approssimazione per lo zero buona quanto si vuole.

D'altra parte, la velocità con cui è prodotta l'approssimazione è bassa: t_n aumenta di una unità solo dopo quattro iterazioni.

Il metodo di Newton che ora presenteremo richiede ulteriori informazioni oltre alla semplice individuazione di un intervallo di localizzazione per poter essere applicato con successo, ma risulta essere molto più veloce del metodo di bisezione.

Un altro vantaggio del metodo di Newton è che può essere generalizzato a equazioni vettoriali

$$f(x) = 0$$

dove $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, vale a dire a sistemi di n equazioni

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

nelle n incognite x_1, x_2, \dots, x_n , dove $f_1, f_2, \dots, f_n : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono le n componenti di f .

Il metodo di bisezione invece non può essere generalizzato a tali equazioni, mancando in \mathbb{R}^n la relazione di ordinamento totale \leq che permette di definire il segno dei valori della funzione e di far sussistere il Teorema di Bolzano.

4 Il metodo di Newton

Sia $[a, b]$ un intervallo di localizzazione dello zero x^* di f .

Assumeremo ora anche che

iv) f' è definita e continua in $[a, b]$ e $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in [a, b]$.

Notare che l'assunzione iv) implica le assunzioni i) e iii). Infatti, dal fatto che f' è definita in $[a, b]$ segue che f è continua in $[a, b]$.

Poi dal fatto che f' è continua e $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in [a, b]$ segue (dal teorema di Bolzano) che non possono esistere $x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che $f'(x_1) > 0$ e $f'(x_2) < 0$. Per cui $f'(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$ e quindi f è strettamente crescente in $[a, b]$, oppure $f'(x) < 0$ per ogni $x \in [a, b]$ e quindi f è strettamente decrescente in $[a, b]$.

Sia $x_0 \in [a, b]$ un'approssimazione iniziale dello zero x^* . Si può ottenere una nuova approssimazione x_1 di x^* , sperabilmente migliore di x_0 , nel modo seguente.

Si consideri l'approssimante lineare p di f in x_0 dato da

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

La nuova approssimazione x_1 è la soluzione dell'equazione

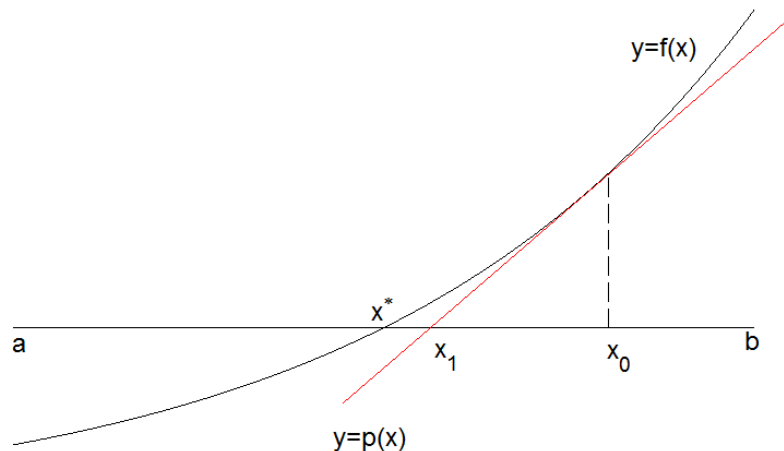
$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0,$$

che viene risolta al posto di

$$f(x) = 0.$$

Si ottiene, essendo $f'(x_0) \neq 0$,

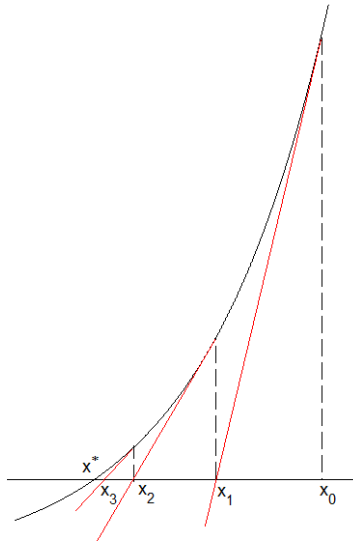
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$



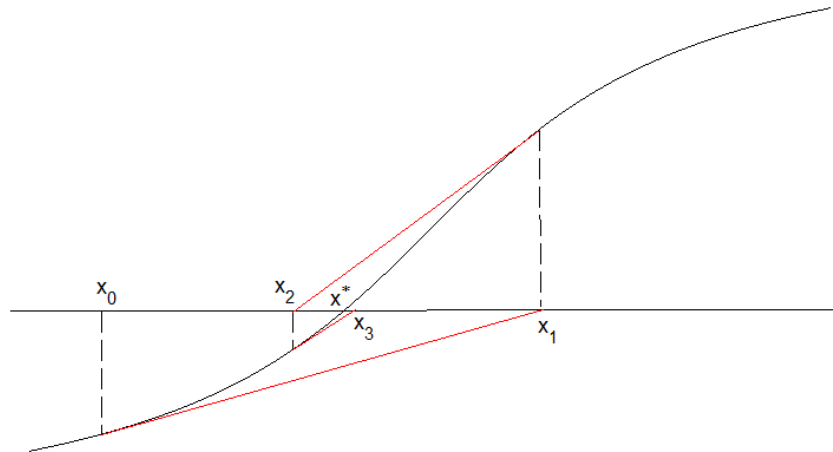
Notare che la retta $y = p(x)$, di cui si cerca l'intersezione x_1 con l'asse x , è la tangente al grafico $y = f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$.

Se $x_1 \in [a, b]$, allora si può ripetere il procedimento usando x_1 come un nuovo x_0 e ottenendo un'approssimazione x_2 ; se $x_2 \in [a, b]$, allora si può ripetere il

procedimento usando x_2 come un nuovo x_0 e ottenendo un'approssimazione x_3 ; e così via.



Nella precedente figura le successive approssimazioni si avvicinano a x^* rimanendo tutte a destra di x^* . La successiva figura mostra invece una situazione in cui le approssimazioni si avvicinano stando alternativamente a sinistra e a destra, con x_0 che sta a sinistra.



Esercizio. Nella prima delle precedenti figure sono mostrate le iterate x_0, x_1, x_2, x_3 che stanno tutte a destra dello zero x^* . Affinchè questo continui a valere per tutte le successive iterate è sufficiente che la funzione f a destra di x^* abbia una certa proprietà. Quale?

Esercizio. Nella seconda delle precedenti figure sono mostrate le iterate x_0, x_1, x_2, x_3 che stanno alternativamente a sinistra e a destra di x^* . Affinchè questo continui a valere per tutte le successive iterate è sufficiente che x^* abbia una certa proprietà. Quale?

Esercizio. Tracciare una figura in cui le successive approssimazioni si avvicinano a x^* rimanendo tutte a sinistra di x^* e una in cui si avvicinano stando alternativamente a destra e a sinistra, con x_0 che sta a destra.

Viene così ottenuta una successione $\{x_n\}$ di approssimazioni di x^* definita dall'iterazione

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

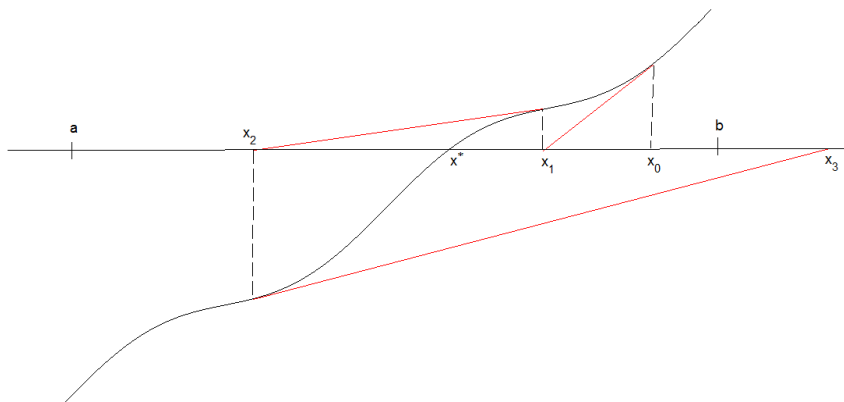
In questo consiste il *metodo di Newton*, detto anche *metodo delle tangenti* dal momento che sono coinvolte nella costruzione delle approssimazioni le rette tangenti al grafico $y = f(x)$.

Alla successione $\{x_n\}$ definita in (5), si richiede:

- per ogni $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $x_n \in [a, b]$ così da poter definire x_{n+1} ;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$;
- una convergenza veloce di x_n a x^* per $n \rightarrow \infty$.

Osserviamo che non è garantito avere $x_n \in [a, b]$ per ogni $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ sotto la sola ipotesi $x_0 \in [a, b]$.

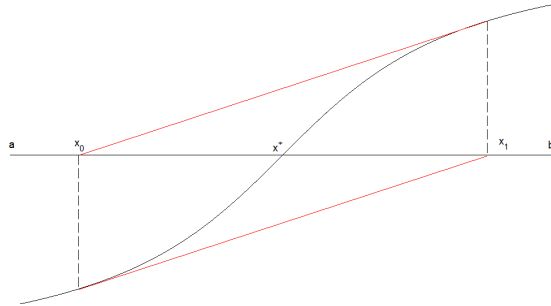
Nella sottostante figura, si ha un esempio in cui $x_0, x_1, x_2 \in [a, b]$, ma $x_3 \notin$



$[a, b]$.

Inoltre, anche se si ha $x_n \in [a, b]$ per ogni $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, non è garantito che x_n converga a x^* per $n \rightarrow \infty$.

Nella figura sottostante si ha un esempio in cui le tangenti al grafico $y = f(x)$ nei punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$ sono sistemate in modo tale che la successione $\{x_n\}$ sia alternativamente uguale a x_0 e x_1 .



Esercizio. Tracciare una figura in cui la successione $\{x_n\}$ ripeta periodicamente x_0 , x_1 e x_2 .

Vale però il seguente teorema

Teorema 1 Se $x_n \in [a, b]$ per ogni $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ e la successione $\{x_n\}$ converge, allora essa converge allo zero x^* .

Dimostrazione. Assumiamo $x_n \in [a, b]$ per ogni $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$.

Si ha $\bar{x} \in [a, b]$, dal momento che $x_n \in [a, b]$ per ogni $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

La successione $\{x_n\}$ soddisfa

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\},$$

e, passando al limite per $n \rightarrow \infty$ in ambo i membri, si ottiene

$$\bar{x} = \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \quad (6)$$

(essendo f e f' continue in $[a, b]$). Da (6) segue $f(\bar{x}) = 0$.

E' $\bar{x} = x^*$: \bar{x} è uno zero di f in $[a, b]$ e x^* è l'unico zero di f in $[a, b]$. ■

Esercizio. Nell'iterazione del metodo di Newton, determinare x_{n+1} quando $x_n = x^*$.

Esercizio. Descrivere l'iterazione del metodo di Newton nel caso

$$f(x) = mx + q, \quad x \in [a, b].$$

4.1 Convergenza locale del metodo di Newton

Vediamo ora quale condizione sull'iterata iniziale x_0 garantisce $x_n \in [a, b]$ per ogni $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ e la convergenza della successione $\{x_n\}$ a x^* .

A tale fine, scriviamo l'iterazione del metodo di Newton come

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

dove $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, detta *funzione di iterazione*, è data da

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad x \in [a, b].$$

Introduciamo un lemma sulla funzione di iterazione φ .

Lemma 2 Sia $f \in C^2([a, b])$. Per ogni $x \in [a, b]$, si ha

$$\varphi(x) - x^* = \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\xi)}{f'(x)} (x - x^*)^2,$$

dove ξ è un punto compreso tra x e x^* .

Dimostrazione. Sia $x \in [a, b]$. Lo sviluppo di Taylor di f al grado uno attorno al punto x fornisce

$$0 = f(x^*) = f(x) + f'(x)(x^* - x) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x^* - x)^2, \quad (7)$$

dove ξ è un punto compreso tra x e x^* . Dalla definizione della funzione φ si ha

$$x = \varphi(x) + \frac{f(x)}{f'(x)}$$

e quindi in (7) si ha

$$f(x) + f'(x)(x^* - x) = f(x) + f'(x) \left(x^* - \varphi(x) - \frac{f(x)}{f'(x)} \right) = f'(x)(x^* - \varphi(x)).$$

Si ha così

$$0 = f'(x)(x^* - \varphi(x)) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x^* - x)^2,$$

da cui segue

$$\varphi(x) - x^* = \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\xi)}{f'(x)} (x - x^*)^2.$$

■

Il seguente *Teorema di convergenza locale del metodo di Newton* dice come deve essere preso x_0 in modo tale da garantire $x_n \in [a, b]$ per ogni $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ e la convergenza della successione $\{x_n\}$ a x^* .

Teorema 3 Sia $f \in C^2([a, b])$ e sia

$$I_\varepsilon := [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon] = \{x \in \mathbb{R} : |x - x^*| \leq \varepsilon\},$$

dove $\varepsilon > 0$, un intorno circolare dello zero x^* tale che

$$I_\varepsilon \subseteq [a, b] \text{ e } d_\varepsilon \cdot \varepsilon < 1,$$

dove

$$d_\varepsilon := \frac{1}{2} \cdot \frac{\max_{x \in I_\varepsilon} |f''(x)|}{\min_{x \in I_\varepsilon} |f'(x)|}.$$

Se $x_0 \in I_\varepsilon$, allora si ha $x_n \in I_\varepsilon$ per ogni $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$$

e

$$|x_{n+1} - x^*| \leq d_\varepsilon \cdot |x_n - x^*|^2, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Dimostrazione. Assumiamo $x_0 \in I_\varepsilon$. Proviamo che, per $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$,

$$x_n \in I_\varepsilon \Rightarrow x_{n+1} \in I_\varepsilon.$$

Per induzione seguirà allora che $x_n \in I_\varepsilon$ per ogni $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Sia $x_n \in I_\varepsilon$. Dal precedente lemma sulla funzione φ si ha

$$x_{n+1} - x^* = \varphi(x_n) - x^* = \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} (x_n - x^*)^2,$$

dove ξ_n è un punto compreso tra x_n e x^* .

Poichè $x_n, x^* \in I_\varepsilon$, si ha pure $\xi_n \in I_\varepsilon$. Pertanto, essendo $x_n \in I_\varepsilon$ e $\xi_n \in I_\varepsilon$, si ottiene

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x^*| &= \frac{1}{2} \cdot \frac{|f''(\xi_n)|}{|f'(x_n)|} \cdot |x_n - x^*|^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\max_{x \in I_\varepsilon} |f''(x)|}{\min_{x \in I_\varepsilon} |f'(x)|} \cdot |x_n - x^*|^2 \\ &= d_\varepsilon \cdot |x_n - x^*|^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Quindi

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x^*| &\leq d_\varepsilon \cdot |x_n - x^*|^2 \\ &= d_\varepsilon |x_n - x^*| \cdot |x_n - x^*| \\ &\leq d_\varepsilon \varepsilon \cdot |x_n - x^*| \quad \text{essendo } |x_n - x^*| \leq \varepsilon \\ &< |x_n - x^*| \quad \text{essendo } d_\varepsilon \varepsilon < 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Si conclude

$$|x_{n+1} - x^*| < |x_n - x^*| \leq \varepsilon,$$

da cui $x_{n+1} \in I_\varepsilon$.

Proviamo ora che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*.$$

Si è visto sopra, in (9), che

$$|x_{n+1} - x^*| \leq d_\varepsilon \varepsilon \cdot |x_n - x^*|, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Pertanto,

$$|x_n - x^*| \leq (d_\varepsilon \varepsilon)^n \cdot |x_0 - x^*|, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad \text{con } d_\varepsilon \varepsilon < 1.$$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x^*| = 0.$$

Infine, la

$$|x_{n+1} - x^*| \leq d_\varepsilon \cdot |x_n - x^*|^2, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

è già stata provata precedentemente in (8). ■

Osserviamo che l'assunzione

$$I_\varepsilon \subseteq [a, b] \quad \text{e} \quad d_\varepsilon \cdot \varepsilon < 1$$

sull'intorno circolare I_ε dello zero x^* nel Teorema di convergenza locale sussiste prendendo $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo.

Infatti, se $\varepsilon \leq \min \{x^* - a, b - x^*\}$, allora $I_\varepsilon \subseteq [a, b]$.

Inoltre, essendo f' e f'' continue su $[a, b]$, si ha

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{x \in I_\varepsilon} |f''(x)| = |f''(x^*)| \quad \text{e} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \min_{x \in I_\varepsilon} |f'(x)| = |f'(x^*)|$$

da cui

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\max_{x \in I_\varepsilon} |f''(x)|}{\min_{x \in I_\varepsilon} |f'(x)|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|f''(x^*)|}{|f'(x^*)|}$$

e quindi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d_\varepsilon \cdot \varepsilon = 0.$$

Pertanto, esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \Rightarrow d_\varepsilon \varepsilon < 1.$$

Si conclude che se $\varepsilon > 0$ soddisfa $\varepsilon \leq \min \{x^* - a, b - x^*\}$ e $\varepsilon < \varepsilon_0$, allora l'assunzione su I_ε nel Teorema di convergenza locale sussiste.

Un intorno U dello zero x^* tale che $U \subseteq [a, b]$ si dice un *intorno di convergenza* del metodo di Newton se

$$\text{per ogni } x_0 \in U: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*.$$

Il precedente Teorema di convergenza locale dice che un intorno circolare I_ε di x^* con $I_\varepsilon \subseteq [a, b]$ è un intorno di convergenza se $d_\varepsilon \cdot \varepsilon < 1$ e il fatto che questo sussista per ε sufficientemente piccolo, ci permette di dire che esiste un intorno di convergenza del metodo di Newton.

Il metodo di Newton viene detto *localmente convergente*, per esprimere il fatto che esso possiede un intorno di convergenza.

In pratica, convergenza locale per il metodo di Newton significa che la successione $\{x_n\}$ prodotta dal metodo converge allo zero x^* se x_0 è preso sufficientemente vicino a x^* , in modo da giacere in un intorno di convergenza del metodo.

Come dimostrano l'esempio in cui $x_0, x_1, x_2 \in [a, b]$ ma $x_3 \notin [a, b]$ e quello in cui la successione $\{x_n\}$ ripete periodicamente x_0 e x_1 , il metodo di Newton ha in generale solo convergenza locale: in generale non si ha convergenza globale, vale a dire

$$\text{per ogni } x_0 \in [a, b]: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*.$$

Comunque, in quegli esempi si avrà convergenza se x_0 è preso sufficientemente vicino a x^* .

Esercizio. Si determini per ciascuna delle seguenti funzioni

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2)^3 - 8, \quad x \in [-1, 1], \\ f(x) &= \sin x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], \\ f(x) &= \arctan x, \quad x \in [-1, 1], \end{aligned}$$

un intorno circolare I_ε dello zero $x^* = 0$ che soddisfi l'assunzione nel Teorema di convergenza locale del metodo di Newton. Osservare che i domini delle funzioni sono degli intervalli di localizzazione dello zero.

Per quanto riguarda la velocità di convergenza allo zero x^* della successione $\{x_n\}$ del metodo di Newton, osserviamo quanto segue.

Sia I_ε un intorno che soddisfa l'assunzione nel Teorema di convergenza locale e sia $x_0 \in I_\varepsilon$.

Per ogni $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, scriviamo

$$|x_n - x^*| = 10^{-t_n},$$

dove t_n è un opportuno numero reale. Questo significa che x_n approssima x^* con t_n cifre decimali esatte.

Dalla relazione

$$|x_{n+1} - x^*| \leq d_\varepsilon \cdot |x_n - x^*|^2, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\},$$

si ottiene

$$10^{-t_{n+1}} \leq d_\varepsilon \cdot (10^{-t_n})^2 = d_\varepsilon \cdot 10^{-2t_n}, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\},$$

e quindi

$$t_{n+1} \geq 2t_n - \log_{10} d_\varepsilon, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Pertanto, nel metodo di Newton le cifre decimali esatte dell'approssimazione x_n all'incirca almeno raddoppiano ad ogni passo. Sicuramente almeno raddoppiano se $d_\varepsilon \leq 1$.

Confrontiamo ora il metodo di Newton con il metodo di bisezione.

Il vantaggio del metodo di Newton rispetto al metodo di bisezione è la maggior velocità di convergenza allo zero. Nel metodo di bisezione ci vogliono quattro iterazioni per ottenere una nuova cifra decimale esatta nell'approssimazione dello zero, mentre nel metodo di Newton le cifre decimali esatte all'incirca almeno raddoppiano ad ogni iterazione.

Lo svantaggio sta invece nel fatto che il metodo di Newton è solo localmente convergente, cioè è richiesto che l'iterata iniziale sia presa sufficientemente vicina allo zero. Non è sufficiente la sola conoscenza di un intervallo di localizzazione per ottenere delle approssimazioni buone quanto si vuole dello zero, cioè avere $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$, come accade nel caso del metodo di bisezione. Inoltre, il metodo di Newton richiede la conoscenza della derivata prima della funzione, che invece non è richiesta dal metodo di bisezione.

E' difficile determinare a priori un intorno di convergenza del metodo di Newton.

Nell'uso pratico del metodo, si cerca di partire da un punto che sia il più vicino possibile allo zero.

Ad esempio, si possono fare alcuni passi del metodo di bisezione e usare l'approssimazione ottenuta come iterata iniziale x_0 . Se la successione $\{x_n\}$ del metodo di Newton con quella iterata iniziale esce dall'intervallo $[a, b]$ oppure rimane in $[a, b]$ ma non si ha evidenza di una convergenza, allora occorre far ripartire il metodo con un'iterata iniziale più vicina allo zero, ottenuta con ulteriori passi del metodo di bisezione.

Per avere evidenza di una convergenza si può esaminare la successione calcolabile $\{f(x_n)\}$, che converge a zero se la successione $\{x_n\}$ converge a x^* .

Tuttavia, come si vedrà ora, sotto un'ulteriore ragionevole assunzione sulla funzione f anche per il metodo di Newton può bastare la conoscenza di un intervallo di localizzazione.

4.2 Convergenza non locale del metodo di Newton

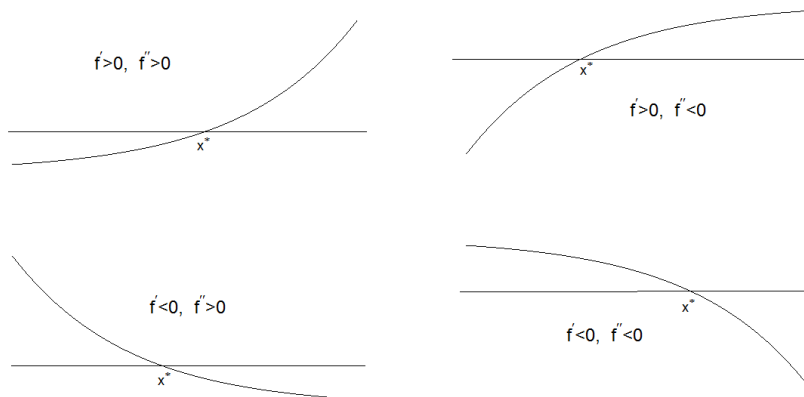
Vi sono situazioni in cui la convergenza del metodo di Newton avviene anche non localmente.

Richiediamo oltre a ii) e iv) (che implica i) e iii)) anche:

- v) f'' è definita e continua in $[a, b]$ e $f''(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$.

Se vale v), si ha $f''(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$ oppure $f''(x) < 0$ per ogni $x \in (a, b)$, vale a dire f è strettamente convessa in $[a, b]$ oppure f è strettamente concava in $[a, b]$. Osservare che la v) esclude l'avere punti di flesso della f all'interno dell'intervallo di localizzazione $[a, b]$.

Le possibili quattro situazioni in cui valgono ii), iv) e v) sono mostrate nella figura sottostante.



Sotto le assunzioni ii), iv) e v) vale il seguente *Teorema di convergenza non locale del metodo di Newton*.

Teorema 4 Sia $f \in C^2([a, b])$ tale che ii), iv) e v) sussistano, vale a dire $f(a)$ e $f(b)$ sono non nulli di segno opposto, $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in [a, b]$ e $f''(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$. Se $x_0 \in [a, b]$ è tale che

$$\text{sign}(x_0 - x^*) = \text{sign}(f' f''),$$

allora, per la successione $\{x_n\}$ del metodo di Newton, si ha:

- 1) $\{x_n\}$ è strettamente monotona e si sposta verso x^* rimanendo, rispetto a x^* , sempre sullo stesso lato di x_0 , cioè

$$x_0 > x_1 > x_2 > \dots > x^* \quad \text{o} \quad x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x^*$$

- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$.

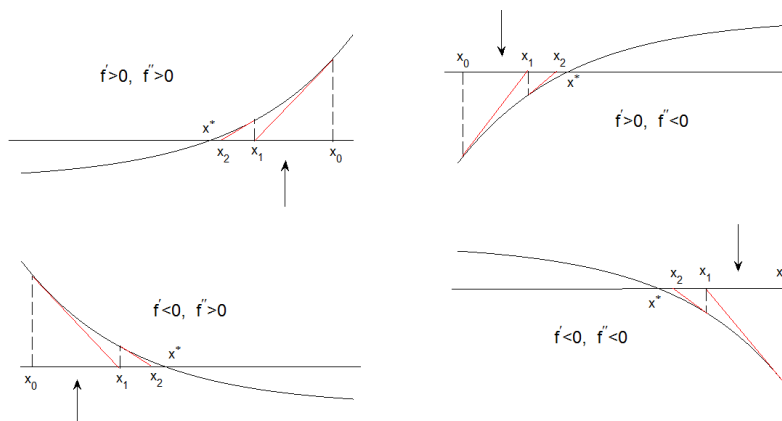
Osservare che 1) implica $x_n \in [a, b]$ per ogni $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Osservare che

$$\text{sign}(x_0 - x^*) = \text{sign}(f' f'')$$

è una condizione sul lato in cui deve stare x_0 rispetto a x^* .

La seguente figura mostra, nelle quattro situazioni in cui valgono ii), iv) e v), qual è il lato per cui la condizione sussiste.



Dimostrazione. Sia $x_0 \in [a, b]$ tale che $\text{sign}(x_0 - x^*) = \text{sign}(f' f'')$.

Il punto 1) segue dal fatto che, per $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$,

$$\begin{aligned} \text{sign}(x_n - x^*) = \text{sign}(f' f'') \quad \Rightarrow \quad \text{sign}(x_{n+1} - x^*) = \text{sign}(f' f'') = \text{sign}(x_n - x^*) \\ \text{e } \text{sign}(x_n - x_{n+1}) = \text{sign}(x_n - x^*), \end{aligned} \tag{10}$$

cioè se x_n è dalla parte giusta rispetto a x^* ($\text{sign}(x_n - x^*) = \text{sign}(f' f'')$), allora x_{n+1} è dalla stessa parte di x_n rispetto a x^* ($\text{sign}(x_{n+1} - x^*) = \text{sign}(x_n - x^*)$) ed è dalla stessa parte di x^* rispetto a x_n ($\text{sign}(x_n - x_{n+1}) = \text{sign}(x_n - x^*)$), quindi x_{n+1} è strettamente compreso tra x_n e x^* .

Proviamo (10). Sia $\text{sign}(x_n - x^*) = \text{sign}(f' f'')$. Dal lemma sulla funzione φ si ha

$$x_{n+1} - x^* = \varphi(x_n) - x^* = \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} \cdot (x_n - x^*)^2$$

dove ξ_n è compreso tra x_n e x^* . Per cui,

$$\text{sign}(x_{n+1} - x^*) = \text{sign}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} \cdot (x_n - x^*)^2\right) = \text{sign}(f' f'').$$

Inoltre, da

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

segue

$$\text{sign}(x_n - x_{n+1}) = \text{sign}\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) = \text{sign}(f(x_n)) \cdot \text{sign}(f').$$

Ora, il Teorema di Lagrange dice che

$$f(x_n) = f(x_n) - \underbrace{f(x^*)}_{=0} = f'(\eta_n)(x_n - x^*),$$

dove η_n è compreso tra x_n e x^* . Per cui

$$\text{sign}(f(x_n)) = \text{sign}(f') \cdot \text{sign}(x_n - x^*)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \text{sign}(x_n - x_{n+1}) &= \text{sign}(f(x_n)) \cdot \text{sign}(f') = \text{sign}(f')^2 \cdot \text{sign}(x_n - x^*) \\ &= \text{sign}(x_n - x^*). \end{aligned}$$

Resta da provare $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$. Poichè la successione $\{x_n\}$ è strettamente monotona e limitata (essendo compresa tra x_0 e x^*), essa converge. Da un teorema precedente segue che il limite della successione è lo zero x^* . ■

Nella seguente tabella viene riportato, per ciascuna delle quattro situazioni possibili sotto le assunzioni ii), iv) e v), quale estremo a o b dell'intervallo di localizzazione $[a, b]$ prendere come x_0 in modo da avere una successione $\{x_n\}$ convergente.

| Situazione | x_0 |
|-------------------|-------|
| $f' > 0, f'' > 0$ | b |
| $f' > 0, f'' < 0$ | a |
| $f' < 0, f'' > 0$ | a |
| $f' < 0, f'' < 0$ | b |

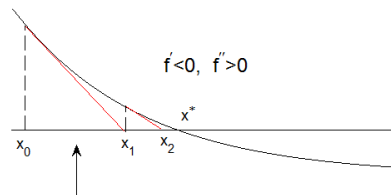
Come esempio, consideriamo l'unico zero della funzione

$$f(x) = e^{-x} - x, \quad x \in \mathbb{R},$$

localizzato in $[0, 1]$. Poichè

$$f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0 \quad \text{e} \quad f''(x) = e^{-x} > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

si è nella situazione



Pertanto, la successione $\{x_n\}$ converge allo zero se x_0 sta alla sinistra di esso. Si prende quindi $x_0 = a = 0$.

Il metodo di Newton per tale esempio ha la forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{e^{-x_n} - x_n}{-e^{-x_n} - 1} = x_n + \frac{e^{-x_n} - x_n}{e^{-x_n} + 1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

La relazione

$$t_{n+1} \geq 2t_n - \log_{10} d_\varepsilon, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad (11)$$

vale per una successione $\{x_n\}$ con $x_0 \in I_\varepsilon$, dove I_ε soddisfa l'assunzione nel Teorema di convergenza locale. Sotto le assunzioni ii), iv) e v), per una successione $\{x_n\}$ con $\text{sign}(x_0 - x^*) = \text{sign}(f'f'')$, la quale converge a x^* , si ha

$$t_{n+1} \geq 2t_n - \log_{10} d_\varepsilon, \quad n \in \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\},$$

dove n_0 è tale che $x_{n_0} \in I_\varepsilon$.

Infatti, dal momento che $\{x_n\}$ converge a x^* , ad un certo punto la successione entra in I_ε . Se $x_{n_0} \in I_\varepsilon$, allora la coda $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ è una successione del metodo di Newton con iterata iniziale in I_ε e vale (11).

In realtà, per la successione $\{x_n\}$ si ha

$$t_{n+1} \geq 2t_n - \log_{10} d_I, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad (12)$$

dove I è l'intervallo chiuso di estremi di estremi x^* e x_0 e

$$d_I := \frac{1}{2} \cdot \frac{\max_{x \in I} |f''(x)|}{\min_{x \in I} |f'(x)|}.$$

Infatti, per $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, dal lemma sulla funzione φ si ha

$$x_{n+1} - x^* = \varphi(x_n) - x^* = \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} \cdot (x_n - x^*)^2$$

dove ξ_n è compreso tra x_n e x^* . Essendo $x_n, x^* \in I$, si ha anche $\xi_n \in I$ e quindi

$$|x_{n+1} - x^*| = \frac{1}{2} \cdot \frac{|f''(\xi_n)|}{|f'(x_n)|} \cdot |x_n - x^*|^2 \leq d_I |x_n - x^*|^2.$$

Scrivendo $|x_{n+1} - x^*| = 10^{-t_{n+1}}$ e $|x_n - x^*| = 10^{-t_n}$ e passando ai logaritmi (come precedentemente fatto nel caso della convergenza locale) si ottiene (12).

Il Teorema di convergenza non locale non può essere applicato nel caso in cui $f \in C^2([a, b])$ possieda un flesso in (a, b) .

In questo caso può essere applicato solo il Teorema di convergenza locale e la convergenza della successione $\{x_n\}$ allo zero x^* si ottiene prendendo x_0 sufficientemente vicino allo zero utilizzando alcuni passi del metodo di bisezione, come precedentemente illustrato.

Tuttavia è chiaro che studiando opportunamente la funzione è sempre possibile escludere i punti di flesso dall'intervallo di localizzazione, a meno che lo zero non sia esso stesso un flesso.

Esercizio. Sia $x_0 \in [a, b]$. Provare che la condizione

$$\text{sign}(x_0 - x^*) = \text{sign}(f' f'')$$

del Teorema di convergenza non locale è equivalente a

$$\text{sign}(f(x_0)) = \text{sign}(f'').$$

Suggerimento: dal Teorema di Lagrange si ha

$$f(x_0) = f(x_0) - f(x^*) = f'(\eta)(x_0 - x^*),$$

dove η è compreso tra x_0 e x^* , e quindi $\text{sign}(x_0 - x^*) = \dots$

Esercizio. Sotto le assunzioni ii), iv) e v), sia $x_0 \in [a, b]$ tale che $\text{sign}(x_0 - x^*) \neq \text{sign}(f' f'')$. Mostrare che $\text{sign}(x_1 - x^*) = \text{sign}(f' f'')$. Suggerimento: per il lemma sulla funzione di iterazione φ si ha

$$x_1 - x^* = \dots$$

e si prenda poi il segno in ambo i membri dell'equazione. Quindi, che cosa si può dire per quelle iterazioni del metodo di Newton che partono da un x_0 sul lato sbagliato rispetto a x^* ?

Esercizio. Scrivere l'iterazione di Newton per determinare i tre zeri della funzione

$$f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

precedentemente vista. Per ciascun zero determinare un intervallo di localizzazione in cui valgono le condizioni ii), iv) e v) e trovare un'iterata iniziale x_0 che garantisca la convergenza della successione del metodo di Newton allo zero.

Esercizio. Scrivere l'iterazione di Newton per determinare l'unica radice nell'intervallo $(0, \pi)$ dell'equazione

$$\sin x = \frac{1}{2}x$$

precedentemente vista. Determinare un intervallo di localizzazione della radice in cui valgono le condizioni ii), iv) e v) e trovare un'iterata iniziale x_0 che garantisca la convergenza della successione del metodo di Newton alla radice.

Esercizio. Scrivere l'iterazione di Newton per determinare l'unica radice dell'equazione

$$x^3 + x + 1 = 0$$

precedentemente vista. Determinare un intervallo di localizzazione della radice in cui valgono le condizioni ii), iv) e v) e trovare un'iterata iniziale x_0 che garantisca la convergenza della successione del metodo di Newton alla radice.

Esercizio. Sotto le assunzioni ii), iv) e v), per una successione $\{x_n\}$ con $\text{sign}(x_0 - x^*) = \text{sign}(f'f'')$, la quale converge a x^* , provare che si ha

$$t_{n+1} \geq 2t_n - \log_{10} d_{[a,b]}, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\},$$

dove

$$d_{[a,b]} := \frac{1}{2} \cdot \frac{\max_{x \in [a,b]} |f''(x)|}{\min_{x \in [a,b]} |f'(x)|}.$$

4.3 Quando arrestare l'iterazione di Newton

Anche se le iterate del metodo di Newton convergono allo zero x^* , rimane il problema di quando arrestare l'iterazione.

Supponiamo di voler fermare l'iterazione quando si dispone di un'approssimazione x_n tale che

$$|x_n - x^*| \leq \text{TOL},$$

dove $\text{TOL} > 0$ è una tolleranza prefissata sul modulo dell'errore assoluto dell'approssimazione x_n .

Teorema 5 Per ogni $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, si ha

$$|x_n - x^*| \leq \frac{|f(x_n)|}{m'},$$

dove

$$m' = \min_{x \in [a,b]} |f'(x)|.$$

Dimostrazione. Per $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, risulta

$$f(x_n) = f(x_n) - \underbrace{f(x^*)}_{=0} = f'(\xi_n)(x_n - x^*),$$

dove ξ_n è compreso tra x_n e x^* .

Pertanto

$$|x_n - x^*| = \frac{|f(x_n)|}{|f'(\xi_n)|} \leq \frac{|f(x_n)|}{m'}.$$

■

La quantità calcolabile $|f(x_n)|$ può essere quindi usata per monitorare l'errore $|x_n - x^*|$ tramite $|x_n - x^*| \leq \frac{|f(x_n)|}{m'}$.

Se il metodo di Newton viene arrestato con il *criterio di arresto*

$$|f(x_n)| \leq m' \cdot \text{TOL},$$

allora si ha

$$|x_n - x^*| \leq \frac{|f(x_n)|}{m'} \leq \frac{m' \cdot \text{TOL}}{m'} = \text{TOL}.$$

Nel caso in cui valgano ii), iv) e v), m' è immediatamente determinato, dal momento che f' è strettamente monotona e non cambia segno in $[a, b]$.

Nella seguente tabella si fornisce m' per le quattro situazioni possibili sotto le assunzioni ii), iv) e v):

| Situazione | m' | x_0 |
|---------------------------------------|-----------|-------|
| $f' > 0, f'' > 0$ (f' crescente) | $f'(a)$ | b |
| $f' > 0, f'' < 0$ (f' decrescente) | $f'(b)$ | a |
| $f' < 0, f'' > 0$ (f' crescente) | $ f'(b) $ | a |
| $f' < 0, f'' < 0$ (f' decrescente) | $ f'(a) $ | b |

In tabella viene riportato anche l'estremo scelto come x_0 al fine di osservare che m' è il modulo della derivata sull'altro estremo.

Ad esempio, nel caso dello zero di

$$f(x) = e^{-x} - x, \quad x \in \mathbb{R},$$

localizzato in $[0, 1]$, si ha la situazione $f' < 0$ e $f'' > 0$ e risulta

$$m' = |f'(1)| = |-e^{-1} - 1| = 1.3679.$$

Alcune iterate corrispondenti a $x_0 = a = 0$ calcolate con l'iterazione di Newton

$$x_{n+1} = x_n + \frac{e^{-x_n} - x_n}{e^{-x_n} + 1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

per tale f sono presentate nella sottostante tabella:

| n | x_n | $f(x_n)$ |
|-----|--------------------|----------------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0.5 | $1.1 \cdot 10^{-1}$ |
| 2 | 0.5663110031972182 | $1.3 \cdot 10^{-3}$ |
| 3 | 0.5671431650348623 | $2.0 \cdot 10^{-7}$ |
| 4 | 0.5671432904097810 | $4.6 \cdot 10^{-15}$ |

Per cui, se si vuole un'approssimazione che soddisfi

$$|x_n - x^*| \leq \text{TOL}$$

con $\text{TOL} = 10^{-10}$ (quindi con 10 cifre decimali esatte), si deve prendere x_n in modo che

$$|f(x_n)| \leq 1.3679 \cdot 10^{-10}.$$

Una tale approssimazione è x_4 . Esercizio. Mostrare che x_4 in realtà ha 14 cifre decimali esatte.

Nel caso in cui non valga v) e $m' = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ sia difficile da calcolare, si può sempre rimpiazzare

$$|f(x_n)| \leq m' \cdot \text{TOL} \quad \text{con} \quad |f(x_n)| \leq M' \cdot \text{TOL},$$

dove $M' > 0$ è una minorazione di m' facile da calcolare, e si ha ancora

$$|x_n - x^*| \leq \frac{|f(x_n)|}{m'} \leq \frac{M' \cdot \text{TOL}}{m'} \leq \text{TOL}.$$

Se anche una tale minorazione è difficile da calcolare, allora si può comunque arrestare l'iterazione quando

$$|f(x_n)| \leq \text{TOL}.$$

In tal caso, anche se

$$|x_n - x^*| \leq \text{TOL}$$

non è più garantita, si ha comunque

$$|x_n - x^*| \leq \frac{|f(x_n)|}{m'} \leq \frac{\text{TOL}}{m'}$$

e si può concludere che $|x_n - x^*|$ è dell'ordine di grandezza di TOL, a meno che m' non sia molto minore di uno.

Esercizio. Per ciascun zero della funzione

$$f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

precedentemente vista, si determini un criterio di arresto dell'iterazione di Newton per approssimare tale zero (cioè si determini m').

Esercizio. Per la radice in $(0, \pi)$ dell'equazione

$$\sin x = \frac{1}{2}x$$

precedentemente vista, si determini un criterio di arresto dell'iterazione di Newton per approssimare tale radice.

Esercizio. Per la radice dell'equazione

$$x^3 + x + 1 = 0$$

precedentemente vista, si determini un criterio di arresto dell'iterazione di Newton per approssimare tale radice.

4.4 Il calcolo delle radici quadrate e il calcolo dei reciproci

Andiamo ora ad illustrare due esempi interessanti dell'uso del metodo di Newton.

Cominciamo con il calcolo delle radici quadrate.

Dato $c > 0$, la sua radice quadrata è l'unico zero della funzione

$$f(x) = x^2 - c, \quad x \geq 0.$$

Infatti, si ha $f(0) = -c$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e

$$f'(x) = 2x > 0, \quad x > 0.$$

Si supponrà $c > 1$. Nel caso $c < 1$, la radice quadrata di c può calcolarsi come

$$\sqrt{c} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c}}},$$

dove $\frac{1}{c} > 1$.

Per $c > 1$, un intervallo di localizzazione dello zero \sqrt{c} è $[1, b]$, dove b è il minimo intero positivo tale che $b^2 > c$. Infatti,

$$f(1) = 1^2 - c = 1 - c < 0, \quad f(b) = b^2 - c > 0$$

e inoltre si ha $f'(x) > 0$, $x > 0$.

Avendosi poi

$$f''(x) = 2, \quad x > 0,$$

siamo nella situazione $f' > 0$ e $f'' > 0$. Il metodo converge per $x_0 = b$.

Il metodo di Newton prende la forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{c}{x_n} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Osservare che se x_n è un'approssimazione per difetto (per eccesso) di \sqrt{c} , allora, essendo

$$\sqrt{c} = \frac{c}{\sqrt{c}},$$

$\frac{c}{x_n}$ è un'approssimazione per eccesso (per difetto) di \sqrt{c} .

Quindi \sqrt{c} si trova tra le sue due approssimazioni x_n e $\frac{c}{x_n}$ e pertanto è naturale prendere come nuova approssimazione migliore di x_n e $\frac{c}{x_n}$ la loro media. Questa è l'approssimazione x_{n+1} fornita dal metodo di Newton.

Questo modo di calcolare le radici quadrate, noto fin dall'antichità, è detto *metodo di Erone* ed è quello comunemente usato dai computer e dalle calcolatrici.

Poichè siamo nella situazione $f' > 0$ e $f'' > 0$, si ha

$$m' = f'(1) = 2.$$

Pertanto, data una tolleranza TOL, si ottiene

$$|x_n - \sqrt{c}| = x_n - \sqrt{c} \leq \text{TOL}$$

con il criterio di arresto

$$|f(x_n)| = |x_n^2 - c| = x_n^2 - c \leq 2 \cdot \text{TOL}.$$

Osservare che i moduli possono tolti in quanto la successione $\{x_n\}$ rimane sempre a destra di \sqrt{c} e quindi $x_n > \sqrt{c}$ e $x_n^2 > c$.

Esercizio. Determinare un criterio di arresto computabile (cioè che non usa \sqrt{c}) basandosi direttamente su

$$|x_n - \sqrt{c}| = x_n - \sqrt{c} \leq \text{TOL}.$$

Suggerimento: si riscriva la precedente disequazione come $c = (\sqrt{c})^2 \geq \dots$. Per una tolleranza TOL fissata, quale criterio d'arresto è computazionalmente migliore, nel senso che con esso si effettuano un numero di passi non maggiore che con l'altro?

Come esempio consideriamo il calcolo di

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095$$

(utilizziamo 15 cifre dopo il punto decimale). Si ha $b = 2$ e l'iterazione di Newton

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{c}{x_n} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

con $x_0 = b = 2$ fornisce:

| n | x_n | $f(x_n)$ |
|-----|--------------------------|-----------------------|
| 0 | 2 | 2 |
| 1 | <u>1.5</u> | $2.5 \cdot 10^{-1}$ |
| 2 | <u>1.416666666666667</u> | $7.0 \cdot 10^{-3}$ |
| 3 | <u>1.414215686274510</u> | $6.0 \cdot 10^{-6}$ |
| 4 | <u>1.414213562374690</u> | $4.5 \cdot 10^{-12}$ |
| 5 | <u>1.414213562373095</u> | $-4.4 \cdot 10^{-16}$ |

Notare che ad ogni iterazione il numero di cifre esatte (quelle sottolineate) di x_n all'incirca raddoppia.

Esercizio. Applicare il metodo di Newton per calcolare le radici n -esime, dove $n \geq 2$ è un intero positivo. Si studi il metodo similmente a quanto fatto per il calcolo delle radici quadrate.

Passiamo ora al calcolo dei reciproci.

Dato $c > 0$, il suo reciproco è l'unico zero della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} - c, \quad x > 0.$$

Infatti, si ha $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -c$ e

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \quad x > 0.$$

Si supponrà $c \in [1, 10)$. Per $c \notin [1, 10)$, si ha sempre

$$c = \bar{c} \cdot 10^p,$$

per qualche $\bar{c} \in [1, 10)$ e $p \in \mathbb{Z}$, e quindi il reciproco di c può calcolarsi come

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{\bar{c}} \cdot 10^{-p}.$$

Si supponrà anche $c \neq 1$: il reciproco di 1 è 1.

Per $c \in (1, 10)$, un intervallo di localizzazione dello zero $\frac{1}{c}$ è $[0.1, 1]$. Infatti,

$$f(0.1) = \frac{1}{0.1} - c = 10 - c > 0, \quad f(1) = \frac{1}{1} - c = 1 - c < 0$$

e inoltre si ha $f'(x) < 0$, $x > 0$.

Avendosi poi

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad x > 0,$$

siamo nella situazione $f' < 0$ e $f'' > 0$. Il metodo converge per $x_0 = a = 0.1$.

Il metodo di Newton prende la forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{1}{x_n} - c}{-\frac{1}{x_n^2}} = 2x_n - cx_n^2 = x_n(2 - cx_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

L'iterazione viene effettuata solo con le operazioni di addizione, opposto e moltiplicazione. Questo è il modo comunemente usato dai computer e dalle calcolatrici per calcolare i reciproci ed effettuare le divisioni ($\frac{b}{c}$ è calcolato come $b \cdot \frac{1}{c}$).

Poichè siamo nella situazione $f' < 0$ e $f'' > 0$ (f' crescente), si ha

$$m' = |f'(1)| = \left| -\frac{1}{1^2} \right| = 1.$$

Pertanto, data una tolleranza TOL, si ottiene

$$\left| x_n - \frac{1}{c} \right| = \frac{1}{c} - x_n \leq \text{TOL}$$

con il criterio di arresto

$$|f(x_n)| = \left| \frac{1}{x_n} - c \right| = \frac{1}{x_n} - c \leq \text{TOL}.$$

Osservare che i moduli sono tolti in quel modo dal momento che la successione $\{x_n\}$ rimane sempre a sinistra di $\frac{1}{c}$ e quindi $x_n < \frac{1}{c}$ e $\frac{1}{x_n} > c$.

Il criterio di arresto si scrive in maniera equivalente come

$$1 - cx_n \leq \text{TOL} \cdot x_n$$

e il controllo di questa relazione richiede solo le operazioni di addizione, opposto e moltiplicazione.

Esercizio. Determinare un criterio di arresto che richieda solo le operazioni di addizione, opposto e moltiplicazione basandosi direttamente su

$$\left| x_n - \frac{1}{c} \right| = \frac{1}{c} - x_n \leq \text{TOL}.$$

Per una tolleranza TOL fissata, quale criterio d'arresto è computazionalmente migliore?

Come esempio, consideriamo il calcolo di

$$\frac{1}{7} = 0.1428571428571429.$$

L'iterazione di Newton

$$x_{n+1} = x_n(2 - cx_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

con $x_0 = a = 0.1$ fornisce:

| n | x_n | $f(x_n)$ |
|-----|---------------------------|-----------------------|
| 0 | <u>0.1</u> | 3 |
| 1 | <u>0.13</u> | $6.9 \cdot 10^{-1}$ |
| 2 | <u>0.1417</u> | $5.7 \cdot 10^{-2}$ |
| 3 | <u>0.14284777</u> | $4.6 \cdot 10^{-4}$ |
| 4 | <u>0.1428571422421897</u> | $3.0 \cdot 10^{-8}$ |
| 5 | <u>0.1428571428571429</u> | $-8.9 \cdot 10^{-16}$ |

Esercizio. Applicare il metodo di Newton per determinare i valori di \log utilizzando solo le operazioni aritmetiche e la funzione \exp . Si studi il metodo analogamente a quanto fatto per il calcolo delle radici quadrate e dei reciproci. Suggestione: $\log c$, $c > 0$, è radice dell'equazione $e^x = \dots$