Interpolazione

S. Maset
Dipartimento di Matematica e Geoscienze
Università di Trieste
maset@units.it

June 15, 2018

1 Introduzione

Ci occupiamo ora del problema di approssimare delle funzioni reali di una variabile reale con altre funzioni più semplici.

In particolare, queste funzioni più semplici saranno i polinomi e il tipo di approssimazione che si userà sarà l'*interpolazione*.

La scelta di usare i polinomi è dettata dal fatto che i valori dei polinomi sono facili da calcolare (si usano le operazioni aritmetiche di addizione, opposto e moltiplicazione) e che i polinomi si derivano e si integrano agevolmente.

L'approssimazione di una funzione con un polinomio mediante interpolazione corrisponde ad una *discretizzazione* della funzione: l'oggetto matematico infinito funzione, descritto da un numero infinito non numerabile di numeri reali (occorre fornire un valore per ogni punto del dominio), viene approssimato dall'oggetto matematico finito polinomio, descritto da un numero finito di numeri reali (i suoi coefficienti).

2 Il problema di interpolazione di Lagrange

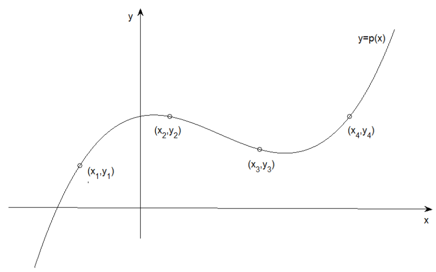
Il *problema di interpolazione di Lagrange* è così formulato: dati $n+1$ punti (x_i, y_i), $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, nel piano $\mathbb{R}^2$ tali che $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$, cioè $n+1$ punti a due a due non allineati verticalmente, trovare un polinomio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \ x \in \mathbb{R},$$

di grado $\leq n$ tale che

$$p(x_i) = y_i \ \text{ per ogni } i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Le ascisse x_i, $i \in \{0,1,\ldots,n\}$, sono dette *nodi di interpolazione* e le ordinate y_i *valori di interpolazione*.



Le condizioni di interpolazione

$$p\,(x_i) = a_n x_i^n + a_{n-1} x_i^{n-1} + \cdots + a_1 x_i + a_0 = y_i, \quad i \in \{0,1,\ldots,n\}\,,$$

possono scriversi in forma compatta come il sistema lineare di $n+1$ equazioni negli $n+1$ coefficienti incogniti $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdot\ \cdot\ \cdot & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^n & \cdot\ \cdot\ \cdot & x_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ x_{n-1}^n & x_{n-1}^{n-1} & \cdot\ \cdot\ \cdot & x_{n-1} & 1 \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdot\ \cdot\ \cdot & x_n & 1 \end{bmatrix}}_{=V\in\mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}}_{=a\in\mathbb{R}^{n+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}}_{=y\in\mathbb{R}^{n+1}},$$

cioè

$$Va = y.$$

Infatti, per $i \in \{0,1,\ldots,n\}$, le componenti $(i+1)$-esime di Va e y sono $p(x_i)$ e y_i, rispettivamente.

La matrice V è detta *matrice di Vandermonde* relativa ai nodi x_i, $i \in \{0,1,\ldots,n\}$, e il sistema $Va = y$ è detto *sistema di Vandermonde*.

Casi speciali del problema di interpolazione di Lagrange sono:

- il trovare la retta che passa per due punti non allineati verticalmente ($n = 1$);
- il trovare la parabola che passa per tre punti a due a due non allineati verticalmente ($n = 2$).

Ad esempio, per trovare la retta

$$y = a_1 x + a_0$$

che passa per i due punti $(-1,3)$ e $(2,-5)$, si ha il sistema

$$\begin{bmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix},$$

mentre, per trovare la parabola

$$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

che passa per i tre punti $(-1,1)$, $(0,2)$ e $(1,-1)$, si ottiene

$$\begin{bmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Il problema di interpolazione di Lagrange ha una e una sola soluzione. Vale infatti il seguente teorema

Teorema 1 *La matrice di Vandermonde V è non singolare.*

Dimostrazione. Proviamo che V è non singolare mostrando che $\ker(V) = \{\underline{0}\}$. Infatti, se $\ker(V) = \{\underline{0}\}$, allora

$$\operatorname{rank}(V) = n + 1 - \dim(\ker(V)) = n + 1.$$

Mostriamo che $\ker(V) \subseteq \{\underline{0}\}$ (l'altra inclusione è banale), cioè che per ogni $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ tale che $Vb = \underline{0}$, si ha $b = \underline{0}$.

Sia $b = (b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tale che $Vb = \underline{0}$. Il polinomio

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0,\ x \in \mathbb{R},$$

di grado $\leq n$ si annulla negli $n+1$ punti distinti x_i, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Infatti, si ha

$$q(x_i) = b_n x_i^n + b_{n-1} x_i^{n-1} + \cdots + b_1 x_i + b_0 = (Vb)_{i+1} = 0,\ i \in \{0, \ldots, n\}.$$

Ora, il polinomio q è un polinomio di un qualche grado k, dove $k \in \{0, \ldots, n\}$, oppure è il polinomio nullo (quello che ha tutti i coefficienti nulli). Nel primo caso, q ha al più k zeri reali, nel secondo caso q ha tutti i numeri reali come zeri.

Pertanto, avendo q almeno $n+1$ zeri e quindi più di k zeri, q deve essere il polinomio nullo. Quindi $b = \underline{0}$ e si conclude che $\ker(V) = \{\underline{0}\}$ ■

Poichè la matrice del sistema di Vandermonde $Va = y$ è non singolare, tale sistema ha una e una sola soluzione. Quindi, il problema di interpolazione di Lagrange ha un unico polinomio soluzione, detto il *polinomio di interpolazione di Lagrange relativo ai dati* (x_i, y_i), $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Esercizio. Si consideri l'interpolazione con un polinomio p di grado ≤ 3 dei dati (x_i, y_i), $i \in \{0,1,2,3\}$. Si assuma

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3$$

e

$$y_0 < y_1, \; y_1 > y_2 \text{ e } y_2 < y_3.$$

Mostrare che p ha un massimo locale $\eta \in (x_0, x_2)$ e un minimo locale $\mu \in (x_1, x_3)$ con $\eta < \mu$.

Suggerimento: mostrare, utilizzando il Teorema di Lagrange, che esistono punti $\xi_1 \in (x_0, x_1), \xi_2 \in (x_1, x_2)$ e $\xi_3 \in (x_2, x_3)$ tali che $p'(\xi_1) > 0$, $p'(\xi_2) < 0$ e $p'(\xi_3) > 0$; mostrare poi che esistono punti $\eta \in (\xi_1, \xi_2)$ e $\mu \in (\xi_2, \xi_3)$ tali che $p'(\eta) = p'(\mu) = 0$; per vedere se tali punti sono massimi o minimi, si guardi al segno della derivata a destra e a sinistra di essi.

Esercizio. Nel problema di interpolazione di Lagrange con $n = 1$, per quali dati $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ il polinomio di interpolazione ha grado ≤ 0?

Esercizio. Nel problema di interpolazione di Lagrange con $n = 2$, per quali dati $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ il polinomio di interpolazione ha grado ≤ 1?

3 La forma di Lagrange

Il polinomio di interpolazione di Lagrange si puo esprimere nella forma canonica

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \; x \in \mathbb{R},$$

dove i coefficienti $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ sono ottenuti risolvendo il sistema di Vandermonde. E' però possibile esprimere il polinomio di interpolazione anche in un'altra forma.

Per ogni $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, si introduca il polinomio di grado n

$$\ell_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} = \frac{x - x_0}{x_j - x_0} \cdots \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \cdot \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_j - x_n}, \; x \in \mathbb{R},$$

detto $j-$esimo *coefficiente di Lagrange* relativo ai nodi x_i, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Si noti che

$$\ell_j(x_i) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}, \; i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}. \quad (1)$$

Infatti, per $i = j$, la produttoria ha tutti fattori uguali a uno mentre, per $i \neq j$, uno dei fattori, quello corrispondente a $k = i$, è nullo.

Consideriamo ora il polinomio di grado $\leq n$,

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \cdot \ell_j(x), \; x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Per $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, dalla (1) si ha

$$p(x_i) = \sum_{j=0}^{n} y_j \cdot \ell_j(x_i) = y_i.$$

Pertanto, p è un polinomio di grado $\leq n$ che soddisfa le condizioni di interpolazione.

Quindi, p è il polinomio di interpolazione di Lagrange e la forma (2) in cui è espresso è detta *forma di Lagrange*.

Ad esempio, nel problema di trovare la retta che passa per $(-1, 3)$ e $(2, -5)$, si hanno i coefficienti di Lagrange

$$\begin{aligned}
\ell_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x-2}{-1-2} = -\frac{1}{3}(x-2) \\
\ell_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x-(-1)}{2-(-1)} = \frac{1}{3}(x+1), \ x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Quindi, il polinomio d'interpolazione risulta essere

$$\begin{aligned}
p(x) &= y_0 \cdot \ell_0(x) + y_1 \cdot \ell_1(x) \\
&= 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}(x-2)\right) + (-5) \cdot \frac{1}{3}(x+1) \\
&= -\frac{8}{3}x + \frac{1}{3}, \ x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Invece, nel problema di trovare la parabola che passa per $(-1, 1)$, $(0, 2)$ e $(1, -1)$, si hanno i coefficienti di Lagrange

$$\begin{aligned}
\ell_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x-0}{-1-0} \cdot \frac{x-1}{-1-1} = \frac{1}{2}x(x-1) \\
\ell_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x-(-1)}{0-(-1)} \cdot \frac{x-1}{0-1} = -(x+1)(x-1) \\
\ell_2(x) &= \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x-(-1)}{1-(-1)} \cdot \frac{x-0}{1-0} = \frac{1}{2}(x+1)x, \ x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Quindi, il polinomio d'interpolazione risulta essere

$$\begin{aligned}
p(x) &= y_0 \cdot \ell_0(x) + y_1 \cdot \ell_1(x) + y_2 \cdot \ell_2(x) \\
&= 1 \cdot \frac{1}{2}x(x-1) + 2 \cdot (-(x+1)(x-1)) + (-1) \cdot \frac{1}{2}(x+1)x \\
&= -2x^2 - x + 2, \ x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Esercizio. Determinare la retta e la parabola precedenti risolvendo il sistema di Vandermonde.

Esercizio. Utilizzando la forma di Lagrange del polinomio di interpolazione nel caso $n = 1$, ritrovare la nota equazione

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

della retta passante per i punti (x_0, y_0) e (x_1, y_1).

Esercizio. Utilizzando la forma di Lagrange, determinare il polinomio di interpolazione relativo ai seguenti dati

x_i	y_i
-2	0
-1	1
0	0
1	2
2	0

Suggerimento: non è necessario determinare tutti i coefficienti di Lagrange.

L'insieme dei polinomi di grado $\leq n$ è uno spazio vettoriale di dimensione $n + 1$.

Una base di tale spazio è costituita dai polinomi $1, x, x^2, \ldots, x^n$ ed è detta base canonica.

Un'altra base è data dagli $n+1$ coefficienti di Lagrange $\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_n$ relativi ai nodi x_i, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Infatti, essi sono linearmente indipendenti: se

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \ell_j = 0$$

(uguaglianza tra funzioni), allora

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \ell_j (x) = 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

e prendendo, per ogni $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $x = x_i$ si ottiene

$$0 = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \underbrace{\ell_j (x_i)}_{= \begin{cases} 1 \text{ se } j = i \\ 0 \text{ se } j \neq i \end{cases}} = \alpha_i.$$

Si osservi che quando scriviamo il polinomio di interpolazione come

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \ x \in \mathbb{R},$$

lo stiamo esprimendo nella base canonica e le componenti $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ in tale base sono la soluzione del sistema di Vandermonde. Invece quando lo scriviamo nella forma di Lagrange

$$p(x) = y_0 \ell_0(x) + y_1 \ell_1(x) + \cdots + y_{n-1} \ell_{n-1}(x) + y_n \ell_n(x), \ x \in \mathbb{R},$$

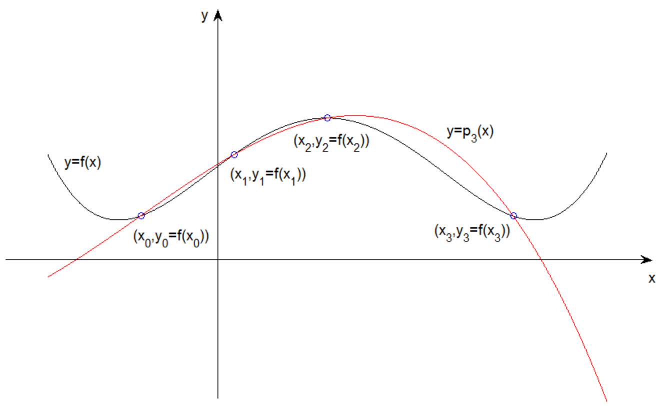
lo stiamo esprimendo nella base dei coefficienti di Lagrange e le componenti $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n$ in tale base sono semplicemente i valori di interpolazione.

Così, al prezzo di complicare la base facendola dipendere dai particolari nodi, si ottengono componenti semplici e immediatamente ottenibili.

4 Interpolazione di una funzione

Veniamo ora al problema di approssimare una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mediante un polinomio di interpolazione di Lagrange.

Precisamente, dati gli $n + 1$ nodi distinti $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$, con $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, la funzione f viene approssimata con il polinomio di interpolazione di Lagrange p_n relativo ai dati $(x_i, y_i = f(x_i))$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.



Chiameremo tale polinomio p_n il *polinomio di interpolazione di Lagrange della funzione* f relativo ai nodi $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Esercizio. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e siano $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ nodi di interpolazione. Nel caso in cui f sia un polinomio di grado $\leq n$, dire chi è il polinomio di interpolazione p_n di f relativo ai nodi $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Esercizio. Usando l'esercizio precedente, mostrare che se f è un polinomio di grado $\leq n$, allora

$$\sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, \ell_j(x) = f(x), \ x \in \mathbb{R},$$

dove ℓ_j, $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, sono i coefficienti di Lagrange relativi ai nodi x_j, $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Dire poi, per $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e $x \in \mathbb{R}$, a cosa è uguale

$$\sum_{j=0}^{n} x_j^k \ell_j(x).$$

La *funzione errore dell'interpolazione* $e_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ è data da

$$e_n(x) = p_n(x) - f(x), \ x \in [a, b].$$

Per definizione di polinomio di interpolazione, sui nodi risulta

$$e_n(x_i) = p_n(x_i) - f(x_i) = \underbrace{y_i}_{=f(x_i)} - f(x_i) = 0,\ i \in \{0,1,\ldots,n\}.$$

Al di fuori dei nodi l'errore è dato dal seguente teorema.

Teorema 2 *Sia $f \in C^{n+1}([a,b])$. Per ogni $x \in [a,b]$, si ha*

$$e_n(x) = -\frac{w_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}, \tag{3}$$

dove w_{n+1} è il polinomio di grado $n+1$ dato da

$$w_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n),\ x \in \mathbb{R},$$

e ξ_x è un punto interno dell'intervallo $I_x := [\min\{x_0, x\}, \max\{x_n, x\}]$.

Dimostrazione. Sia $x \in [a,b]$. Si ha

$$w_{n+1}(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = x_1 \text{ o } x = x_2 \text{ o } \ldots \text{ o } x = x_n.$$

Quindi, la formula (3) vale quando x è un nodo (con ξ_x arbitrario) dal momento che ambo i membri sono zero.

Sia ora x un punto che non è un nodo. Consideriamo la funzione $g_x : [a,b] \to \mathbb{R}$, che dipende da x, data da

$$g_x(t) = f(t) - p_n(t) + \frac{p_n(x) - f(x)}{w_{n+1}(x)} w_{n+1}(t),\ t \in [a,b].$$

Notare che, essendo x un punto che non è un nodo, si ha $w_{n+1}(x) \neq 0$ al denominatore.

Poichè $f \in C^{n+1}([a,b])$, si ha pure $g_x \in C^{n+1}([a,b])$ con

$$\begin{aligned} &g_x^{(k)}(t) = f^{(k)}(t) - p_n^{(k)}(t) + \frac{p_n(x) - f(x)}{w_{n+1}(x)} w_{n+1}^{(k)}(t) \\ &t \in [a,b] \text{ e } k \in \{0,1,\ldots,n+1\}. \end{aligned}$$

Per $k = n+1$, si ha

$$\begin{aligned} g_x^{(n+1)}(t) &= f^{(n+1)}(t) - \underbrace{p_n^{(n+1)}(t)}_{=0} + \frac{p_n(x) - f(x)}{w_{n+1}(x)} \underbrace{w_{n+1}^{(n+1)}(t)}_{=(n+1)!} \\ &= f^{(n+1)}(t) + \frac{p_n(x) - f(x)}{w_{n+1}(x)} (n+1)!,\ t \in [a,b]. \end{aligned}$$

Infatti

$$p_n^{(n+1)}(t) = 0, \ t \in \mathbb{R},$$

essendo p_n un polinomio di grado $\leq n$, e

$$w_{n+1}(t) = (t - t_0)(t - t_1) \cdots (t - t_n) = t^{n+1} + q_n(t), \ t \in \mathbb{R},$$

dove q_n un polinomio di grado $\leq n$ e quindi

$$w_{n+1}^{(n+1)}(t) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} t^{n+1} + q_n^{(n+1)}(t) = (n+1)! + 0 = (n+1)!, \ t \in \mathbb{R}.$$

Proviamo ora che $g_x^{(n+1)}$ si annulla in un punto ξ_x dell'intervallo I_x.

La funzione g_x si annulla nei nodi $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e in x. Infatti, si ha

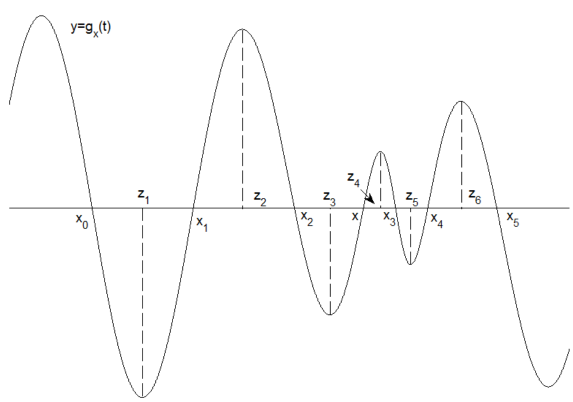
$$g_x(x_i) = \underbrace{f(x_i) - p_n(x_i)}_{=0} + \frac{p_n(x) - f(x)}{w_{n+1}(x)} \underbrace{w_{n+1}(x_i)}_{=0} = 0, \ i \in \{0, 1, \ldots, n\},$$

e

$$g_x(x) = f(x) - p_n(x) + \frac{p_n(x) - f(x)}{w_{n+1}(x)} w_{n+1}(x) = 0.$$

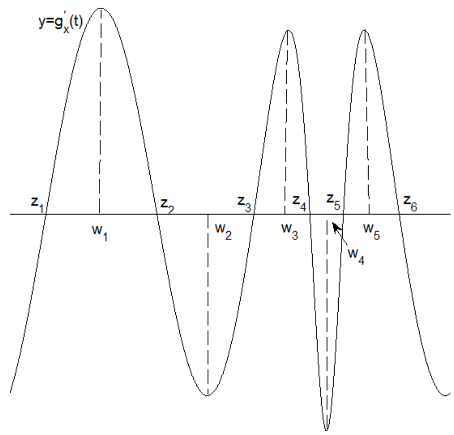
Per cui g_x si annulla in $n+2$ punti distinti dell'intervallo I_x (ricordare che x non è un nodo).

Per il teorema di Rolle, all'interno di ciascuno degli $n+1$ sottointervalli di I_x determinati dagli $n+2$ punti $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e x, c'è un punto in cui g_x' si annulla. Così, g_x' si annulla in $n+1$ punti distinti $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$ all'interno di I_x (essendo tali punti all'interno di sottointervalli di I_x).



Ripetendo il ragionamento si trova che, all'interno di ciascuno degli n sottointervalli di I_x determinati dagli $n+1$ punti $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$ in cui si annulla

g'_x, c'è un punto in cui g''_x si annulla. Così, g''_x si annulla in n punti distinti $w_1, w_2, \ldots, w_n$ all'interno di I_x.



Così continuando si prova che $g_x^{(k)}$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n+1\}$, si annulla in $n + 2 - k$ punti distinti all'interno di I_x. Quindi, $g_x^{(n+1)}$ si annulla in $(n+2) - (n+1) = 1$ punto ξ_x all'interno di I_x.

Ponendo $t = \xi_x$ in

$$g_x^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) + \frac{p_n(x) - f(x)}{w_{n+1}(x)}(n+1)!$$

si ha

$$g_x^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x) + \frac{p_n(x) - f(x)}{w_{n+1}(x)}(n+1)! = 0.$$

da cui

$$e_n(x) = p_n(x) - f(x) = -\frac{w_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}.$$

■

Nel seguito, per una funzione $g \in C([a,b])$ e un intervallo chiuso $I \subseteq [a,b]$, misureremo la grandezza di g in I per mezzo della norma infinito o norma del massimo $\|g\|_I = \max_{x \in I} |g(x)|$.

Per il modulo $|e_n(x)|$ dell'errore di interpolazione in un punto assegnato $x \in [a,b]$, dal teorema precedente si ha la maggiorazione

$$|e_n(x)| = \frac{|w_{n+1}(x)| \cdot \left|f^{(n+1)}(\xi_x)\right|}{(n+1)!} \leq \frac{|w_{n+1}(x)| \cdot \max_{\xi \in I_x} \left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!},$$

cioè

$$|e_n(x)| \leq \frac{|w_{n+1}(x)| \cdot \left\|f^{(n+1)}\right\|_{I_x}}{(n+1)!}.$$

Per il massimo modulo $\max\limits_{x\in[a,b]} |e_n(x)|$ dell'errore di interpolazione in tutto $[a,b]$, si ha invece la maggiorazione

$$\max_{x\in[a,b]} |e_n(x)| \le \frac{\max\limits_{x\in[a,b]} |w_{n+1}(x)| \cdot \max\limits_{\xi\in[a,b]} \left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!},$$

cioè

$$\|e_n\|_{[a,b]} \le \frac{\|w_{n+1}\|_{[a,b]} \cdot \left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,b]}}{(n+1)!}.$$

Consideriamo, ad esempio, la funzione

$$f(x) = \sin x,\ \ x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],$$

e il polinomio di interpolazione di grado ≤ 2 relativo ai nodi

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{6},\ x_2 = \frac{\pi}{4},$$

dove la funzione assume i noti valori

$$f(x_0) = 0,\ f(x_1) = \frac{1}{2},\ f(x_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

I coefficienti di Lagrange sono

$$\begin{aligned}
\ell_0(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2} = \frac{x-\frac{\pi}{6}}{0-\frac{\pi}{6}}\cdot\frac{x-\frac{\pi}{4}}{0-\frac{\pi}{4}} = \frac{24}{\pi^2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\\
\ell_1(x) &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{x-0}{\frac{\pi}{6}-0}\cdot\frac{x-\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}} = -\frac{72}{\pi^2}x\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\\
\ell_2(x) &= \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{x-0}{\frac{\pi}{4}-0}\cdot\frac{x-\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}} = \frac{48}{\pi^2}x\left(x-\frac{\pi}{6}\right),\ x\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Il polinomio di interpolazione è

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= f(x_0)\cdot\ell_0(x) + f(x_1)\cdot\ell_1(x) + f(x_2)\cdot\ell_2(x)\\
&= -\frac{36}{\pi^2}x\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{24\sqrt{2}}{\pi^2}x\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\\
&= \frac{24\sqrt{2}-36}{\pi^2}x^2 + \frac{9-4\sqrt{2}}{\pi}x,\ x\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Per l'errore di interpolazione nel punto $x = \frac{\pi}{12}$, si ha (essendo $I_x = [0, \frac{\pi}{4}]$)

$$\left|e_2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right| \le \frac{|w_3(x)|\cdot\left\|f^{(3)}\right\|_{I_x}}{3!} = \frac{\left|w_3\left(\frac{\pi}{12}\right)\right|\left\|f^{(3)}\right\|_{[0,\frac{\pi}{4}]}}{3!}$$

dove

$$\left|w_3\left(\frac{\pi}{12}\right)\right| = \left|\left(\frac{\pi}{12}-0\right)\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{2\pi^3}{12^3}$$

e

$$\left\| f^{(3)} \right\|_{\left[0, \frac{\pi}{4}\right]} \quad = \quad \left\| \sin^{(3)} \right\|_{\left[0, \frac{\pi}{4}\right]} = \|-\cos\|_{\left[0, \frac{\pi}{4}\right]} = \max_{x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]} |-\cos x| = 1.$$

Si ottiene così

$$\left| e_2 \left(\frac{\pi}{12} \right) \right| \le \frac{\frac{2\pi^3}{12^3} \cdot 1}{3!} = 6.0 \cdot 10^{-3}.$$

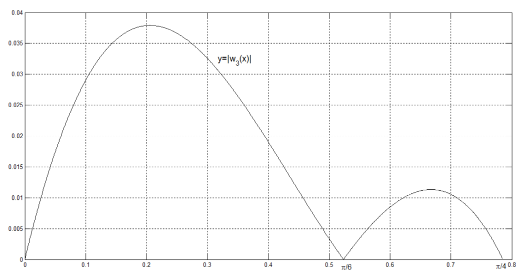
Per il massimo modulo in $[0, \frac{\pi}{4}]$ dell'errore di interpolazione si ha

$$\|e_2\|_{\left[0, \frac{\pi}{4}\right]} \le \frac{\|w_3\|_{\left[0, \frac{\pi}{4}\right]} \cdot \left\| f^{(3)} \right\|_{\left[0, \frac{\pi}{4}\right]}}{3!}$$

con

$$\|w_3\|_{\left[0, \frac{\pi}{4}\right]} = \max_{x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]} \left| x \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right| = \max_{x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]} \left| x^3 - \frac{5\pi}{12} x^2 + \frac{\pi^2}{24} x \right|$$

Con uno studio di funzione si trova



$$\|w_3\|_{\left[0, \frac{\pi}{4}\right]} = 3.8 \cdot 10^{-2}$$

e quindi

$$\|e_2\|_{\left[0, \frac{\pi}{4}\right]} \le \frac{3.8 \cdot 10^{-2} \cdot 1}{3!} = 6.3 \cdot 10^{-3}.$$

Esercizio. Effettuare lo studio di funzione con il quale si mostra $\|w_3\|_{\left[0, \frac{\pi}{4}\right]} = 3.8 \cdot 10^{-2}$.

Esercizio. Utilizzando il valore $\sin \frac{\pi}{12}$, determinare l'errore

$$e_2 \left(\frac{\pi}{12} \right) = p_2 \left(\frac{\pi}{12} \right) - \sin \frac{\pi}{12}$$

e confrontarlo con la maggiorazione trovata per il suo modulo.

Esercizio. Si considerino ora i due polinomi di interpolazione della funzione

$$f(x) = \sin x, \; x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right],$$

il primo relativo ai nodi x_0, x_1, x_2, x_3 e il secondo ai nodi x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, dove x_0, x_1, x_2 sono come nell'esempio sopra e

$$x_3 = \frac{\pi}{3} \text{ e } x_4 = \frac{\pi}{2}.$$

Dare, sia per $x = \frac{\pi}{12}$ che per $x = \frac{5}{12}\pi$, le maggiorazioni per il modulo dell'errore di interpolazione in x.

Esercizio. Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{x},\ x \in [1, 12].$$

Determinare il polinomio di interpolazione p_2 di f relativo ai nodi

$$x_0 = 1,\ x_0 = 4,\ x_2 = 9,$$

dove f assume i valori

$$f(x_0) = 1,\ f(x_2) = 2,\ f(x_3) = 3.$$

Determinare la maggiorazione di $|e_2(x)|$ per $x = 2$, $x = 3$ e $x = 11$. (Si osservi che $p_2(x)$ è un'approssimazione di $\sqrt{x}$). Si confronti poi la maggiorazione con $e_2(x)$ determinato utilizzando $\sqrt{x}$. Si determini infine la maggiorazione per $\|e_2\|_{[1,12]}$.

4.1 Maggiorazioni per $\|w_{n+1}\|_{[a,b}$.

Una volta fissato il numero $n+1$ dei nodi di interpolazione, la maggiorazione

$$\frac{\|w_{n+1}\|_{[a,b]} \cdot \left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,b]}}{(n+1)!}$$

di $\|e_n\|_{[a,b]}$ viene a dipendere dai due fattori:

- $\|w_{n+1}\|_{[a,b]}$, che dipende dalla scelta particolare degli $n+1$ nodi di interpolazione, ma è indipendente dalla funzione da interpolare;
- $\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,b]}$, che dipende dalla funzione da interpolare, ma è indipendente dalla scelta dei nodi.

Ci concentreremo ora sul fattore $\|w_{n+1}\|_{[a,b]}$ fornendo delle maggiorazioni per esso.

La prima maggiorazione che presentiamo è la seguente:

$$\|w_{n+1}\|_{[a,b]} \leq (b-a)^{n+1}.$$

Infatti, per ogni $x \in [a,b]$, si ha

$$|x - x_i| \leq b - a,\ i \in \{0, 1, \dots, n\},$$

e quindi

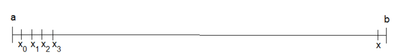
$$\begin{aligned} |w_{n+1}(x)| &= |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \\ &= |x-x_0|\,|x-x_1|\cdots|x-x_n| \leq (b-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

Pertanto,
$$\|w_{n+1}\|_{[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |w_{n+1}(x)| \le (b-a)^{n+1}.$$

Per $\|e_n\|_{[a,b]}$ si ha allora la maggiorazione
$$\|e_n\|_{[a,b]} \le \frac{(b-a)^{n+1} \left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,b]}}{(n+1)!}.$$

Senza una qualche assunzione sui nodi, la maggiorazione
$$\|w_{n+1}\|_{[a,b]} \le (b-a)^{n+1}$$
non può essere migliorata.

Infatti, nel caso di nodi di interpolazione ammassati verso uno degli estremi dell'intervallo $[a,b]$ e di un punto $x \in [a,b]$ all'altro estremo rispetto ai nodi



si ha
$$|x - x_i| \approx b - a,\ i \in \{0,1,\ldots,n\},$$
e quindi
$$\|w_{n+1}\|_{[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |x-x_0|\cdot|x-x_1|\cdots|x-x_n| \approx (b-a)^{n+1}.$$

L'approssimazione della funzione f con un polinomio di interpolazione relativo a nodi come quelli appena descritti, cioè ammassati tutti da una parte dell'intervallo $[a,b]$, è un'*estrapolazione*.

Con tale termine si intende l'approssimare, mediante interpolazione ai nodi $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (con $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$), la funzione f al di fuori dell'intervallo $[x_0, x_n]$ determinato dai nodi di interpolazione.

Più in generale, per estrapolazione si intende l'approssimare la funzione f al di fuori della "zona" in cui si hanno le informazioni sulla funzione.

Un altro caso ben noto di estrapolazione è quando si approssima f con un polinomio di Taylor sviluppato attorno all'estremo a: in questo caso si usano informazioni sulla funzione f nel solo punto a, in particolare i valori delle derivate di f in a, per approssimare la funzione al di fuori di tale punto.

Il polinomio di Taylor di grado $\le n$ attorno all'estremo$a$ è
$$q_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n,\ x \in \mathbb{R},$$
e l'errore è dato da
$$\delta_n(x) = q_n(x) - f(x) = -\frac{(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},\ x \in [a,b],$$

dove $\xi \in (a,x)$. Quindi,

$$\|\delta_n\|_{[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |\delta_n(x)| \le \frac{(b-a)^{n+1} \left\| f^{(n+1)} \right\|_{[a,b]}}{(n+1)!}.$$

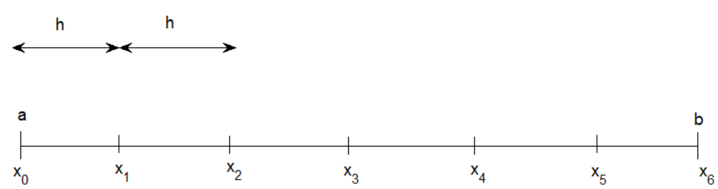
La maggiorazione di $\|\delta_n\|_{[a,b]}$ è la stessa dell'interpolazione.

Esercizio. Si consideri ora l'approssimazione di f data dal polinomio di Taylor di grado $\le n$ attorno al punto medio c di $[a,b]$. Dare una maggiorazione per la norma del massimo della funzione errore.

La precedente maggiorazione $\|w_{n+1}\|_{[a,b]} \le (b-a)^{n+1}$, che chiameremo (come anche la corrispondente maggiorazione di $\|e_n\|_{[a,b]}$) *maggiorazione per l'estrapolazione*, viene migliorata da un'altra maggiorazione, che ora presenteremo, nel caso in cui i nodi di interpolazione, invece di ammassarsi tutti da una parte dell'intervallo $[a,b]$, si "spalmino" su di esso.

Un esempio di nodi "spalmati" su $[a,b]$ sono i *nodi equidistanti*

$$x_i = a + ih,\ i \in \{0,1,\ldots,n\} \quad \text{e} \quad h = \frac{b-a}{n}.$$



Teorema 3 *(Maggiorazioni per nodi "spalmati"). Sia*

$$h := \max\left\{x_0 - a, \max_{i\in\{0,1,\ldots,n-1\}} (x_{i+1}-x_i), b - x_n\right\}.$$

Si ha

$$\|w_{n+1}\|_{[a,b]} \le (n+1)!h^{n+1}$$

Inoltre, nel caso in cui $x_0 = a$ e $x_n = b$, si ha

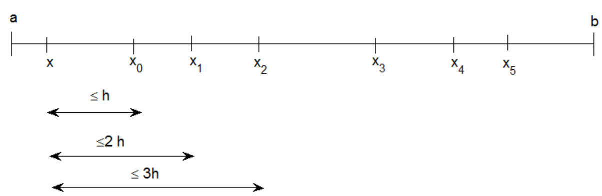
$$\|w_{n+1}\|_{[a,b]} \le \frac{n!h^{n+1}}{4}$$

dove ora $h = \max_{i\in\{0,1,\ldots,n-1\}} (x_{i+1}-x_i)$.

Esercizio. Cosa diventa la prima maggiorazione nel caso di nodi non "spalmati" ammassati tutti verso un estremo dell'intervallo $[a,b]$? In tale situazione,

la maggiorazione risulta migliore o peggiore di quella per l'estrapolazione? Suggerimento: $h \approx \ldots$.
Dimostrazione. Sia $x \in [a,b]$. Se $x \in [a, x_0)$, allora

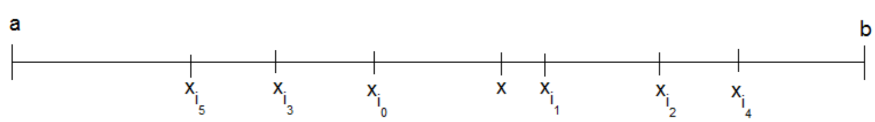
$$\begin{aligned}
|w(x)| &= |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)| \\
&= |x-x_0| \cdot |x-x_1| \cdot |x-x_2| \cdot \ \cdots \ \cdot |x-x_n| \\
&\leq h \cdot 2h \cdot 3h \cdot \ \cdots \ \cdot (n+1)h \\
&= (n+1)! h^{n+1}
\end{aligned}$$



In modo analogo si prova che, se $x \in (x_n, b]$, allora

$$|w(x)| \leq (n+1)! h^{n+1}.$$

Supponiamo ora $x \in [x_0, x_n]$. Siano x_{i_0} e x_{i_1}, con $x_{i_0} < x_{i_1}$, i nodi consecutivi entro cui si trova x, cioè si ha $x \in [x_{i_0}, x_{i_1}]$, e siano poi $x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$ gli altri nodi ordinati per distanza crescente da x.



Si ha

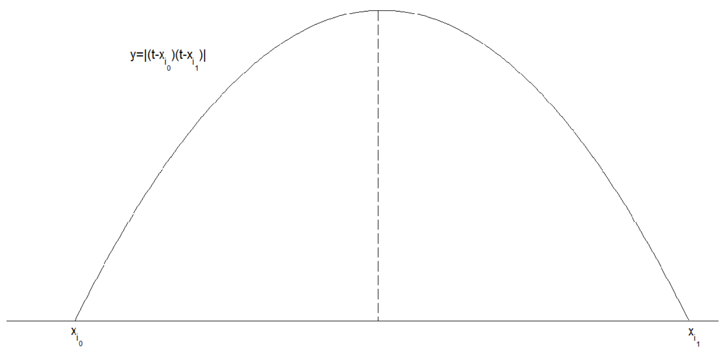
$$\begin{aligned}
|w(x)| &= |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \\
&= |(x-x_{i_0})(x-x_{i_1})(x-x_{i_2})(x-x_{i_3})\cdots(x-x_{i_n})| \\
&= |(x-x_{i_0})(x-x_{i_1})| \cdot |x-x_{i_2}| \cdot |x-x_{i_3}| \cdot \ \cdots \ \cdot |x-x_{i_n}|.
\end{aligned}$$

Ora, maggioriamo prima il termine $|(x-x_{i_0})(x-x_{i_1})|$ e poi l'altro termine $|x-x_{i_2}| \cdot |x-x_{i_3}| \cdot \ \cdots \ \cdot |x-x_{i_n}|$.

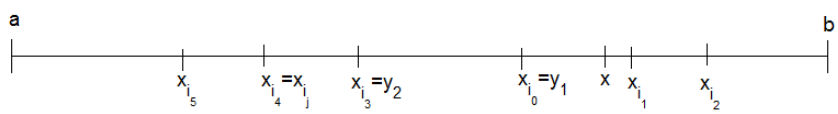
Consideriamo il termine $|(x-x_{i_0})(x-x_{i_1})|$. Si ha, essendo $x \in [x_{i_0}, x_{i_1}]$,

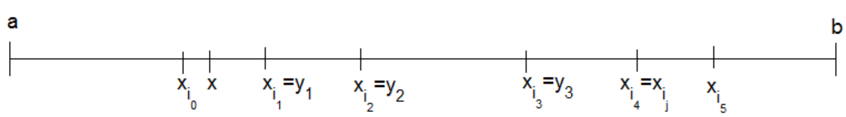
$$|(x-x_{i_0})(x-x_{i_1})| \leq \max_{t \in [x_{i_0}, x_{i_1}]} |(t-x_{i_0})(t-x_{i_1})| = \frac{(x_{i1}-x_{i0})^2}{4} \leq \frac{h^2}{4}.$$

con il massimo realizzato quando t è il punto medio dell'intervallo $[x_{i_0}, x_{i_1}]$.



Consideriamo ora l'altro termine $|x - x_{i_2}| \cdot |x - x_{i_3}| \cdot \ \cdots \ \cdot |x - x_{i_n}|$. Esaminiamo $|x - x_{i_j}|$, $j \in \{2, \ldots, n\}$. Andando da x e x_{i_j} si incontrano tra x e x_{i_j} consecutivamente i nodi $y_1, y_2, \ldots, y_k$, dove $y_1 = x_{i_0}$ o $y_1 = x_{i_1}$ e $y_2, \ldots, y_k$ sono alcuni (eventualmente tutti) tra i nodi $x_{i_2}, \ldots, x_{i_{j-1}}$.





Nella figura superiore (dove $x_{i_j} = x_{i_4}$), $y_2, \ldots, y_k$ ($y_2 = x_{i_3}$ in figura) sono solo alcuni tra i nodi $x_{i_2}, \ldots, x_{i_{j-1}}$ (x_{i_2}, x_{i_3} in figura). Nella figura inferiore (dove $x_{i_j} = x_{i_4}$), $y_2, \ldots, y_k$ ($y_2 = x_{i_2}, y_3 = x_{i_2}$ in figura) sono tutti i nodi $x_{i_2}, \ldots, x_{i_{j-1}}$ (x_{i_2}, x_{i_3} in figura).

I $k-1$ elementi in $y_2, \ldots, y_k$ non sono più dei $j-2$ elementi in $x_{i_2}, \ldots, x_{i_{j-1}}$.

Pertanto $k - 1 \leq j - 2$ e quindi $k + 1 \leq j$. Risulta allora

$$\left|x - x_{i_j}\right| \leq \underbrace{\left|x - y_1\right|}_{\leq h} + \underbrace{\left|y_1 - y_2\right|}_{\leq h} + \cdots + \underbrace{\left|y_{k-1} - y_k\right|}_{\leq h} + \underbrace{\left|y_k - x_{i_j}\right|}_{\leq h} \leq (k+1)\, h \leq jh.$$

Quindi

$$|x - x_{i_2}| \cdot |x - x_{i_3}| \cdot \ \cdots \ \cdot |x - x_{i_n}| \leq 2h \cdot 3h \cdot \ \cdots \ \cdot nh \leq n! h^{n-1}$$

e si conclude

$$\begin{aligned} |w(x)| &= |(x - x_{i_0})(x - x_{i_1})| \cdot |x - x_{i_2}| \cdot |x - x_{i_3}| \cdot \ \cdots \ \cdot |x - x_{i_n}| \\ &\leq \frac{h^2}{4} \cdot n! h^{n-1} = \frac{n! h^{n+1}}{4}. \end{aligned}$$

Così
$$|w(x)| \leq \begin{cases} (n+1)!h^{n+1} \text{ se } x \in [a, x_0) \cup (x_n, b] \\ \frac{n!h^{n+1}}{4} \text{ se } x \in [x_0, x_n] . \end{cases}$$
e avendosi $\frac{n!h^{n+1}}{4} < (n+1)!h^{n+1}$, si ottiene che
$$\|w_{n+1}\|_{[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |w_{n+1}(x)| \leq (n+1)!h^{n+1}.$$

Nel caso in cui $x_0 = a$ e $x_n = b$, si ha $[a, x_0) \cup (x_n, b] = \emptyset$. Pertanto
$$\|w_{n+1}\|_{[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |w_{n+1}(x)| \leq \frac{n!h^{n+1}}{4}$$
dove ora
$$h = \max \left\{ \underbrace{x_0 - a}_{=0}, \max_{i\in\{0,1,\ldots,n-1\}} (x_{i+1} - x_i), \underbrace{b - x_n}_{=0} \right\} = \max_{i\in\{0,1,\ldots,n-1\}} (x_{i+1} - x_i).$$
■

Per $\|e_n\|_{[a,b]}$ si ha quindi la *maggiorazione per nodi "spalmati"*
$$\|e_n\|_{[a,b]} \leq h^{n+1}\|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}.$$
Infatti,
$$\|e_n\|_{[a,b]} \leq \frac{\|w_{n+1}\|_{[a,b]} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{(n+1)!} \leq \frac{(n+1)!h^{n+1}\|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{(n+1)!} = h^{n+1}\|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}.$$

Inoltre, per $\|e_n\|_{[a,b]}$ si ha anche la *maggiorazione per nodi "spalmati" con $x_0 = a$ e $x_n = b$*
$$\|e_n\|_{[a,b]} \leq \frac{h^{n+1} \left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,b]}}{4(n+1)}.$$
Infatti,
$$\|e_n\|_{[a,b]} \leq \frac{\|w_{n+1}\|_{[a,b]} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{(n+1)!} \leq \frac{\frac{n!h^{n+1}}{4}\|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{(n+1)!} = \frac{h^{n+1}\|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{4(n+1)}.$$
Applicata ai nodi equidistanti, i quali soddisfano $x_0 = a$ e $x_n = b$ e si ha $h = \frac{b-a}{n}$, la precedente maggiorazione di $\|e_n\|$ diventa
$$\|e_n\|_{[a,b]} \leq \frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{4(n+1)} = \frac{(b-a)^{n+1} \left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,b]}}{4n^{n+1}(n+1)}.$$
che è la *maggiorazione per nodi equidistanti.*

Il rapporto tra la maggiorazione di $\|e_n\|_{[a,b]}$ per l'estrapolazione e la maggiorazione per nodi equidistanti è

$$\frac{\text{estrapolazione}}{\text{nodi equidistanti}} = \frac{\frac{(b-a)^{n+1}\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,b]}}{(n+1)!}}{\frac{(b-a)^{n+1}\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,b]}}{4n^{n+1}(n+1)}} = \frac{4n^{n+1}}{n!}.$$

Notare che

$$\frac{4n^{n+1}}{n!} = 4n \cdot \frac{n}{1} \cdot \frac{n}{2} \cdot \; \cdots \; \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n} \geq 4n \to \infty, \; n \to \infty.$$

Una tabella dei valori di $\frac{4n^{n+1}}{n!}$ per $n \in \{1, 2, \ldots, 7\}$ è riportata sotto

n	$\frac{4n^{n+1}}{n!}$
1	4
2	16
3	54
4	$1.7 \cdot 10^2$
5	$5.2 \cdot 10^2$
6	$1.6 \cdot 10^3$
7	$4.6 \cdot 10^3$

L'elevato valore del rapporto tra le maggiorazioni ben spiega la differenza tra l'estrapolazione e l'*interpolazione vera e propria*, cioè l'approssimare la funzione f dentro l'intervallo $[x_0, x_n]$ determinato dai nodi di interpolazione.

Le estrapolazioni dovrebbero essere evitate a favore delle interpolazioni vere e proprie. Quindi, un polinomio di interpolazione con nodi "spalmati" dovrebbe essere preferito ad un polinomio di Taylor sviluppato attorno al punto a, quando si vuole approssimare la funzione f su tutto $[a, b]$ e non solo su un intorno di a.

Esercizio. Si determini il rapporto tra la maggiorazione della norma del massimo dell'errore del polinomio di Taylor di grado $\leq n$ attorno al punto medio di $[a, b]$ (trovata in un precedente esercizio) e la maggiorazione di $\|e_n\|_{[a,b]}$ per nodi equidistanti. Usando l'approssimazione di Stirling (vedi Wikipedia), mostrare che tale rapporto tende a ∞ per $n \to \infty$. Costruire una tabella che fornisce i valori di tale rapporto per $n \in \{1, 2, \ldots, 7\}$.

Esercizio. Si consideri la funzione

$$f(x) = x^{n+1}, \; x \in [a, b],$$

interpolata su $n + 1$ nodi, cioè con un polinomio di grado $\leq n$. Determinare il valore della maggiorazione di $\|e_n\|_{[a,b]}$ per l'estrapolazione e il valore della maggiorazione di $\|e_n\|_{[a,b]}$ per nodi equidistanti. Provare che quest'ultimo valore tende a zero per $n \to \infty$ se $b - a \leq e$.

Esercizio. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x},\ x \in [1, 10],$$

interpolata ai nodi $x_0 = 1, x_1 = 2, x_1 = 4, x_3 = 8$. Determinare il valore della maggiorazione di $\|e_n\|_{[a,b]}$ per nodi "spalmati".

Fare lo stesso con la funzione

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x},\ x \in [0.1, 1],$$

interpolata ai nodi $x_0 = 0.125, x_1 = 0.25, x_1 = 0.5, x_3 = 1$.

5 Aumentare il numero dei nodi di interpolazione

Chiediamoci ora se l'approssimazione della funzione f fornita dal polinomio di interpolazione p_n diventa buona quanto si vuole all'aumentare del numero $n+1$ dei nodi di interpolazione.

Questo significa chiedersi se si ha

$$\lim_{n\to\infty} \|e_n\|_{[a,b]} = 0. \tag{4}$$

Se $f \in C^\infty([a,b])$ e f soddisfa la *condizione sulle derivate*: esistono $M, c \geq 0$ tali che

$$\|f^{(k)}\|_{[a,b]} \leq Mc^k,\ k \in \mathbb{N},$$

allora si ha la (4), per ogni scelta dei nodi di interpolazione, vale a dire, precisando meglio, qualunque sia per ogni $n \in \mathbb{N}$ la scelta degli $n+1$ nodi di interpolazione in $[a,b]$.

Infatti, ricordando la maggiorazione di $\|e_n\|_{[a,b]}$ per l'estrapolazione,

$$\|e_n\|_{[a,b]} \leq \frac{(b-a)^{n+1}\|f^{n+1}\|_{[a,b]}}{(n+1)!} \leq \frac{(b-a)^{n+1}\, Mc^{n+1}}{(n+1)!} = M\frac{((b-a)\,c)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

$n \to \infty$.

Esempi di funzioni che soddisfano la precente condizione sulle derivate sono

$$f(x) = A\sin(\omega x),\ g(x) = A\cos(\omega x),\ h(x) = Ae^{\lambda x},\ x \in [a,b],$$

dove $A, \omega, \lambda \in \mathbb{R}$.

Infatti, per $k \in \mathbb{N}$, detto $r(k)$ il resto della divisione di k per 4 si ha,

$$\begin{aligned}
f^{(k)}(x) &= \begin{cases} A\omega^k \sin(\omega x) & \text{se } r(k)=0 \\ A\omega^k \cos(\omega x) & \text{se } r(k)=1 \\ -A\omega^k \sin(\omega x) & \text{se } r(k)=2 \\ -A\omega^k \cos(\omega x) & \text{se } r(k)=3 \end{cases} \\
g^{(k)}(x) &= \begin{cases} A\omega^k \cos(\omega x) & \text{se } r(k)=0 \\ -A\omega^k \sin(\omega x) & \text{se } r(k)=1 \\ -A\omega^k \cos(\omega x) & \text{se } r(k)=2 \\ A\omega^k \sin(\omega x) & \text{se } r(k)=3 \end{cases} \\
h^{(k)}(x) &= A\lambda^k e^{\lambda x},\ x \in [a,b],
\end{aligned}$$

e quindi

$$\|f^{(k)}\|_{[a,b]} \leq |A| \cdot |\omega|^k,\ \|g^{(k)}\|_{[a,b]} \leq |A| \cdot |\omega|^k,\ \|h^{(k)}\|_{[a,b]} \leq |A| \cdot \max_{x\in[a,b]} e^{\lambda x} \cdot |\lambda|^k.$$

Siano ora $f_1, f_2, \ldots, f_n \in C^\infty([a,b])$ soddisfacenti la condizione sulle derivate, cioè per ogni $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ esistono $M_i, c_i \geq 0$ tali che

$$\|f_i^{(k)}\|_{[a,b]} \leq M_i c_i^k,\ k \in \mathbb{N}.$$

Per ogni $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, la combinazione lineare

$$(\sum_{i=1}^n \alpha_i f)(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x),\ x \in [a,b],$$

pure soddisfa la condizione sulle derivate.

Infatti, per $k \in \mathbb{N}$, si ha

$$\begin{aligned}
&\|(\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i)^{(k)}\|_{[a,b]} = \|\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i^{(k)}\|_{[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} \underbrace{|\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i^{(k)}(x)|}_{\leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i|\cdot|f_i^{(k)}(x)| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| M_i c_i^k} \\
&\leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| M_i \underbrace{c_i^k}_{\leq c^k} \leq (\sum_{i=1}^n |\alpha_i| M_i) \cdot c^k.
\end{aligned}$$

dove $c = \max_{i\in\{1,2,\ldots,n\}} c_i$.

Pertanto, ogni combinazione lineare di coseni, seni e esponenziali soddisfa la condizione sulle derivate.

Sotto la condizione sulle derivate, $\|e_n\|_{[a,b]}$ converge a zero, per $n \to \infty$, per ogni scelta dei nodi di interpolazione. Tuttavia se si usano nodi "spalmati" la convergenza è più veloce. Usando la condizione sulle derivate nella maggiorazione di $\|e_n\|_{[a,b]}$ per nodi equidistanti, si ottiene

$$\begin{aligned}\|e_n\|_{[a,b]} &\leq \frac{(b-a)^{n+1}\,\|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{4n^{n+1}\,(n+1)} \leq \frac{(b-a)^{n+1}\,Mc^{n+1}}{4n^{n+1}\,(n+1)} \\ &= \frac{M}{4\,(n+1)}\left(\frac{(b-a)\,c}{n}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

Richiedendo

$$\|e_n\|_{[a,b]} \leq \mathrm{TOL},$$

dove TOL è una tolleranza prefissata sul massimo modulo dell'errore di interpolazione su $[a,b]$, si prende il minimo n tale che

$$\frac{M}{4\,(n+1)}\left(\frac{(b-a)\,c}{n}\right)^{n+1} \leq \mathrm{TOL}.$$

Consideriamo, come esempio, l'interpolazione della funzione

$$f\,(x) = \cos x,\ \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Per una tale funzione risulta $M = 1$ e $c = 1$ (come visto in precedenza, essendo $\cos x = A\cos(\omega x)$ con $A = 1$ e $\omega = 1$). I valori di

$$\frac{M}{4\,(n+1)}\left(\frac{(b-a)\,c}{n}\right)^{n+1} = \frac{1}{4\,(n+1)}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{n+1}$$

sono riportati nella tabella sottostante

n	$\frac{1}{4(n+1)}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{n+1}$
1	$3.1 \cdot 10^{-1}$
2	$4.0 \cdot 10^{-2}$
3	$4.7 \cdot 10^{-3}$
4	$4.7 \cdot 10^{-4}$
5	$4.0 \cdot 10^{-5}$
6	$3.0 \cdot 10^{-6}$
7	$2.0 \cdot 10^{-7}$
8	$1.2 \cdot 10^{-8}$

Per cui, richiedendo ad esempio $\mathrm{TOL} = 10^{-7}$, si prende $n = 8$.

Esercizio. Si osservi che per per costruire il polinomio di interpolazione p_8 sono richiesti i valori della funzione cos nei nodi equidistanti

$$x_i = i\frac{\frac{\pi}{2}}{8} = i\frac{\pi}{16},\ \ i \in \{0, 1, \ldots, 8\}.$$

Per $i \in \{0,4,8\}$, i valori $\cos(x_i)$ sono $1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0$. Determinare i valori $\cos x_i$ per $i \notin \{0,4,8\}$ usando le formule trigonometriche di bisezione e di addizione a partire dal valore $\frac{\sqrt{2}}{2}$ di coseno e seno in $\frac{\pi}{4}$. Questo mostra che non è necessario avere un modo di calcolare $\cos x$ per ogni x, al fine di costruire p_8.

Esercizio. Si consideri l'interpolazione della funzione

$$f(x) = e^x,\ x \in [0,1],$$

su $n+1$ nodi equidistanti. Determinare n in modo da avere $\|e_n\|_{[0,1]} \leq \mathrm{TOL} = 10^{-10}$.

Esercizio. Provare che se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione polinomiale, allora f soddisfa la condizione sulle derivate con $c = 1$. Suggerimento: sia f una funzione polinomiale di grado $\leq n$ e sia $k \in \mathbb{N}$; per $k \geq n+1$ si ha $f^{(k)} = 0$ e per $k \leq n$ si ha

$$\|f^{(k)}\|_{[a,b]} \leq \max_{i \in \{0,1,\ldots,n\}} \|f^{(i)}\|_{[a,b]};$$

quindi

$$\|f^{(k)}\|_{[a,b]} \leq M,\ k \in \mathbb{N},$$

con $M = ...$

Esercizio. Si consideri l'interpolazione della funzione

$$f(x) = x^3 + 2\sin 4\pi x - 3\cos 8\pi x,\ x \in [-2,2],$$

su $n+1$ nodi equidistanti. Determinare n in modo da avere $\|e_n\|_{[0,1]} \leq \mathrm{TOL} = 10^{-10}$. Suggerimento: determinare M e c nella condizione sulle derivate considerando f come combinazione lineare di funzioni che soddisfano la condizione sulle derivate.

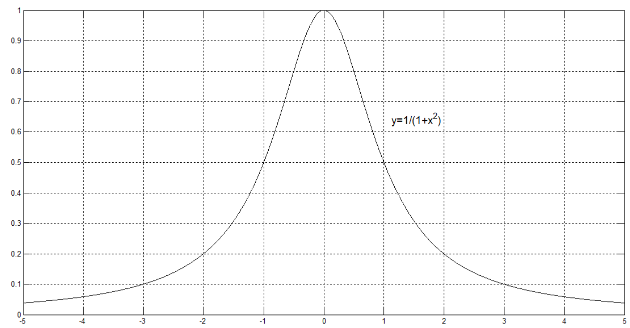
Per una funzione $f \in C^\infty([a,b])$ che non soddisfa la condizione sulle derivate non è assicurato che valga

$$\lim_{n\to\infty} \|e_n\|_{[a,b]} = 0.$$

nemmeno se si usano nodi ben "spalmati" sull'intervallo $[a,b]$ come quelli equidistanti.

Ad esempio, consideriamo la funzione in $C^\infty([-5,5])$,

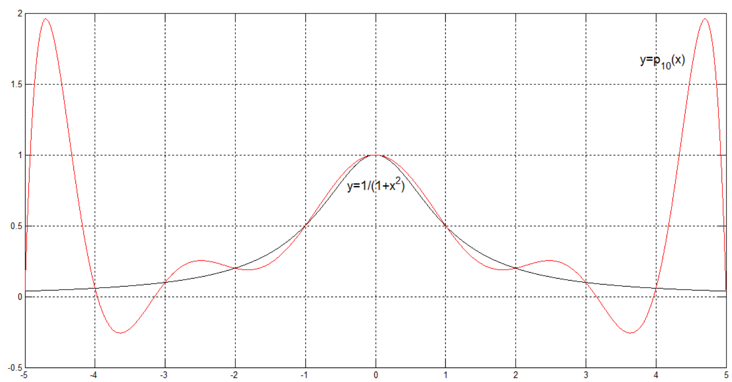
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},\ x \in [-5,5],$$



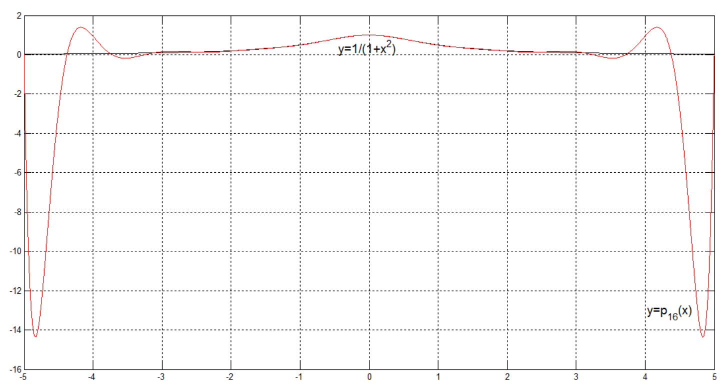
Interpolando tale funzione con i nodi equidistanti, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \|e_n\|_{[-5,5]} = \infty.$$

Come evidenza di questo, in figura è mostrato p_{10} per nodi equidistanti.



Ecco invece p_{16}, sempre per nodi equidistanti.



In questo caso, dove si ha

$$\lim_{n\to\infty} \|e_n\|_{[-5,5]} = \infty,$$

la f non soddisfa la condizione sulle derivate. Le derivate di f crescono più rapidamente della crescita prevista nella condizione sulle derivate.

Dal momento che anche la maggiorazione di $\|e_n\|_{[-5,5]}$ per nodi equidistanti tende a ∞ per $n \to \infty$, cioè

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(b-a)^{n+1} \left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,b]}}{4n^{n+1}(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{10^{n+1} \left\|f^{(n+1)}\right\|_{[-5,5]}}{4n^{n+1}(n+1)} = \infty,$$

si ha che la successione $\|f^{(n+1)}\|_{[-5,5]}$ va a infinito più rapidamente di come va a infinito la successione $\frac{n^{n+1}(n+1)}{10^{n+1}}$.

Il divergere di $\|e_n\|_{[a,b]}$, per $n \to \infty$, prende il nome di *fenomeno di Runge*.

6 Interpolazione a tratti

Si è visto che l'aumento del numero di nodi di interpolazione (anche equidistanti) non è garanzia di una migliore approssimazione della funzione f.

Per ovviare a questo inconveniente vi sono due possibilità.

La prima possibilità è quella di scegliere particolari nodi di interpolazione, detti *nodi di Chebyshev* e dati da

$$x_i = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(b-a)\cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right),\ i \in \{0,1,\ldots,n\},$$

che non tratteremo. Con tali nodi si ha $\lim\limits_{n\to\infty} \|e_n\|_{[a,b]} = 0$ se $f \in C^1([a,b])$.

La seconda possibilità è quella di fare una *interpolazione di Lagrange a tratti* che ora descriviamo.

Siano n, N interi positivi fissati. Si introducono sull'intervallo $[a,b]$ gli $N+1$ nodi equidistanti *primari*

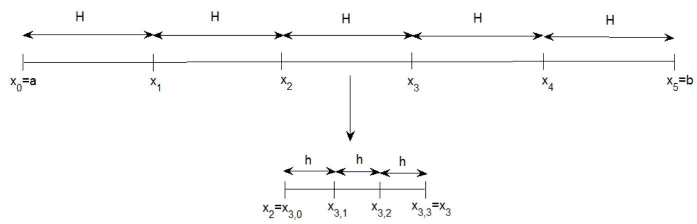
$$x_i = a + iH,\ i \in \{0,1,\ldots,N\} \quad \text{e} \quad H = \frac{b-a}{N},$$

che suddividono l'intervallo $[a,b]$ negli N sottointervalli di ampiezza H

$$I_i = [x_{i-1}, x_i],\ i \in \{1,2,\ldots,N\}.$$

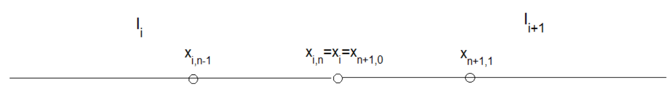
In ogni sottointervallo I_i, $i \in \{1,2,\ldots,N\}$, si introducono poi gli $n+1$ nodi equidistanti *secondari*

$$x_{i,j} = x_{i-1} + jh,\ j \in \{0,1,\ldots,n\} \quad \text{e} \quad h = \frac{H}{n}.$$



In ogni sottointervallo I_i, $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, la funzione f viene approssimata dal polinomio di interpolazione di f relativo ai nodi $x_{i,j}$, $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, che denoteremo con $p_{n,N,i}$: $p_{n,N,i}$ ha grado $\leq n$.

Notare che, per ogni $i \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$, l'ultimo nodo secondario $x_{i,n} = x_i$ dell'intervallo I_i coincide con il primo nodo secondario $x_{i+1,0} = x_i$ dell'intervallo I_{i+1}.



Per cui, nel nodo

$$x_{i,n} = x_i = x_{i+1,0}$$

comune ai sottointervalli I_i e I_{i+1}, i polinomi $p_{n,N,i}$ e $p_{n,N,i+1}$ si "saldano": si ha

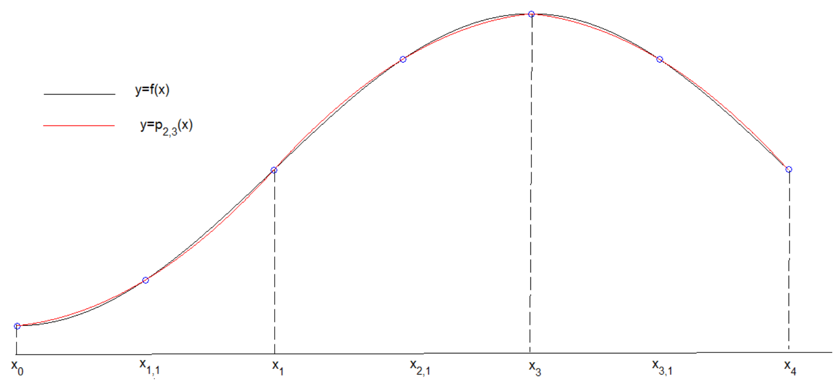
$$p_{n,N,i}\left(x_{i,n}\right) = f\left(x_i\right) = p_{n,N,i+1}\left(x_{i+1,0}\right).$$

Sull'intervallo $[a, b]$, la funzione f è quindi approssimata dal polinomio a tratti $p_{n,N} : [a, b] \to \mathbb{R}$ definito da

$$p_{n,N}\left(x\right) = p_{n,N,i}\left(x\right), \; x \in I_i \text{ e } i \in \{1, 2, \ldots, N\},$$

detto *polinomio di interpolazione di Lagrange a tratti* di f di grado $\leq n$ su N

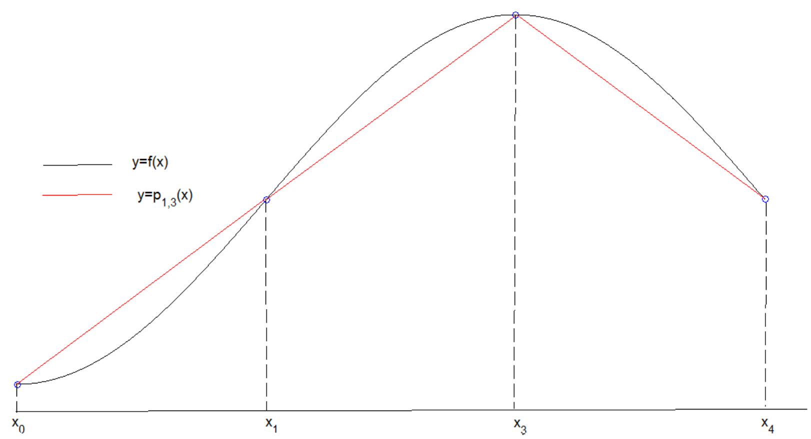
sottointervalli.



Esercizio. Spiegare perché $p_{n,N}$ è una funzione continua.

Nei casi $n = 1, 2, 3$ si parla di *interpolazione lineare*, *quadratica*, *cubica*, rispettivamente, *a tratti*.

Un'illustrazione dell'interpolazione lineare a tratti è data in figura.



L'errore $e_{n,N,i} : I_i \to \mathbb{R}$ sull'intervallo I_i, $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, è dato da

$$e_{n,N,i}(x) = p_{n,N,i}(x) - f(x), \; x \in I_i.$$

Ricordando la maggiorazione di $\|e_n\|_{[a,b]}$ per nodi equidistanti, si ha, per una funzione $f \in C^{n+1}([a,b])$,

$$\|e_{n,N,i}\|_{I_i} \leq \frac{H^{n+1}\|f^{(n+1)}\|_{I_i}}{4n^{n+1}(n+1)} = \frac{(b-a)^{n+1}\|f^{(n+1)}\|_{I_i}}{N^{n+1}4n^{n+1}(n+1)}.$$

L'errore $e_{n,N} : [a,b] \to \mathbb{R}$ dell'interpolazione a tratti è dato da

$$e_{n,N}(x) = p_{n,N}(x) - f(x), \ x \in [a,b],$$

e per $x \in I_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, si ha

$$e_{n,N}(x) = p_{n,N}(x) - f(x) = p_{n,N,i}(x) - f(x) = e_{n,N,i}(x).$$

Si ottiene, per una funzione $f \in C^{n+1}([a,b])$,

$$\|e_{n,N}\|_{[a,b]} \leq \frac{(b-a)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{4n^{n+1}(n+1)} \cdot \frac{1}{N^{n+1}}.$$

Infatti,

$$\begin{aligned}
\|e_{n,N}\|_{[a,b]} &= \max_{i \in \{1,2,\ldots,N\}} \|e_{n,N,i}\|_{I_i} \\
&\leq \max_{i \in \{1,2,\ldots,N\}} \frac{(b-a)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{I_i}}{N^{n+1} 4n^{n+1}(n+1)} \\
&= \frac{(b-a)^{n+1}}{N^{n+1} 4n^{n+1}(n+1)} \cdot \max_{i \in \{1,2,\ldots,N\}} \|f^{(n+1)}\|_{I_i} \\
&= \frac{(b-a)^{n+1}}{N^{n+1} 4n^{n+1}(n+1)} \cdot \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}.
\end{aligned}$$

Tenendo fisso n e facendo tendere N all'infinito si ha, per ogni $f \in C^{n+1}([a,b])$,

$$\lim_{N \to \infty} \|e_{n,N}\|_{[a,b]} = 0$$

e, in particolare,

$$\|e_{n,N}\|_{[a,b]} = O\left(\frac{1}{N^{n+1}}\right), \ N \to \infty.$$

Per cui, nell'interpolazione di Lagrange a tratti si ottengono approssimazioni sempre migliori aumentando il numero N dei sottointervalli, ma tenendo fisso il grado n dei polinomi di interpolazione in ogni sottointervallo in modo da evitare possibili fenomeni di Runge.

Per le interpolazioni lineari, quadratiche e cubiche a tratti gli ordini di convergenza sono $O\left(\frac{1}{N^2}\right)$, $O\left(\frac{1}{N^3}\right)$ e $O\left(\frac{1}{N^4}\right)$, rispettivamente.

Si noti che se si vuole

$$\|e_{n,N}\|_{[a,b]} \leq \text{TOL},$$

dove TOL è una tolleranza prefissata, basta prendere N tale che

$$\frac{(b-a)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{4n^{n+1}(n+1)} \cdot \frac{1}{N^{n+1}} \leq \text{TOL},$$

vale a dire

$$N \geq \frac{(b-a)\ \sqrt[n+1]{\|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}}{n\ \sqrt[n+1]{4\,(n+1)}} \cdot \sqrt[n+1]{\frac{1}{\mathrm{TOL}}}.$$

Si prende allora

$$N = \left\lceil \frac{(b-a)\ \sqrt[n+1]{\|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}}{n\ \sqrt[n+1]{4\,(n+1)}} \cdot \sqrt[n+1]{\frac{1}{\mathrm{TOL}}} \right\rceil.$$

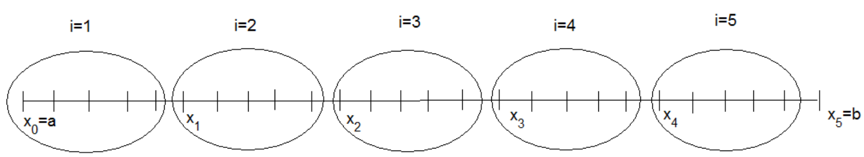
Nel caso in cui risulti difficile calcolare $\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,b]}$, ma sia facile invece determinare una sua maggiorazione M, si prende

$$N = \left\lceil \frac{(b-a)\ \sqrt[n+1]{M}}{n\ \sqrt[n+1]{4\,(n+1)}} \cdot \sqrt[n+1]{\frac{1}{\mathrm{TOL}}} \right\rceil.$$

Notare che, con N sottointervalli, la funzione f deve essere nota su $nN+1$ punti, cioè sui punti

$$x_{i,0} = x_{i-1}, x_{i,1}, \ldots, x_{i,n-1},\ i \in \{1, \ldots, N\}, \tag{5}$$

più x_n.



Notare che in (5) non si considera l'ultimo punto $x_{i,n} = x_i$ per non contarlo due volte: si ha infatti $x_{i+1,0} = x_i$ e quindi esso viene contato non come ultimo punto dell'intervallo i-esimo ma come primo punto dell'intervallo $(i+1)$-esimo.

Nel caso dell'interpolazione lineare il numero dei sottointervalli è

$$N = \left\lceil \frac{(b-a)\ \sqrt{\|f''\|_{[a,b]}}}{\sqrt{8}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\mathrm{TOL}}} \right\rceil$$

e il numero di punti in cui deve essere nota la funzione è $N+1$.

Nel caso dell'interpolazione quadratica il numero dei sottointervalli è

$$N = \left\lceil \frac{(b-a)\ \sqrt[3]{\|f'''\|_{[a,b]}}}{2\sqrt[3]{12}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\mathrm{TOL}}} \right\rceil$$

e il numero di punti in cui deve essere nota la funzione è $2N+1$.

Nel caso dell'interpolazione cubica il numero dei sottointervalli è

$$N = \left\lceil \frac{(b-a)\sqrt[4]{\|f^{(4)}\|_{[a,b]}}}{6} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{\mathrm{TOL}}} \right\rceil$$

e il numero di punti in cui deve essere nota la funzione è $3N+1$.

Come esempio, determiniamo su quanti punti deve essere nota la funzione

$$f(x) = \cos x, \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

per interpolare linearmente, quadraticamente e cubicamente a tratti con $\mathrm{TOL} = 10^{-7}$.

Nel caso dell'interpolazione lineare si ha

$$N = \left\lceil \frac{\frac{\pi}{2}\sqrt{\|-\cos\|_{[0,\frac{\pi}{2}]}}}{\sqrt{8}} \cdot \sqrt{10^7} \right\rceil = \left\lceil \frac{\pi}{2\sqrt{8}} \cdot 10^{\frac{7}{2}} \right\rceil = 1757$$

e il numero di punti in cui deve essere nota la funzione è $N+1 = 1758$.

Nel caso dell'interpolazione quadratica si ha

$$N = \left\lceil \frac{\frac{\pi}{2}\sqrt[3]{\|\sin\|_{[0,\frac{\pi}{2}]}}}{2\sqrt[3]{12}} \cdot \sqrt[3]{10^7} \right\rceil = \left\lceil \frac{\pi}{4\sqrt[3]{12}} \cdot 10^{\frac{7}{3}} \right\rceil = 74.$$

e il numero di punti in cui deve essere nota la funzione è $2N+1 = 149$.

Nel caso dell'interpolazione cubica si ha

$$N \geq \left\lceil \frac{\frac{\pi}{2}\sqrt[3]{\|\cos\|_{[0,\frac{\pi}{2}]}}}{6} \cdot \sqrt[4]{10^7} \right\rceil = \left\lceil \frac{\pi}{12} \cdot 10^{\frac{7}{4}} \right\rceil = 15$$

e il numero di punti in cui deve essere nota la funzione è $3N+1 = 46$.

Si è visto sopra che la funzione cos è approssimata con $\mathrm{TOL} = 10^{-7}$ dal polinomio p_8 di interpolazione di Lagrange non a tratti utilizzando solo 9 valori della funzione.

L'interpolazione di Lagrange a tratti ha però un senso anche in questo caso.

Infatti, se è necessario calcolare moltissimi valori della funzione cos, invece di calcolare moltissime volte i valori del polinomio p_8 di grado 8, può essere conveniente calcolare con p_8 solo il numero richiesto di valori di cos per costruire un polinomio di interpolazione a tratti $p_{n,N}$ di grado n basso e, dopo, calcolare ogni valore di cos con $p_{n,N}$, il quale richiede nel calcolo dei suoi valori meno operazioni di p_8.

Esercizio. Dire su quanti punti deve essere nota la funzione

$$f(x) = e^x, \ x \in [0,1],$$

per interpolare linearmente, quadraticamente e cubicamente a tratti con TOL $= 10^{-7}$.

Esercizio. Si consideri una tabella che contiene i valori $\sin x$ per

$$x = 1^\circ, 2^\circ, \ldots, 90^\circ.$$

Si supponga di calcolare i valori $\sin x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, interpolando linearmente a tratti i valori della tabella. Determinare la maggiorazione per il massimo modulo dell'errore di interpolazione lineare a tratti.

Esercizio. Si voglia approssimare una funzione $f \in C^3([a,b])$ con una interpolazione lineare a tratti o quadratica a tratti utilizzando la formula

$$N = \frac{(b-a)\sqrt[n+1]{\|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}}{n\sqrt[n+1]{4\,(n+1)}} \cdot \sqrt[n+1]{\frac{1}{\mathrm{TOL}}}$$

per determinare il numero di sottointervalli. (In realtà si dovrebbe prendere la parte intera superiore del membro destro, ma anche non prendendola si ha comunque una buona approssimazione del numero di sottointervalli).

Trovare per quali tolleranze TOL, l'interpolazione lineare utilizza un numero di punti in cui f deve essere nota inferiore a quello dell'interpolazione quadratica.

Si applichi il risultato trovato al caso della funzione

$$f(x) = \cos x, \;\; x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$