$10 + 10 + 10 = 30/30$

Università di Trieste, A.A. 2014/2015 - Lauree Triennali in Ingegneria

Fisica Generale 1, Appello Sessione Autunnale - 14.09.2015

Cognome ....COGNOME.... **Nome** ....NOME....

Istruzioni per gli esercizi:
*Per ciascuna domanda rispondere fornendo solo il risultato finale**: la grandezza incognita espressa simbolicamente in funzione delle grandezze date o di quelle ottenute in altre risposte, e poi il corrispondente risultato numerico, con il corretto numero di cifre significative e con le unità di misura appropriate**.*

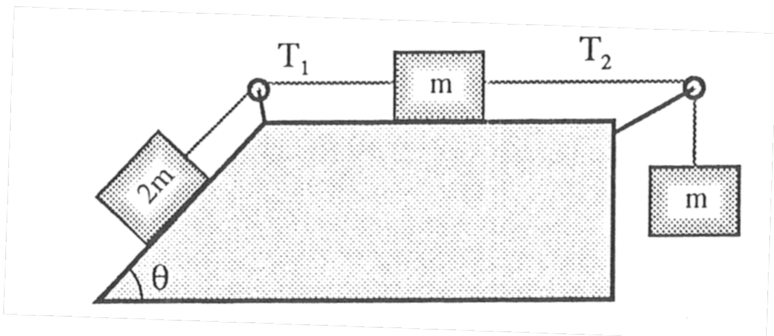


Fig. 1

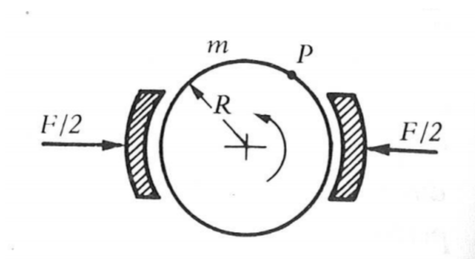
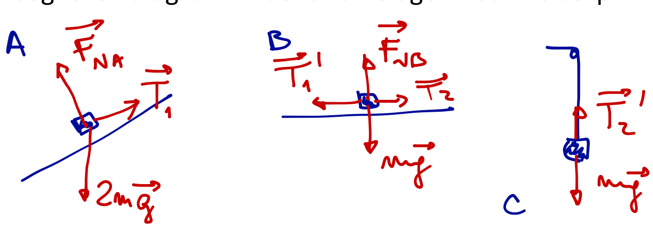


Fig. 2

1.Sia dato il sistema in figura 1, formato da tre corpi, di masse rispettivamente *2m*, *m*, *m* (con *m* = 0.50 kg), collegati da funi ideali, e in cui tutte le superfici sono prive di attrito.

a. Disegnare i diagrammi delle forze agenti sui tre corpi.

3



$$\begin{cases} 2m\vec{g},\ m\vec{g} : \text{forza peso} \\ T_1 = |\vec{T}_1| = |\vec{T}_1'| : \text{tensione prima fune} \\ T_2 = |\vec{T}_2| = |\vec{T}_2'| : \text{" seconda "} \\ \vec{F}_{NA},\ \vec{F}_{NB} : \text{forze normali di contatto} \end{cases}$$

b. Calcolare, sempre in assenza di attrito, il valore minimo θ_{min} dell'angolo θ formato dal piano inclinato con l'orizzontale, tale che per $\theta > \theta_{min}$ il corpo di massa *2m* scenda lungo il piano inclinato, se il sistema, inizialmente fermo, viene lasciato libero di muoversi.

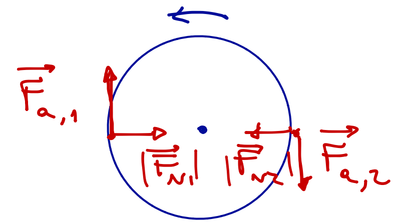
3 $$\theta_{min} = \arcsin \frac{m\cancel{g}}{2m\cancel{g}} = \arcsin(0{,}5) = 30°$$

c. Calcolare il modulo *a* delle accelerazioni dei tre corpi, nel caso in cui l'inclinazione del piano inclinato sia $\theta = 45°$ e vi sia attrito (con coefficiente di attrito dinamico μ_D= 0.20) soltanto nel tratto orizzontale, mentre sul piano inclinato non ci sia attrito.

4 $$|a| = \frac{g}{4}\left|1 + \mu_d - 2\sin\theta\right| = 5{,}2 \times 10^{-1}\ m/s^2$$

2. Un cilindro omogeneo di massa m = 75 kg e raggio R = 0.25 m ruota inizialmente con velocità angolare ω_0 = (5.0 × 2π) rad/s attorno ad un asse fisso orizzontale disposto come in figura 2. All'istante iniziale t_0, due ferodi vengono messi a contatto con la superficie del cilindro e vengono premuti radialmente verso l'asse; la forza normale di contatto tra ciascuno dei due ferodi e il cilindro ha intensità costante $F/2$ = 50 N. Conoscendo il coefficiente di attrito radente μ_d = 0.60 tra le superfici a contatto, determinare:

a. l'accelerazione angolare α del cilindro; e diagramma delle forze applicate ad esso



4 $$\alpha = -\frac{2\mu_d F}{mR} = -6{,}4 \text{ rad}/s^2 < 0$$

b. il numero di giri n compiuti dal cilindro prima di fermarsi. $t_f = -\frac{\omega_0}{\alpha} = 4{,}9$ s

3 $$n = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\omega_0 t_f + \frac{1}{2}\alpha t_f^2\right) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\omega_0^2}{\alpha} = 12{,}3 \text{ giri}$$

c. Il lavoro totale W esercitato dalle forze d'attrito dall'istante iniziale t_0 fino all'arresto del cilindro.

3 $$W_{tot} = W_a = W = -\cancel{2}\mu_d \frac{F}{\cancel{2}} R\,\Delta\theta = -\frac{1}{4} m R^2 \omega_0^2 = -1{,}2 \text{ kJ} < 0$$

3. Una macchina termica ciclica utilizza due sorgenti di calore, rispettivamente alle temperature T_F = 300 K e T_C = 500 K. In ogni ciclo essa assorbe il calore Q_C = 4000 J dalla sorgente a temperatura T_C, fornendo il lavoro W = 800 J.

a) Calcolare il rendimento η della macchina ed il rendimento η_C di una macchina reversibile di Carnot operante tra le stesse temperature.

3 $$\eta = \frac{W}{|Q_c|} = 20\% < \eta_c = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 40\%$$

b) Determinare il lavoro W_R che la macchina reversibile di Carnot potrebbe fornire in un ciclo, assorbendo la stessa quantità di calore Q_C dalla sorgente calda.

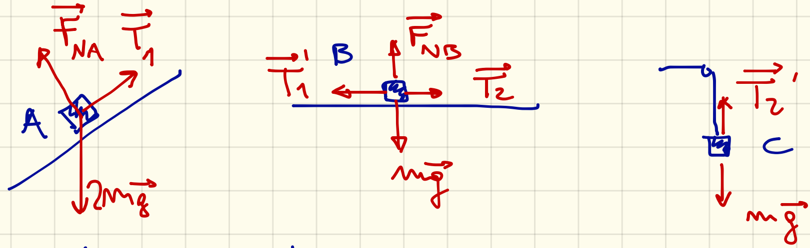
3 $$W_R = \eta_c |Q_c| = 1600 \text{ J}$$

c) Determinare la variazione di entropia ΔS_U dell'Universo (formato dalla macchina termica e dalle sorgenti) in ogni ciclo della macchina termica considerata.

4 $$\Delta S_u = \Delta S_c + \Delta S_F = \frac{-|Q_c|}{T_c} + \frac{|Q_c| - W}{T_F} = 2{,}6 \text{ J/K} > 0$$

PROBLEMA 1 - soluzione

a) diagrammi delle forze applicate



A : $\begin{cases} 2m\vec{g} & \text{gravità} \\ \vec{F}_{NA} & \text{forza normale di contatto} \\ \vec{T}_1 & \text{fune} \end{cases}$

B : $\begin{cases} m\vec{g} & \text{gravità} \\ \vec{F}_{NB} & \text{normale di contatto} \\ \vec{T}_1' & \text{fune a sinistra} \\ \vec{T}_2 & \text{fune a destra} \end{cases}$

$F_{NB} = mg$ (moduli)

$|\vec{T}_1'| = |\vec{T}_1| = T_1$

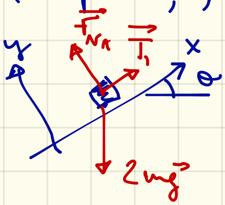
$|\vec{T}_2| = |\vec{T}_2'| = T_2$

C : $\begin{cases} m\vec{g} & \text{gravità} \\ \vec{T}_2' & \text{fune} \end{cases}$

b) equazioni del moto e sistemi di riferimento

per i tre corpi A, B, C : vettori; II legge di Newton

A :



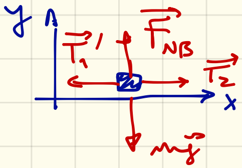
$$2m\vec{g} + \vec{F}_{NA} + \vec{T}_1 = 2m\,\vec{a}_A$$

proiezione sulla direzione x :

$$-2mg\sin\theta + T_1 = 2m\,a_A \qquad (1)$$

($a_A < 0$ se il corpo A scende, partendo da fermo)

B :



II legge di Newton, vettori

$$m\vec{g} + \vec{F}_{NB} + \vec{T}_1' + \vec{T}_2 = m\vec{a}_B$$

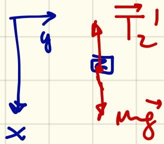
proiezione sull'asse x :

$$-T_1 + T_2 = m\,a_B \qquad (2)$$

$$T_1 = |\vec{T}_1| = |\vec{T}_1'| > 0$$

$$T_2 = |\vec{T}_2| = |\vec{T}_2'| > 0$$

C :



II legge di Newton, vettori :

$$m\vec{g} + \vec{T}_2' = m\vec{a}_c$$

proiezione sull'asse x :

$$mg - T_2 = m\,a_c \qquad (3)$$

con il vincolo delle funi, le 3 proiezioni delle accelerazioni $\vec{a}_A, \vec{a}_B, \vec{a}_c$ lungo le 3 direzioni del moto devono essere uguali :

$a_A = a_B = a_c = a$ < 0 se il corpo A scende

$= 0$ se " " " rimane fermo

> 0 se sale

la condizione limite, che definisce l'angolo θ_{min} richiesto, si può determinare imponendo $a_A = a_B = a_C = a = 0$ cioè:

$$-2mg\sin\theta_{min} + T_1 = 0 \quad (1) \implies \theta_{min} = \arcsin\frac{T_1}{2mg}$$

$$-T_1 + T_2 = 0 \quad (2) \implies T_1 = T_2$$

$$-T_2 + mg = 0 \quad (3) \implies T_2 = mg$$

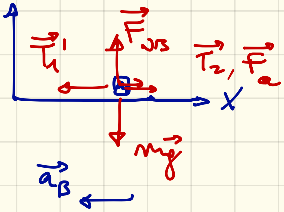
combinando le 3 equazioni si ricava

$$\theta_{min} = \arcsin\frac{mg}{2mg} = \arcsin(0,5) = 30°$$

c) considerando $\theta = 45° > \theta_{min} = 30°$ e introducendo attrito per il corpo B:

$$|\vec{F}_a| = F_a = \mu_d F_{NB} = \mu_d mg$$

attrito



II principio, vettori

$$m\vec{g} + \vec{F}_{NB} + \vec{T}_1' + \vec{T}_2 + \vec{F}_a = m\vec{a}_B$$

proiezione sull'asse x:

$$-T_1 + T_2 + \mu_d mg = m a_B \overset{!}{=} ma \quad (2')$$

combinando con le altre due equazioni

$$\begin{cases} -2mg\sin\theta + T_1 = 2ma & (1) \\ -T_2 + mg = ma & (3) \end{cases}$$

risolvendo nelle 3 incognite a, T_1 e T_2 si ottiene:

$$(3) \implies T_2 = mg - ma$$

$$(1) \implies T_1 = 2ma + 2mg\sin\theta$$

sostituendo nella (2'):

$$-2\cancel{m}a - 2\cancel{m}g\sin\theta + \cancel{m}g - \cancel{m}a + \mu_d\cancel{m}g = \cancel{m}a$$

$$-4a = g\left(2\sin\theta - 1 - \mu_d\right)$$

$$a = \frac{g}{4}\left(1 + \mu_d - 2\sin\theta\right) =$$

$$= \frac{9{,}8}{4}\left(1{,}2 - 2 \times 0{,}707\right) = -0{,}52\ m/s^2$$

$\theta = 45°$

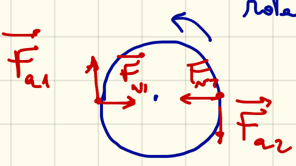
($a < 0$ perché il corpo A scende)

$$\Rightarrow \boxed{|a| = \frac{g}{4}\left|1 + \mu_d - 2\sin\theta\right| = 5{,}2 \times 10^{-1}\ m/s^2}\ ✓$$

PROBLEMA 2 - soluzione

a) per determinare l'accelerazione angolare del cilindro uso la II equazione cardinale del moto, per rotazioni di corpo rigido con asse fisso

rotazione iniziale, vel. angolare ω_0



asse z uscente

$$|\vec{F}_{a1}| = |\vec{F}_{a2}| = F_a = \mu_d F/2$$

$$\sum \tau_z = I\alpha \quad , \quad I = \frac{1}{2}mR^2$$

$$\sum \tau_z = -2F_a \cdot R = -\cancel{2}\mu_d \frac{F}{\cancel{2}} \cdot R$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\sum \tau_z}{I} = -\frac{\mu_d F \cancel{R}}{1/2\, m R^{\cancel{2}}} = \ldots$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{2\mu_d F}{mR} = -\frac{2 \times 0{,}60 \times 100}{75 \times 0{,}25} = -6{,}4 \text{ rad}/s^2$$

$$\begin{cases} m = 75 \text{ kg} \\ R = 0{,}25 \text{ m} \\ F/2 = 50 \text{ N} \Rightarrow F = 100 \text{ N} \\ \mu_d = 0{,}60 \end{cases}$$

b) il moto rotatorio risulta essere uniformemente decelerato. posso usare le equazioni della cinematica, ad esempio

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t \qquad \begin{cases} \text{avendo posto } t_0 = 0 \\ \alpha < 0 \quad (\text{vedi sopra}) \end{cases}$$

determino l'istante d'arresto t_f :

$$\omega(t_f) = 0 = \omega_0 + \alpha t_f \Rightarrow t_f = -\frac{\omega_0}{\alpha} = 4{,}91 \text{ s}$$

l'angolo di rotazione totale allo stesso istante è

$$\theta(t_f) = \underbrace{\theta_0}_{\text{angolo iniziale}} + \omega_0 t_f + \frac{1}{2}\alpha t_f^2 \qquad \alpha < 0$$

$\Rightarrow$ il numero di giri richiesto è

$$n = \frac{\theta(t_f) - \theta_0}{2\pi} = \frac{\omega_0 t_f + \frac{1}{2}\alpha t_f^2}{2\pi} = \frac{154{,}22 - 77{,}15}{6{,}28} = 12{,}3 \text{ giri}$$

$\omega_0 = 31{,}41 \text{ rad/s} \qquad \alpha = -6{,}4 \text{ rad}/s^2$

$t_f = 4{,}91 \text{ s}$

in radianti :

$$\Delta\theta = \omega_0 t_f + \frac{1}{2}\alpha t_f^2 = 77{,}1 \text{ rad}$$

c) lavoro delle forze d'attrito :

$$W_a = \sum \tau_z \cdot \underbrace{(\theta(t_f) - \theta_0)}_{\Delta\theta} = -\mu_d F R \cdot \Delta\theta$$

$$= -0{,}6 \times 100 \times 0{,}25 \times 77{,}1$$

$$= -1{,}16 \text{ kJ}$$

verifica : deve corrispondere alla variazione di energia cinetica del sistema, dato che il lavoro totale in questo caso corrisponde al lavoro delle forze d'attrito.

$$W_a = W_{tot} = K_f - K_i =$$

$$= 0 - \frac{1}{2} \underbrace{I}_{\frac{1}{2} m R^2} \omega_0^2 = -\frac{1}{4} m R^2 \omega_0^2$$

$$= -\frac{75 \times 0{,}25^2 \times 100\pi^2}{4} =$$

$$= -1{,}16 \text{ kJ}$$

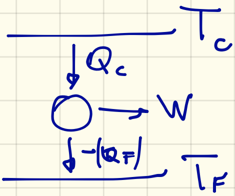
OK risultato compatibile

NB : portando avanti i calcoli per via algebrica, i risultati (b) e (c) si possono esprimere anche come :

$$n = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left[\omega_0\left(-\frac{\omega_0}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}\cancel{\alpha}\frac{\omega_0^2}{\alpha^{\cancel{2}}}\right] = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\omega_0^2}{2\alpha}\right) = -\frac{\omega_0^2}{4\pi\alpha}$$

$$W_a = -\mu_d F R\,\Delta\theta = \frac{\mu_d F R\,\omega_0^2}{2\alpha} = \frac{\cancel{\mu_d F} R\,\omega_0^2}{2}\cdot\left(-\frac{m R}{2\cancel{\mu_d F}}\right) = -\frac{1}{4} m R^2 \omega_0^2$$

PROBLEMA 3 - soluzione



$$\begin{cases} T_F = 300\ K \\ T_c = 500\ K \\ Q_c = 4000\ J \\ W = 800\ J \end{cases}$$

macchina irreversibile !

a) rendimento

$$\eta = \frac{W}{Q_c} = \frac{800\ J}{4000\ J} = 0{,}20 = 20\%$$

per un ciclo reversibile di Carnot con le stesse sorgenti:

$$\eta_c = 1 - \frac{T_F}{T_c} = 1 - \frac{3\cancel{00}}{5\cancel{00}} = \frac{2}{5} = 0{,}40 = 40\%$$

(risulta come previsto $\eta < \eta_c$)

b) per una macchina reversibile che assorbe Q_c :

$$W_K = \eta_c \cdot Q_c = 0{,}40 \times 4000\ J = 1600\ J$$

c) variazione di entropia totale dell'universo su un ciclo della macchina irreversibile:

$$\Delta S_U = \Delta S_m + \Delta S_c + \Delta S_F$$

macchina : sorgente calda ; sorgente fredda

su un ciclo $\Delta S_m = 0\ J/K$ (funzione di stato)

ΔS_c : la sorgente calda cede il calore $-|Q_c| = -Q_c = -800\,J$

il calcolo della variazione di entropia va fatto su una trasformazione reversibile alla temperatura T_c della sorgente:

$$\Delta S_c = \frac{-|Q_c|}{T_c} = -\frac{40\cancel{00}}{5\cancel{00}}\frac{J}{K} = -8{,}0\,\frac{J}{K}$$

ΔS_F : la sorgente fredda acquista una quantità di calore

$$|Q_F| = |Q_c| - W = 4000\,J - 800\,J = 3200\,J$$

(poiché per la macchina termica su un ciclo

$$\Delta U = 0 = Q - W = |Q_c| - |Q_F| - W = 0$$

$$\Rightarrow |Q_F| = |Q_c| - W \,)$$

analogamente, applicando la definizione di variazione di entropia della sorgente fredda:

$$\Delta S_F = \frac{|Q_F|}{T_F} = \frac{|Q_c| - W}{T_F} = \frac{32\cancel{00}\,J}{3\cancel{00}\,K} = 10{,}7\,J/K$$

$$\Rightarrow \Delta S_u = \Delta S_c + \Delta S_F = \frac{-|Q_c|}{T_c} + \frac{|Q_c| - W}{T_F} =$$

$$= -8{,}0 + 10{,}7 = 2{,}7\,J/K > 0$$

l'entropia dell'universo aumenta, come previsto per processi irreversibili.