

Università degli Studi di Trieste
Facoltà di Ingegneria

APPUNTI del CORSO di ELETTROTECNICA

Introduzione ai campi elettromagnetici

prof. ing. Stefano Longhi

a.a. 2017-2018

Contents

1	TESTI CONSIGLIATI	3
2	INTRODUZIONE	4
3	ELETTROSTATICA	5
3.1	Legge di Coulomb	5
3.2	Il campo elettrico	5
3.3	Linee di flusso	7
3.4	Densità di flusso elettrico	7
3.5	Il teorema di Gauss	8
3.6	Differenza di potenziale elettrico ed energia	9
3.7	Il potenziale di una carica puntiforme	10
3.8	Densità di energia nel campo elettrostatico	11
4	CONDUTTORI, DIELETTRICI E CAPACITA'	14
4.1	Conduttori metallici	14
4.2	Materiali dielettrici	15
4.3	Materiali semiconduttori	16
4.4	Capacità	17
5	MAGNETOSTATICA	19
5.1	Legge di Biot-Savart	19
5.2	Legge circuitale di Ampere	20
5.3	Flusso magnetico e densità di flusso magnetico	21
6	FORZE MAGNETICHE, MATERIALI ED INDUTTANZE	22
6.1	Forza di Lorentz	22
6.2	Materiali magnetici	23
6.3	Isteresi magnetica	23
6.4	Magnetizzazione e permeabilità	24
6.5	Circuiti magnetici	25
6.6	Energia potenziale e campi magnetici	27
6.7	Induttanza	28
6.8	Mutua induttanza	29
6.9	Energia e ciclo di isteresi	30
7	CAMPI VARIABILI NEL TEMPO	31
7.1	Legge di Faraday	31
7.2	Corrente di spostamento	33
8	EQUAZIONI DI MAXWELL	34
9	APPENDICE	35

1 TESTI CONSIGLIATI

1. D. Halliday, R. Resnick: "Fisica 2", Casa Editrice Ambrosiana, Milano.
2. L. Lovitch, S. Rosati: "Fisica generale: elettricità, magnetismo, ottica", Casa Editrice Ambrosiana, Milano.
3. L. Lovitch, S. Rosati: "Fisica generale : elettricità, magnetismo, elettromagnetismo, relatività ristretta, ottica, meccanica quantistica", Casa Editrice Ambrosiana, Milano.
4. F. Lobkowicz, A. C. Melissinos, "Fisica per scienze e ingegneria ", ed. Piccin, Padova.
5. P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci, "Elettromagnetismo, onde", ed. EdiSES, Napoli.
6. C. Mencuccini, V. Silvestrini, "Fisica 2: elettromagnetismo, ottica: corso di fisica per le facoltà scientifiche corredato di esempi ed esercizi " Liguori, Napoli.
7. F. Ciampolini: "Elettrotecnica generale", Pitagora Editrice, Bologna.
8. W. H. Hayt Jr., J. A. Buck: "Engineering Electromagnetics", McGraw-Hill.
9. C. K. Alexander, M. N.O. Sadiku: "Circuiti Elettrici", Mc-Graw-Hill, Milano.
10. G. Martinelli, M. Salerno: "Fondamenti di Elettrotecnica, vol. I e II", ed. Siderea, Roma.
11. V. Daniele, A. Liberatore, R. Graglia e S. Manetti: "Elettrotecnica", Monduzzi Editore, Bologna.
12. M. Guarneri, G. Malesani: "Reti elettriche: Elementi di Elettrotecnica, vol. I e II", Ed. libreria Progetto, Padova.
13. P. P. Civalleri: "Elettrotecnica", ed. Levrotto&Bella, Torino.

LIBRI DI ESERCIZI

1. S. A. Nasar: "3000 solved problems in electric circuits", Schaum's solved problems series, Mc-Graw-Hill, New York.
2. M. Biey: "Esercitazioni di Elettrotecnica", CLUT, Torino.
3. A. Liberatore, S. Manetti, M.C. Piccirilli e A. Reatti: "Circuiti Elettrici ed Elettronici", collana Tutor, ETAS libri, Milano.
4. S. Bobbio: "Esercizi di Elettrotecnica", CUEN, Napoli.

2 INTRODUZIONE

In queste poche pagine, intendiamo proporre degli appunti che siano di ausilio allo studio dei campi elettromagnetici, fornendo una traccia da seguire nella preparazione di questa parte dell'esame, ma che non possono assolutamente sostituire nè l'assidua frequenza delle lezioni, nè l'integrazione fornita dai testi citati nell'apposito elenco.

A riguardo della lista di libri ed eserciziari citati, il loro nutrito numero trova giustificazione nel fatto che lo studente deve abituarsi a cercare ed approfondire i singoli argomenti trattati nel corso su più testi, confrontandone il metodo espositivo e le argomentazioni correlate. Questa abitudine mentale sarà molto importante non solo nel prosieguo degli studi, ma anche nella successiva vita professionale. Siamo all'Università ormai, e non ci si può più permettere il lusso di limitarsi a studiare pedissequamente da un unico testo, ma bisogna abituarsi a sviluppare un certo senso critico, indispensabile per la professione di ingegnere.

Infine, ribadiamo ancora il concetto che la frequenza *attiva* delle lezioni è necessaria a una buona comprensione (con conseguente superamento dell'esame!) della materia svolta, dove con attiva si intende che si debba cercare di comprendere quello che si sente a lezione, trasferendolo sotto forma di *appunti* sulla carta e ponendo domande al docente sui punti non perfettamente chiari.

Questi appunti affrontano il delicato problema di introdurre lo studente allo studio dei fenomeni legati all'elettricità e al magnetismo, cominciando dai primi esperimenti fatti molto tempo fa, per finire con la massima espressione della teoria dell'elettromagnetismo, le equazioni di Maxwell.

Il nome elettricità deriva dal greco e significa ambra. Già nel 600 a.C. Talete di Mileto osservò che pezzetti di paglia venivano attratti da un pezzetto di ambra strofinato. B. Franklin (1706-1790) fu il primo fisico a distinguere la carica in *positiva* e *negativa*. La prima appare sul vetro strofinato con la seta, mentre la seconda sulla plastica (lacca). Franklin notò che cariche positive o negative si respingono, mentre cariche di segno diverso si attraggono.

Lo studio del magnetismo risale all'osservazione che un minerale esistente in natura (la magnetite) attrae il ferro. La parola deriva dalla zona di Magnesia nell'Asia Minore, una località dove furono trovate tali pietre.

3 ELETTROSTATICA

Il nome elettrostatica si applica allo studio degli effetti che hanno delle cariche elettriche in quiete sull'ambiente e sui materiali circostanti.

Cominciamo lo studio dell'elettrostatica dalle osservazioni di C. Coulomb.

3.1 Legge di Coulomb

Nel 1785, Charles Coulomb fece degli esperimenti con una bilancia di torsione sulle cariche elettriche. Trovò che, per cariche puntiformi, vale la seguente legge:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R^2} \quad (3.1)$$

dove il valore misurato della costante ϵ_0 , detta *permittività del vuoto*, è pari a:

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ C}^2/\text{N m}^2 [\text{F/m}]. \quad (3.2)$$

La forza \mathbf{F}_2 , agente sulla carica Q_2 da parte di Q_1 , è diretta secondo la congiungente le cariche puntiformi, da Q_1 a Q_2 , ed è attrattiva o repulsiva a seconda del segno delle cariche. Si ha perciò:

$$\mathbf{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R_{12}^2} \mathbf{a}_{12} \quad (3.3)$$

dove $\mathbf{a}_{12} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{|\mathbf{R}_{12}|}$ è il vettore unitario che identifica la congiungente le due cariche. Ovviamente vale il principio di azione e reazione, per cui la forza esercitata da Q_1 su Q_2 vale:

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R_{12}^2} \mathbf{a}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R_{12}^2} \mathbf{a}_{21} \quad (3.4)$$

la forza di Coulomb è additiva per più cariche.

L'unità di carica, detta coulomb [C], potrebbe essere definita a partire da questa legge. Invece è definita a partire dalla corrente: l'unità SI di carica è definita come la quantità di carica che attraversa in un secondo una qualsiasi sezione di un filo nel quale circoli la corrente di 1 ampere [A]: $q = i t$.

Si è scoperto che la carica è quantizzata e la carica fondamentale $-e$ dell'elettrone è pari a $-1.6021892 \cdot 10^{-19}$ C.

Quando strofino una bacchetta di vetro con un panno di seta, sulla bacchetta appare una carica positiva e sulla seta una carica negativa di egual valore. Quindi lo strofinio non produce carica, ma la trasferisce dal vetro alla seta. Questa è la legge di *conservazione della carica*.

3.2 Il campo elettrico

Ogni carica Q_1 crea un campo che agisce su un'altra carica Q_2 per mezzo di una forza \mathbf{F}_2 . Analogamente, la carica Q_1 subisce il campo creato dalla carica Q_2 mediante una forza $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$.

Per definire il vettore *campo elettrico* \mathbf{E}_1 di una carica Q_1 , in modo operativo, poniamo una piccola carica di prova positiva Q_2 nel punto che si deve esaminare, a distanza R_{12}

da Q_1 , e misuriamo la forza elettrica \mathbf{F}_{12} che agisce sulla carica. L'intensità del campo elettrico \mathbf{E}_1 è data dalla forza esercitata sulla carica unitaria positiva:

$$E_1 = \frac{F_{12}}{Q_2} \quad (3.5)$$

mentre la direzione e il verso sono uguali a quelli di \mathbf{F} . Il vettore campo elettrico è quindi uguale a:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{F}_{12}}{Q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R^2} \mathbf{a}_{12} \quad (3.6)$$

dove \mathbf{a}_{12} è il versore che esce da Q_1 e punta su Q_2 .

Per trovare \mathbf{E} dovuto a N cariche puntiformi, si possono sommare vettorialmente i campi \mathbf{E}_n dovuti alle singole cariche:

$$\mathbf{E} = \sum_{n=1}^N \mathbf{E}_n \quad (3.7)$$

Il campo di un dipolo elettrico (formato da due cariche $+Q$ e $-Q$ poste a distanza d) nel piano di simmetria delle cariche e a distanza R ($R \gg d/2$) dall'asse del dipolo è pari a: $E = (1/4\pi\epsilon_0)(p/R^3)$, dove $p = dq$ è il *momento del dipolo elettrico*. La sua direzione è perpendicolare al piano di simmetria, verso la carica negativa. Si definisce anche un vettore momento del dipolo elettrico come:

$$\mathbf{p} = Q \mathbf{d} \quad (3.8)$$

dove \mathbf{d} è il vettore diretto dalla carica negativa alla positiva ed è lungo d .

Se consideriamo una linea infinita di cariche, di densità di carica ρ_L , possiamo calcolarne il campo estendendo la formula presentata in (3.7). Consideriamo un punto P a distanza \mathbf{r} dalla linea, dove \mathbf{r} è il vettore normale (da O) che congiunge la linea da O a P. Per motivi di simmetria, essendo la linea infinita, il campo dovrà essere radiale, diretto secondo \mathbf{r} . L'elemento di linea infinitesimo dQ , lungo dl , congiunto da $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ a P (\mathbf{r}' , è il vettore che congiunge O a dQ), contribuirà al campo totale radiale in P con un campo infinitesimo di valore:

$$dE_\rho = \frac{\rho_L dl}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin \theta = -\frac{\rho_L \sin \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.9)$$

dove $R = |\mathbf{R}|$, $r = |\mathbf{r}|$ e θ è l'angolo tra dQ e la linea; inoltre $l = \frac{r}{\tan \theta}$, da cui $dl = -\frac{r d\theta}{\sin^2 \theta}$, e $R = \frac{r}{\sin \theta}$. Integrando il campo da $-\infty$ a ∞ , che equivale a dire sommando i contributi infinitesimi del campo su tutta la linea, otteniamo:

$$E_\rho = -\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0 r} \int_\pi^0 \sin \theta d\theta = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0 r} \cos \theta \Big|_\pi^0 = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (3.10)$$

Infine, consideriamo un sistema cartesiano di assi xyz e un piano infinito, con densità di carica ρ_S , posto sugli assi yz . Esaminiamo una sottile striscia di carica piana posta a distanza y' dall'origine e con densità di carica lineare pari a: $\rho_L = \rho_S dy'$. La distanza della striscia dal punto P, posto sull'asse x , dove vogliamo valutare il campo è $R = \sqrt{x^2 + y'^2}$. Per ragioni di simmetria, essendo il piano infinito, il campo sarà normale al piano, quindi

rivolto secondo l'asse x . Il contributo al campo E_x in P da questa striscia differenziale è ricavato dalla formula (3.10):

$$dE_x = \frac{\rho_S dy'}{2\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y'^2}} \cos\theta = \frac{\rho_S x dy'}{2\pi\epsilon_0(x^2 + y'^2)} \quad (3.11)$$

dove θ è l'angolo al punto P tra l'asse x e il raggio congiungente P alla striscia. Considerando l'effetto di tutte le strisce, otteniamo se $x > 0$:

$$E_x = \frac{\rho_S}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dy'}{(x^2 + y'^2)} = \frac{\rho_S}{2\pi\epsilon_0} \left[\tan^{-1} \frac{y'}{x} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \quad (3.12)$$

Il campo è quindi costante. Notiamo che $E_x = -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}$ se $x < 0$.

Se si considerano due conduttori piani, uno posto a $x = 0$ (caricato con ρ_S) e l'altro a $x = a > 0$ (caricato con $-\rho_S$), il campo è la somma dei campi dovuti ai conduttori considerati separatamente $\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x > a & E_x = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} - \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} = 0 \\ x < 0 & E_x = -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0} + \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} = 0 \\ 0 < x < a & E_x = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} + \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} = \frac{\rho_S}{\epsilon_0} \end{array} \right. \quad (3.13)$$

3.3 Linee di flusso

Le linee di flusso sono utili per rappresentare il campo elettrico e sono tracciate seguendo le due regole:

1. sono tangenti al campo elettrico in ogni punto,
2. il numero di linee che attraversano una superficie di area unitaria è proporzionale all'intensità del campo \mathbf{E} .

3.4 Densità di flusso elettrico

Nel 1837 Michael Faraday si interessò ai fenomeni relativi al campo elettrostatico. Fece molti esperimenti, tra cui provare a chiudere due sfere concentriche di metallo, di cui l'interna caricata con carica Q e l'esterna scarica, una sull'altra, senza contatto reciproco. La sfera esterna risultava carica della stessa carica in valore assoluto Q , ma di segno opposto. Concluse che c'era una specie di "spostamento" di carica dalla sfera interna all'esterna attraverso l'isolante: ci riferiamo a questo spostamento chiamandolo *flusso di spostamento* o semplicemente *flusso elettrico*. Si ha:

$$\Psi = Q \quad (3.14)$$

dove Ψ è misurato in coulomb [C].

Se la sfera interna ha raggio a e carica Q e quella esterna raggio b e carica $-Q$, le linee del flusso elettrico dalla sfera interna a quella esterna sono rappresentate da linee radiali uniformemente distribuite. Sulla sfera interna, Ψ C di flusso elettrico sono distribuiti su

un'area di $4\pi a^2$ m², con una densità di flusso di $Q/4\pi a^2$ C/m². La *densità di flusso di spostamento*, o semplicemente *densità di spostamento* (displacement), misurato in C/m², è indicato con la lettera \mathbf{D} . La direzione e il verso di \mathbf{D} è quella delle linee di flusso in quel punto. Nel nostro esempio delle sfere, si ha:

$$\mathbf{D}|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi a^2} \mathbf{a}_r, \quad \mathbf{D}|_{r=b} = \frac{Q}{4\pi b^2} \mathbf{a}_r; \quad (3.15)$$

il flusso a distanza $a < r < b$ è:

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r \quad (3.16)$$

Pensiamo di rendere puntiforme la sfera interna e di allontanare all'infinito la sfera esterna. Il flusso a distanza r è sempre:

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r \quad (3.17)$$

mentre il campo elettrico:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \quad (3.18)$$

Ne risulta che:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (3.19)$$

Nello spazio libero i due vettori sono proporzionali, mentre nei materiali non è sempre vero, come vedremo in seguito.

3.5 Il teorema di Gauss

Da queste osservazioni, ne risulta *il teorema di Gauss*:

Il flusso elettrico passante attraverso una qualsiasi superficie chiusa è eguale alla carica totale contenuta all'interno della superficie.

Pensiamo ad una superficie chiusa di forma qualsiasi, contenente una carica Q indifferentemente distribuita. La superficie sarà attraversata da un flusso $\Psi = Q$. Consideriamo ora un quadratino di detta superficie di area ΔS e associamo a questo quadratino un vettore $\Delta \mathbf{S}$ di direzione normale alla superficie, di verso uscente e di modulo ΔS . Al centro di questo quadratino sarà definito un vettore \mathbf{D}_S , dove S sta ad indicare che il vettore \mathbf{D} è valutato sulla superficie. Il flusso che passa per il quadratino è pari a:

$$\Delta \Psi = \mathbf{D}_S \cdot \Delta \mathbf{S} \quad (3.20)$$

pari al flusso calcolato sulla proiezione della superficie sulla normale di \mathbf{D} . Il flusso totale è la somma dei flussi $\Delta \Psi$ appena calcolati, calcolata con un integrale di superficie, ed è pari a:

$$\Psi = \int_S d\Psi = \oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = Q \quad (3.21)$$

dove Q è la carica chiusa internamente alla superficie, sommata algebricamente. Nel caso di una distribuzione di carica volumetrica ρ_v , la carica racchiusa in un certo volume è:

$$Q_V = \int_{\text{vol}} \rho_v dv \quad (3.22)$$

Il teorema di Gauss, per una superficie S e il relativo volume racchiuso, contenente una densità di carica ρ_v , può dunque essere scritto nella seguente forma:

$$\oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} \rho_v dv \quad (3.23)$$

Una superficie chiusa di tal fatta è spesso denominata come *superficie gaussiana*.

Consideriamo una superficie chiusa \mathbf{S} e calcoliamo il flusso Ψ_E attraverso questa superficie chiusa. Ricordando il rapporto tra il vettore campo elettrico e quello di spostamento, si ottiene:

$$\epsilon_0 \Psi_E = Q \quad (3.24)$$

Come conseguenza del teorema di Gauss, si può ricavare la seguente legge:

un eccesso di carica, posto su un conduttore isolato, si distribuisce sulla superficie esterna.

Consideriamo una superficie gaussiana subito all'interno della superficie di un conduttore carico. Se le cariche all'interno del conduttore sono in stato di quiete, allora il campo elettrico è nullo. Quindi il flusso attraverso la superficie è zero, e così la carica all'interno è nulla, e quindi tutta la carica è disposta sulla superficie.

3.6 Differenza di potenziale elettrico ed energia

Se vogliamo muovere una carica Q a distanza $d\mathbf{L}$ in un campo elettrico \mathbf{E} , dobbiamo esercitare una forza sulla carica Q uguale e opposta alla forza esercitata dal campo elettrico sulla carica, che è pari a:

$$\mathbf{F}_E = Q \mathbf{E} \quad (3.25)$$

La componente F_{appl} sulla direzione \mathbf{a}_L di $d\mathbf{L}$ è pari a:

$$F_{\text{appl}} = -\mathbf{F}_E \cdot \mathbf{a}_L = -Q \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_L \quad (3.26)$$

Il lavoro differenziale esercitato è allora:

$$dW = -Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (3.27)$$

Il lavoro per spostare una carica di una distanza finita è pari a:

$$W = -Q \int_{\text{inizio}}^{\text{fine}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (3.28)$$

È un integrale di linea, esteso lungo tutta la linea su cui si vuol far muovere la carica. Se il campo è uniforme lungo tutto il percorso, si ottiene che:

$$W = -Q \int_{\text{inizio}}^{\text{fine}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -Q \mathbf{E} \cdot \int_{\text{inizio}}^{\text{fine}} d\mathbf{L} = -Q \mathbf{E} \cdot \int_A^B d\mathbf{L} = -Q \mathbf{E} \cdot \mathbf{L}_{AB} \quad (3.29)$$

Si vede che l'integrale non dipende dalla linea lungo cui è avvenuto lo spostamento, ma solo dagli estremi dello spostamento. Si può dimostrare che la stessa affermazione vale anche per campo non uniforme.

Definiamo come *differenza di potenziale* tra A e B il lavoro fatto per spostare una carica unitaria positiva dal punto B al punto A in un campo elettrico:

$$V_{AB} = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (3.30)$$

L'unità di misura è il volt [V], che corrisponde al joule/coulomb [J/C].

Pensiamo ad una resistenza percorsa da una corrente continua dal morsetto A al morsetto B. Se la caduta di potenziale tra A e B è positiva, la resistenza dissipa energia per effetto Joule, quindi il campo elettrico svolge un lavoro positivo. Ma il problema è: da dove prende l'energia che dissipa in calore? Naturalmente è la batteria a cui è collegata a fornirle l'energia, e noi siamo interessati a sapere quanta energia si deve fornirle. E' per questo che calcoliamo il lavoro che si deve svolgere per far muovere l'unità di carica da B ad A, in senso inverso al passaggio della corrente, in quanto calcoliamo il lavoro che noi dobbiamo fornire e che è trasformato in energia potenziale: questa energia sarà restituita dal campo elettrico durante lo scorrere della corrente. Lo stesso ragionamento può esser fatto se pensiamo ad avvicinare una carica positiva ad un'altra carica, per esempio positiva. Dobbiamo compiere un lavoro, trasformato in energia potenziale, che sarà restituito dal campo elettrico se lasciamo andare la carica.

Troviamo la differenza di potenziale tra due punti A e B a distanze radiali r_A e r_B dalla carica Q . Si ha che (vedi (3.6)):

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r, \quad d\mathbf{L} = dr \mathbf{a}_r \quad (3.31)$$

quindi:

$$V_{AB} = - \int_{\text{inizio}}^{\text{fine}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_B^A \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad (3.32)$$

Se $r_A < r_B$ e $Q > 0$, allora la differenza di potenziale è positiva, indicando che la sorgente esterna spende dell'energia per portare la carica positiva vicina all'altra carica positiva, cosa che è in accordo con il rilievo sperimentale per cui due cariche positive si respingono.

Per una linea di carica, la differenza di potenziale tra un punto a distanza $\rho = b$ a un punto $\rho = a$ è pari a (vedi (3.10)):

$$W = -Q \int_{\text{inizio}}^{\text{fine}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -Q \int_b^a \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \Rightarrow V_{ab} = \frac{W}{Q} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \quad (3.33)$$

3.7 Il potenziale di una carica puntiforme

L'espressione (3.32) vale per qualsiasi coppia di punti a distanza r_A e r_B dalla carica puntiforme Q , comunque siano disposti nello spazio. La differenza di potenziale non dipende dalla linea usata per lo spostamento. Possiamo allora definire un punto a potenziale zero di riferimento, situato all'infinito. Così, se $r = r_B \rightarrow \infty$, il potenziale in r_A diventa:

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A} \quad (3.34)$$

Quindi V_A è il lavoro che deve essere compiuto per portare la carica di 1 C dall'infinito al punto distante r_A dalla carica Q . In generale, possiamo scrivere che il potenziale di un

punto a distanza r dalla carica Q è:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + C_1 \quad (3.35)$$

dove C_1 può essere scelto in modo da mettere a zero il potenziale a qualsiasi distanza r_1 da Q .

Una *superficie equipotenziale* è una superficie composta da tutti i punti aventi lo stesso potenziale, per cui non si compie nessun lavoro spostando una carica lungo una superficie equipotenziale. Per la carica puntiforme Q , le superfici equipotenziali sono delle sfere concentriche.

Se consideriamo un insieme N di cariche puntiformi, il potenziale nel punto \mathbf{r} è dato da (\mathbf{r}_n punta alla carica Q_n):

$$V(\mathbf{r}) = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \sum_{n=1}^N \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|} \quad (3.36)$$

per la proprietà di additività dei potenziali dati dalle singole cariche, proprietà derivata dall'additività del campo elettrico. Il potenziale è riferito allo zero posto all'infinito. Vale la pena ripetere che l'integrale non dipende dal percorso fatto per congiungere i punti di partenza e arrivo. La differenza di potenziale è:

$$V_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} = V_{\mathbf{r}_1} - V_{\mathbf{r}_2} = - \int_{\mathbf{r}_2}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (3.37)$$

che implica un risultato fondamentale:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \quad (3.38)$$

la differenza di potenziale è nulla su un percorso chiuso, cioè non si fa nessun lavoro nello spostare una carica lungo un percorso chiuso. Ogni campo che soddisfa l'equazione (3.38) è detto *conservativo*, nel senso che l'energia si conserva, nessun lavoro è fatto su un percorso chiuso. Si può fare un'analogia con il campo gravitazionale. L'equazione (3.38) è una forma generale del secondo principio di Kirchhoff per i circuiti, come vedremo. E' valida in un campo statico o quasi-statico, mentre se il campo varia velocemente dovrà essere corretta.

Si può dimostrare che vale l'equazione inversa:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V = - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \quad (3.39)$$

con cui troviamo il campo elettrico conoscendo il potenziale, dove l'operatore "grad" significa gradiente.

3.8 Densità di energia nel campo elettrostatico

Nei precedenti capitoli, abbiamo visto che si deve compiere un lavoro per spostare una carica in un campo elettrico. Se spostiamo una carica dall'infinito vicino ad un'altra carica e la manteniamo in posizione, compiamo un lavoro, e poichè l'energia si conserva, l'energia

spesa per portare la carica in posizione si trasforma in energia potenziale. Se allentiamo la presa sulla carica, questa si allontanerà ritornando all'infinito, trasformando pertanto l'energia potenziale in energia cinetica. Così per trovare l'energia potenziale presente in un sistema di cariche, si deve calcolare il lavoro speso per portarle in posizione.

Pensiamo ad un universo vuoto, senza cariche. Portare a destinazione la prima carica Q_1 non comporta alcun lavoro. Il posizionamento di Q_2 comporta invece un lavoro, dal momento che ora esiste il campo elettrico generato da Q_1 . quindi il lavoro L_2 è:

$$L_2 = Q_2 V_{2,1} \quad (3.40)$$

dove $V_{2,1}$ è il potenziale della carica Q_2 dovuto alla carica Q_1 nella sua posizione. Se aggiungiamo una carica Q_3 , il lavoro è:

$$L_3 = Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2} \quad (3.41)$$

e per posizionare una carica Q_4 si ha:

$$L_4 = Q_4 V_{4,1} + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3} \quad (3.42)$$

e così via per tutte le cariche del sistema.

Il lavoro totale, pari all'energia potenziale del sistema, è:

$$W_E = \underbrace{Q_2 V_{2,1}}_{L_2} + \underbrace{Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2}}_{L_3} + \underbrace{Q_4 V_{4,1} + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3}}_{L_4} + \dots \quad (3.43)$$

Dal momento che:

$$Q_3 V_{3,1} = Q_3 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} = Q_1 \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{31}} = Q_1 V_{1,3} \quad (3.44)$$

e scambiando gli indici per tutti i termini, si ottiene un'equivalente espressione per l'energia potenziale:

$$W_E = Q_1 V_{1,2} + Q_1 V_{1,3} + Q_2 V_{2,3} + Q_1 V_{1,4} + Q_2 V_{2,4} + Q_3 V_{3,4} + \dots \quad (3.45)$$

Sommando le due espressioni dell'energia potenziale, si ottiene.

$$\begin{aligned} 2W_E &= Q_1 (V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \dots) + Q_2 (V_{2,1} + V_{2,3} + V_{2,4} + \dots) \\ &\quad + Q_3 (V_{3,1} + V_{3,2} + V_{3,4} + \dots) + \dots \end{aligned} \quad (3.46)$$

Nelle espressioni tra parentesi, troviamo i potenziali delle singole cariche, cioè:

$$\begin{cases} V_1 = V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \dots \\ V_2 = V_{2,1} + V_{2,3} + V_{2,4} + \dots \\ \dots \end{cases} \quad (3.47)$$

da cui si ottiene l'espressione finale dell'energia potenziale:

$$W_E = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + \dots) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M Q_m V_m \quad (3.48)$$

Nel caso di una distribuzione di carica volumetrica ρ_v , l'energia potenziale diventa:

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \rho_v V \, dv \quad (3.49)$$

Con alcuni passaggi matematici, che qui non riportiamo, si può ottenere la seguente espressione dell'energia potenziale:

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, dv = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \underbrace{\epsilon_0}_{\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}} E^2 \, dv \quad (3.50)$$

L'energia è distribuita nel volume con una densità pari a $\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$ J/m³.

Questa espressione può essere utile per calcolare l'energia immagazzinata sotto forma di campo elettrico in un materiale dielettrico.

4 CONDUTTORI, DIELETTICI E CAPACITA'

La corrente elettrica è formata da cariche in movimento libero all'interno di un materiale. L'unità di misura è l'ampere [A], definita come il passaggio di 1 coulomb per secondo in una data sezione di un filo. Si ha perciò:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (4.1)$$

Il moto di elettroni in un conduttore, il rame per esempio, è la corrente elettrica in un filo. Il filo avrà una certa sezione, per cui possiamo pensare alla corrente che scorre nell'unità di superficie del filo: si definisce perciò la densità di corrente elettrica \mathbf{J} . Pensando al flusso del campo elettrico, analogamente possiamo considerare la corrente totale come il flusso della densità di corrente, per cui:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.2)$$

Esiste un *principio di conservazione delle cariche*, per cui si possono solo separare le cariche di segno opposto, ma non si possono creare dal nulla. Questo si traduce nella seguente equazione:

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ_i}{dt} \quad (4.3)$$

quindi le cariche Q_i presenti all'interno di una superficie chiusa diminuiscono se c'è una corrente I uscente (positiva). L'equazione (4.3) è la versione integrale della *equazione di continuità della corrente*, che porterà al primo principio di Kirchhoff dei circuiti.

4.1 Conduttori metallici

I conduttori metallici sono dei solidi che non hanno intervallo energetico tra la banda di conduzione e la banda di valenza. Gli elettroni dei livelli energetici più alti della banda di valenza possono entrare facilmente nella banda di conduzione, se sollecitati opportunamente. Quindi, sotto l'azione di un campo elettrico, gli elettroni si muovono liberamente lungo il reticolo cristallino del materiale conduttore, ad una velocità di deriva \mathbf{v}_d . In generale vale la seguente relazione:

$$\mathbf{J} = \mathbf{v}_d \rho_v \quad (4.4)$$

La relazione tra il campo elettrico applicato e la densità di corrente ottenuta è invece:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (4.5)$$

dove σ è la *conduttività* misurata in siemens per metro (S/m). Questa è la forma puntuale della legge di Ohm dei circuiti. La conduttività è una funzione del metallo e della temperatura. Appliciamo questa legge a un conduttore cilindrico omogeneo in cui il campo e la densità di corrente siano considerati uniformi. Si ha:

$$\begin{aligned} I &= \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = J S \\ V_{ab} &= -\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\mathbf{E} \cdot \int_b^a d\mathbf{L} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{L}_{ba} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{L}_{ab} = E L \\ \Rightarrow J &= \frac{I}{S} = \sigma E = \sigma \frac{V}{L} \Rightarrow V = \frac{L}{\sigma S} I = \rho \frac{L}{S} I \end{aligned} \quad (4.6)$$

la costante $\rho = 1/\sigma$ è la *resistività* del materiale. essa varia quasi linearmente con la temperatura alla temperatura ambiente, e per alluminio, rame e argento aumenta di circa 0.4 % per ogni grado kelvin. Valori di resistività sono riportati in Tabella 1.

<i>Materiale</i>	ρ (Ω cm)
Polistirene	1×10^{18}
Silicio	2.3×10^5
Carbonio	4×10^{-3}
Alluminio	2.7×10^{-6}
Rame	1.7×10^{-6}

Tabella 1

Si noti la differenza tra la resistività di materiali conduttori e materiali isolanti. La *resistenza elettrica* è definita come:

$$R = \rho \frac{L}{S} \Rightarrow V = RI \quad (4.7)$$

Questa è la *legge di Ohm*, dove la resistenza R si misura in ohm [Ω], equivalente a $[V/A]$.

Consideriamo un conduttore in cui è presente un campo elettrico \mathbf{E} . Una carica Q è sottoposta ad una forza: $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$, per cui si muove lungo il reticolo cristallino ad una velocità di deriva \mathbf{v}_d . La potenza p dissipata è:

$$p = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_d = Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_d \quad (4.8)$$

La potenza dissipata per unità di volume è:

$$\frac{dp}{dV} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_d \frac{dQ}{dV} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_d \rho_v = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (4.9)$$

in ogni punto del materiale, e dove è stata applicata la eq. (4.4). Le dimensioni sono $[W/m^3]$. Quando i vettori \mathbf{E} e \mathbf{J} sono concordi, la potenza dissipata è positiva, come succede in una resistenza. Quando, invece, i due vettori sono discordi, la potenza dissipata è negativa, quindi fornita al circuito, come succede in una batteria. Quando la potenza è dissipata in calore, si parla di *effetto Joule*.

Se noi integriamo la densità di potenza su un volume cilindrico, otteniamo l'espressione tipica dei circuiti:

$$p = V_{AB} I \quad (4.10)$$

dove V_{AB} è la differenza di potenziale agli estremi del cilindro, mentre I è la corrente che lo percorre. In un conduttore omogeneo cilindrico, si può anche scrivere:

$$W = F L = Q E L = Q V_{AB} \Rightarrow p = \frac{dW}{dt} = V_{AB} \frac{dQ}{dt} = V_{AB} I \quad (4.11)$$

4.2 Materiali dielettrici

I materiali dielettrici o isolanti sono dei solidi che hanno un grande intervallo energetico tra la banda di conduzione e la banda di valenza, e quindi gli elettroni dei livelli energetici più

alti della banda di valenza non possono entrare facilmente nella banda di conduzione, anche se sollecitati da un campo elettrico intenso. Gli elettroni non si muovono liberamente sotto l'azione di un campo elettrico, ma rimangono vincolati alla struttura cristallina.

Una caratteristica importante comune a tutti i dielettrici è quella di poter immagazzinare energia elettrica internamente. Questo immagazzinamento ha luogo sotto forma di spostamento, dalla posizione di riposo, della posizione reciproca delle cariche presenti a livello molecolare, positive e negative. Le molecole, sia le polari che le non polari, sono spostate dal campo elettrico applicato in modo da formare dipoli, e la carica complessiva dei dipoli è chiamata Q_b . Ritorniamo alla legge di Gauss, scritta con il vettore campo elettrico su una superficie chiusa interna al dielettrico:

$$Q_T = \oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.12)$$

dove

$$Q_T = Q_b + Q \quad (4.13)$$

la carica totale Q_T è data dalla somma della carica vincolata Q_b e della carica libera Q . Introduciamo un nuovo vettore \mathbf{P} (polarizzazione) che tenga conto della carica vincolata Q_b presente in un dielettrico, in modo tale che:

$$Q_b = - \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.14)$$

Quindi:

$$Q = Q_T - Q_b = \oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} \quad (4.15)$$

Definiamo ora il vettore spostamento elettrico in termini più generali di quanto fatto prima, cioè:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (4.16)$$

Da cui finalmente:

$$Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.17)$$

dove Q è la carica libera inclusa nel dielettrico.

La relazione tra \mathbf{P} ed \mathbf{E} non è lineare, in generale, per materiali ferroelettrici come il titanato di bario, spesso usato nei condensatori ceramici. La relazione lineare, quando esiste, è invece:

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (4.18)$$

dove χ_e è la *suscettività* elettrica del materiale, un numero adimensionale. Usando questa relazione si ottiene:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} = (\chi_e + 1) \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad (4.19)$$

dove ϵ è la *permittività assoluta* e ϵ_r è la *permittività relativa*.

4.3 Materiali semiconduttori

I materiali semiconduttori sono dei solidi che hanno un piccolo intervallo energetico tra la banda di conduzione e la banda di valenza, e quindi gli elettroni dei livelli energetici più alti della banda di valenza possono entrare nella banda di conduzione, se sollecitati da un campo elettrico intenso. Si rimanda ai corsi di elettronica per un esame approfondito della questione.

4.4 Capacità

Consideriamo due conduttori immersi e separati in un materiale dielettrico. Il conduttore M_2 ha una carica totale positiva Q , mentre il conduttore M_1 ha una carica totale negativa $-Q$. Non ci sono altre cariche presenti. Essendo le cariche in quiete, sappiamo che le cariche risiedono sulle superfici dei conduttori. Inoltre c'è un flusso elettrico uscente da M_2 e diretto verso M_1 , perpendicolare ai conduttori (senza dimostrazione). Le superfici dei conduttori sono equipotenziali, con la superficie di M_2 ad un potenziale maggiore della superficie di M_1 , il che ci dice che deve essere fatto del lavoro per portare una carica positiva da M_1 a M_2 . Indichiamo con V_0 la differenza di potenziale tra i due conduttori. Si definisce come capacità del sistema dielettrico-conduttori il rapporto:

$$C = \frac{Q}{V_0} \quad (4.20)$$

In generale, determiniamo Q eseguendo un integrale di superficie intorno al conduttore positivo e V_0 portando una carica unitaria positiva dal conduttore negativo al positivo:

$$C = \frac{\oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{-\int_-^+ \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}} \quad (4.21)$$

La capacità è indipendente dal potenziale e dalla carica totale, poichè il loro rapporto è costante. La capacità è misurata in farad [F], definito 1 coulomb per 1 volt.

Consideriamo due conduttori piani affacciati, a distanza d . Il conduttore in basso ($z = 0$) ha una densità di carica uniforme pari a ρ_S , mentre il conduttore in alto ($z = d$) ha una densità di carica uniforme pari a $-\rho_S$. Il campo elettrico uniforme tra i due conduttori è, secondo la (3.13):

$$E = \frac{\rho_S}{\epsilon} \quad (4.22)$$

diretto normalmente dalla piastra positiva alla negativa. Il dielettrico ha una costante dielettrica ϵ . La differenza di potenziale tra le superfici è:

$$V_0 = -\int_d^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\int_d^0 \frac{\rho_S}{\epsilon} dz = \frac{\rho_S}{\epsilon} d \quad (4.23)$$

Per ottenere un valore di capacità, si deve limitare ad un valore finito la carica presente sulle piastre. Consideriamo due piastre di area S , le cui dimensioni lineari sono molto maggiori di d . Allora il campo interno ha l'espressione data sopra con una buona approssimazione, eccetto ai bordi delle piastre, ma ciò è accettabile. Sapendo che:

$$Q = \rho_S S \quad (4.24)$$

si ottiene il valore della capacità pari a:

$$C = \frac{Q}{V_0} = \epsilon \frac{S}{d} \quad (4.25)$$

Un condensatore immagazzina energia sotto forma di campo elettrico. Possiamo calcolarla, nel caso del condensatore piano, partendo dalla eq. (3.50):

$$\begin{aligned} W_E &= \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \epsilon E^2 dv = \frac{1}{2} \int_0^S \int_0^d \epsilon \frac{\rho_S^2}{\epsilon^2} dz dS = \frac{1}{2} \frac{\rho_S^2}{\epsilon} S d = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon S}{d} \right) \left(\frac{\rho_S^2 d^2}{\epsilon^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} Q V_0 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Questa espressione dell'energia immagazzinata è valida per tutti i condensatori lineari.

Consideriamo ora un cavo coassiale lungo L , con un conduttore interno di raggio a ed uno esterno di raggio b e permittività ϵ . La differenza di potenziale tra i due è data dall'equazione (3.33). Dal momento che la carica è $Q = \rho_S L$, la capacità è:

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln(b/a)} \quad \text{F} \quad (4.27)$$

mentre la capacità per unità di lunghezza è:

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)} \quad \text{F/m} \quad (4.28)$$

Consideriamo ora due sfere concentriche di raggio a e b , con $b > a$ e permittività ϵ . L'espressione del campo elettrico è (con la legge di Gauss):

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \quad (4.29)$$

L'espressione della differenza di potenziale è stata ottenuta in (3.32), dove Q è la carica totale sulla sfera interna. La capacità è allora:

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \quad (4.30)$$

Se il raggio esterno va all'infinito, allora si ottiene la capacità di una sfera:

$$C = 4\pi\epsilon a \quad (4.31)$$

5 MAGNETOSTATICA

Introduciamo ora il campo magnetico e le sue leggi. Cominceremo con una definizione dello stesso campo magnetico e il suo legame con una distribuzione di corrente. Ignoreremo, invece, i magneti permanenti, per concentrarci sulle relazioni tra le correnti e il campo magnetico.

5.1 Legge di Biot-Savart

Introduciamo il vettore \mathbf{H} , chiamato *intensità di campo magnetico*. Consideriamo un elemento differenziale (infinitesimo) di corrente percorso da una corrente continua (per ora) I . L'elemento in questione è derivato da un pezzetto di conduttore cilindrico lungo $d\mathbf{L}$, il cui raggio tende al limite a zero. La legge di Biot-Savart afferma che il campo magnetico nel punto P è:

$$d\mathbf{H}_P = \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} = \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} \quad (5.1)$$

dove \mathbf{R} è il vettore che congiunge l'elemento infinitesimo di corrente con il punto P e \mathbf{a}_R è il suo versore. Quindi si deve effettuare un prodotto vettore tra $d\mathbf{L}$ e \mathbf{R} . Questa legge è anche chiamata *legge di Ampere per l'elemento di corrente*. Questa legge, così com'è formulata, non può essere verificata sperimentalmente. Il campo magnetico H è misurato in [A/m].

Dal momento che I è una corrente continua, la densità di carica è costante. Ciò comporta che l'equazione di continuità della corrente (4.3) diventa:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (5.2)$$

La corrente totale che attraversa qualsiasi superficie chiusa è nulla, e questa condizione può essere soddisfatta solo assumendo che la corrente scorra in un percorso chiuso. Così assumiamo come sorgente non l'elemento differenziale, ma il percorso chiuso. Si passa allora alla *versione integrale della legge di Biot-Savart*, che può essere verificata sperimentalmente:

$$\mathbf{H} = \oint_L \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} \quad (5.3)$$

Consideriamo un filamento infinitamente lungo di corrente percorso da una corrente I . Possiamo ricavare il campo sia usando la (5.1) che la (5.3), pensando a un ritorno del filo infinitamente lontano. Ad ogni modo, per ragioni di simmetria, le linee di flusso del campo sono circolari, centrate attorno al filo. In coordinate cilindriche, considerando l'elemento infinitesimo di corrente in $(0, \varphi, z)$ e il punto P in $(\rho, \varphi, 0)$:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = \rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z \quad (5.4)$$

Perciò il versore \mathbf{a}_R è uguale a:

$$\mathbf{a}_R = \frac{\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \quad (5.5)$$

Se $d\mathbf{L} = dz \mathbf{a}_z$, l'equazione (5.1) diventa:

$$d\mathbf{H}_P = \frac{I dz \mathbf{a}_z \times (\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z)}{4\pi (\rho^2 + z^2)^{3/2}} \quad (5.6)$$

e quindi il campo totale si ottiene come:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_P &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I dz \mathbf{a}_z \times (\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z)}{4\pi (\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho dz \mathbf{a}_\varphi}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{I \rho \mathbf{a}_\varphi}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\varphi \end{aligned} \quad (5.7)$$

Ecco dimostrata l'asserzione di prima.

5.2 Legge circuitale di Ampere

Analogamente all'elettrostatica dove abbiamo visto prima la legge di Coulomb e poi quella di Gauss, presentiamo ora la legge circuitale di Ampere, dopo aver visto la legge di Biot-Savart. Quest'ultima può essere ricavata dalla prima, però prendiamola come una legge verificata sperimentalmente. Come nella legge di Gauss, è fondamentale considerare le simmetrie eventuali per risolvere più agilmente il problema di trovare il campo magnetico in una data configurazione delle correnti. La legge è formulata nel seguente modo:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I \quad (5.8)$$

Definiamo come positiva la corrente che fluisce nella direzione di avanzamento di una vite destrorsa fatta ruotare nel senso del percorso della linea chiusa. Notate che la corrente I è sempre continua. Quindi, qualsiasi percorso venga scelto per l'integrazione di H , il risultato è sempre pari alla corrente I che passa all'interno della curva chiusa, qualunque forma essa abbia. Per capire cosa significa curva chiusa, pensiamo ad un elastico in cui è fatto passare un filo elettrico di un circuito. Comunque io attorcigli e pieghi l'elastico, l'integrale (detta circuitazione) lungo quell'elastico mi darà sempre I .

Abbiamo trovato con Biot-Savart, in (5.7), il campo di un filo percorso da una corrente I . Determiniamolo ora con la legge di Ampere. Consideriamo un percorso circolare posto in un piano perpendicolare al filo e con raggio ρ . Con la legge di Biot-Savart, senza eseguire i calcoli, ma solo pensando al prodotto vettore, deduciamo che debba esistere solo la componente H_φ del campo, con modulo costante se ρ è costante. Segue che:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^{2\pi} H_\varphi \rho d\varphi = H_\varphi \rho \int_0^{2\pi} d\varphi = H_\varphi \rho 2\pi = I \Rightarrow H_\varphi = \frac{I}{2\pi\rho} \quad (5.9)$$

Consideriamo ora un cavo coassiale con conduttori di raggio a e b e lungo d . Troviamo il campo nel materiale tra i due conduttori. Il percorso chiuso è, in questo caso, un cerchio di raggio ρ ($a < \rho < b$) dove scrivere la legge di Ampere. Possiamo scrivere le stesse equazioni riportate sopra, con lo stesso risultato. Cambia il discorso se consideriamo un percorso esterno ai due conduttori. In quel caso, la corrente totale è nulla, per cui anche il campo è nullo.

Consideriamo ora una bobina, o solenoide, di raggio R , con N spire avvolte in aria su una lunghezza d , percorse da una corrente I . Il campo, ben dentro al solenoide, è disposto lungo l'asse del solenoide, con il verso determinato dalla regola della mano destra (vite destrorsa, etc) secondo il verso di percorrenza delle spire da parte della corrente. Supponiamo nullo il campo esterno al solenoide stesso. L'intensità di campo è perciò, applicando la legge di Ampere su un percorso che passa all'interno e all'esterno del solenoide:

$$H d = N I \Rightarrow H = \frac{NI}{d} \quad (5.10)$$

5.3 Flusso magnetico e densità di flusso magnetico

Introduciamo ora il vettore \mathbf{B} , chiamato *densità di flusso magnetico*, nello spazio vuoto come:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (5.11)$$

dove \mathbf{B} è misurato in weber per metro quadro [Wb/m^2] o in tesla [T]. La costante μ_0 , chiamata *permeabilità magnetica*, ha il valore nello spazio vuoto di:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} \quad (5.12)$$

dove il simbolo [H] sta per henry, come vedremo più tardi. Notate che, poichè H è misurato in [A/m], il weber ha una dimensione uguale a [$\text{H}\cdot\text{A}$]. Il vettore \mathbf{B} appartiene alla famiglia dei vettori di densità di flusso, come il vettore \mathbf{D} . In una possibile analogia con il campo elettrico, si possono comparare tra loro le leggi di Biot-Savart e la legge di Coulomb, stabilendo così un'analogia tra i vettori \mathbf{E} e \mathbf{H} . Per il vettore \mathbf{B} si può scrivere che il flusso magnetico Φ attraverso una superficie S è:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{Wb} \quad (5.13)$$

analogamente al flusso di \mathbf{D} nel campo elettrico, pari a:

$$\Psi = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad (5.14)$$

La carica Q è la sorgente delle linee di flusso del campo elettrico, che partono dalle cariche positive per finire nelle cariche negative. Non ci sono sorgenti analoghe nel campo magnetico, non esistono "cariche monopolo magnetiche". Ricordate che il campo generato da un filo percorso da corrente forma cerchi concentrici attorno al filo stesso. Le linee di \mathbf{B} , che nel vuoto è proporzionale a \mathbf{H} , seguono lo stesso andamento.

Ne consegue che la legge di Gauss per il campo magnetico è:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (5.15)$$

Vediamo un esempio: calcoliamo il flusso magnetico in un cavo coassiale con raggio dei conduttori a e b , lungo d e percorso da una corrente I . Il vettore \mathbf{B} è pari a:

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \quad (5.16)$$

Il flusso è:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^d \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} d\rho dz = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (5.17)$$

Questa espressione sarà usata per trovare l'induttanza di un cavo coassiale.

6 FORZE MAGNETICHE, MATERIALI ED INDUTTANZE

Come il campo elettrico, anche il campo magnetico esercita una forza su una particella carica in movimento. Cominciamo il capitolo prendendo in considerazione questo aspetto dell'interazione tra campo elettrico e magnetico.

6.1 Forza di Lorentz

Si è misurata sperimentalmente la forza che agisce su una particella carica in movimento in un campo magnetico. Consideriamo una particella con carica Q , in movimento alla velocità \mathbf{v} in un campo magnetico di cui conosciamo il vettore \mathbf{B} . si ha che:

$$\mathbf{F} = Q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (6.1)$$

Notiamo che il vettore accelerazione indotto dal campo magnetico è sempre perpendicolare al vettore velocità, per cui non ne varia mai il modulo, a differenza di quello che succede con la legge di Coulomb per il campo elettrico. L'energia cinetica della particella rimane quindi invariata, se il campo magnetico è costante. La forza combinata di un campo elettrico e di uno magnetico è:

$$\mathbf{F} = Q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (6.2)$$

Questa equazione è nota come *equazione della forza di Lorentz*.

Pensiamo ad una particella elementare, di carica dQ . la forza esercitata su questa particella elementare è:

$$d\mathbf{F} = dQ \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (6.3)$$

In un conduttore, scorrono tante particelle elementari, e se è presente un campo magnetico, tutte le particelle elementari subiranno una forza secondo la formula (6.3). La forza si trasferisce al conduttore stesso. Inoltre, il lieve spostamento degli elettroni che fluiscono nel filo causa una differenza di potenziale perpendicolare al filo e al campo magnetico, chiamato *effetto Hall*. Ritornando alle cariche in moto, si può ottenere la seguente formula per un conduttore rettilineo lungo L :

$$\mathbf{F} = I \mathbf{L} \times \mathbf{B} \quad (6.4)$$

L'ampiezza della forza è:

$$F = BIL \sin \theta \quad (6.5)$$

dove θ è l'angolo fra i vettori rappresentanti la direzione del filo e la densità del flusso magnetico.

Possiamo scrivere in generale per un circuito chiuso:

$$\mathbf{F} = -I \oint \mathbf{B} \times d\mathbf{L} \quad (6.6)$$

dove il cambio di segno è dovuto all'inversione dei termini del prodotto vettore (non è commutativo). Se il campo di induzione è costante, si ottiene:

$$\mathbf{F} = -I \mathbf{B} \times \underbrace{\oint d\mathbf{L}}_{=0} = 0 \quad (6.7)$$

Quindi il campo genera una forza nulla complessiva. Non è però nulla la forza sui singoli tratti del circuito, per cui si genera una coppia che agisce sulla spira. Calcoliamo la coppia per una spira piana immersa in un campo magnetico uniforme. Definiamo come *momento del dipolo magnetico*, per una spira piana, la seguente quantità:

$$\mathbf{m} = I \mathbf{S} \quad (6.8)$$

dove \mathbf{S} è un vettore normale alla spira di lunghezza pari all'area della spira stessa. Se il campo \mathbf{B} è uniforme, il momento agente sulla spira è:

$$\mathbf{T} = I \mathbf{S} \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (6.9)$$

Notate che la coppia agisce in modo da allineare la spira con il campo magnetico esterno.

Analogamente, un dipolo elettrico (vedi 3.8) immerso in un campo elettrico uniforme è sottoposto al momento di valore:

$$\mathbf{T} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (6.10)$$

dove il campo elettrico tende ad allineare il dipolo con il campo elettrico.

6.2 Materiali magnetici

Il comportamento magnetico dei materiali è dovuto sia al campo generato dagli elettroni in orbita attorno ai relativi nuclei, sia al campo magnetico dovuto alla rotazione su se stessi degli elettroni (spin). Dalle varie combinazioni di questi campi, in presenza o assenza di un campo esterno, possiamo classificare i materiali nel modo seguente:

- *Materiali diamagnetici*: il campo \mathbf{B} risultante all'applicazione di un campo esterno è leggermente inferiore al campo \mathbf{B} applicato (bismuto, idrogeno, elio, rame, oro, silicio, grafite).
- *Materiali paramagnetici*: il campo \mathbf{B} risultante all'applicazione di un campo esterno è leggermente superiore al campo \mathbf{B} applicato (potassio, ossigeno, tungsteno, terre rare).
- *Materiali ferromagnetici*: il campo \mathbf{B} risultante all'applicazione di un campo esterno è superiore di molto al campo \mathbf{B} applicato (ferro, nickel, cobalto). Questi materiali, inoltre, presentano un comportamento particolare all'applicazione e alla diminuzione dell'intensità del campo esterno, per cui il valore del campo \mathbf{B} interno è funzione della storia magnetica del materiale, secondo un fenomeno chiamato *isteresi*.

6.3 Isteresi magnetica

Consideriamo il legame tra H e B in un materiale ferromagnetico. In Fig. 1¹ è rappresentata la curva di prima magnetizzazione di un materiale ferromagnetico. Partendo dall'origine del grafo (il materiale presenta un flusso magnetico nullo quando il campo magnetico applicato è nullo), vediamo che B cresce rapidamente fino a quando H raggiunge un valore di circa 100 A·spire/m, dopo di che comincia a saturare. Raggiunto un valore massimo di $H_x = 300$ A·spire/m, riduciamo ora il valore di H , passando alla Fig.

¹In Fig. 1 l'unità di misura $A \cdot t$ (ampere·turns) corrisponde a A·spire.

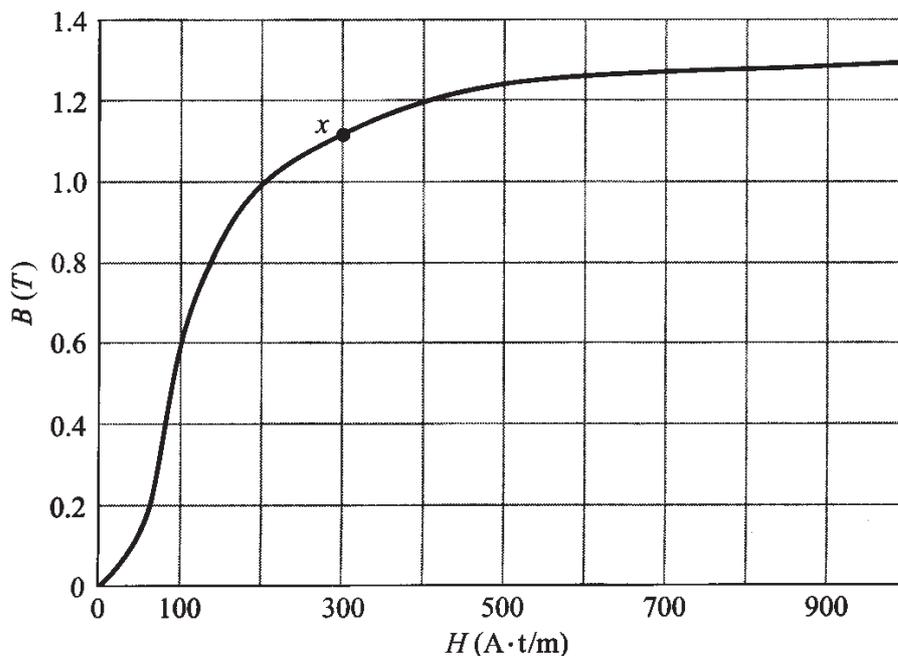


Fig. 1: Curva di magnetizzazione di un campione di acciaio.

2. La curva di ritorno non coincide con la curva di andata, tanto che, quando $H = 0$, comunque rimane una densità di flusso pari a B_r . Continuando fino a $-H_x$ e poi riaumentando H , otteniamo l'anello di Fig. 2. Notiamo che la curva di prima magnetizzazione è compresa tra le due curve successive di magnetizzazione, curve che sono tanto più strette, quanto più basso è il valore massimo di H raggiunto.

6.4 Magnetizzazione e permeabilità

Analogamente a quanto visto per i materiali soggetti ad un campo elettrico, possiamo scrivere anche per il campo magnetico una relazione tra il vettore \mathbf{B} e il vettore \mathbf{H} in qualsiasi materiale:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (6.11)$$

dove \mathbf{M} è il *vettore di magnetizzazione*, ovvero il momento di dipolo magnetico per unità di volume. In un materiale sottoposto all'effetto di un campo magnetico, consideriamo le correnti vincolate che sorgono all'interno del materiale. Il vettore \mathbf{M} è tale che:

$$\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{L} = I_b \quad (6.12)$$

Quindi questo vettore tiene conto degli effetti del campo magnetico all'interno del materiale. Per materiali isotropici lineari si ha che:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (6.13)$$

da cui, analogamente a quanto fatto per il campo elettrico in (4.19):

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H}) = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (6.14)$$

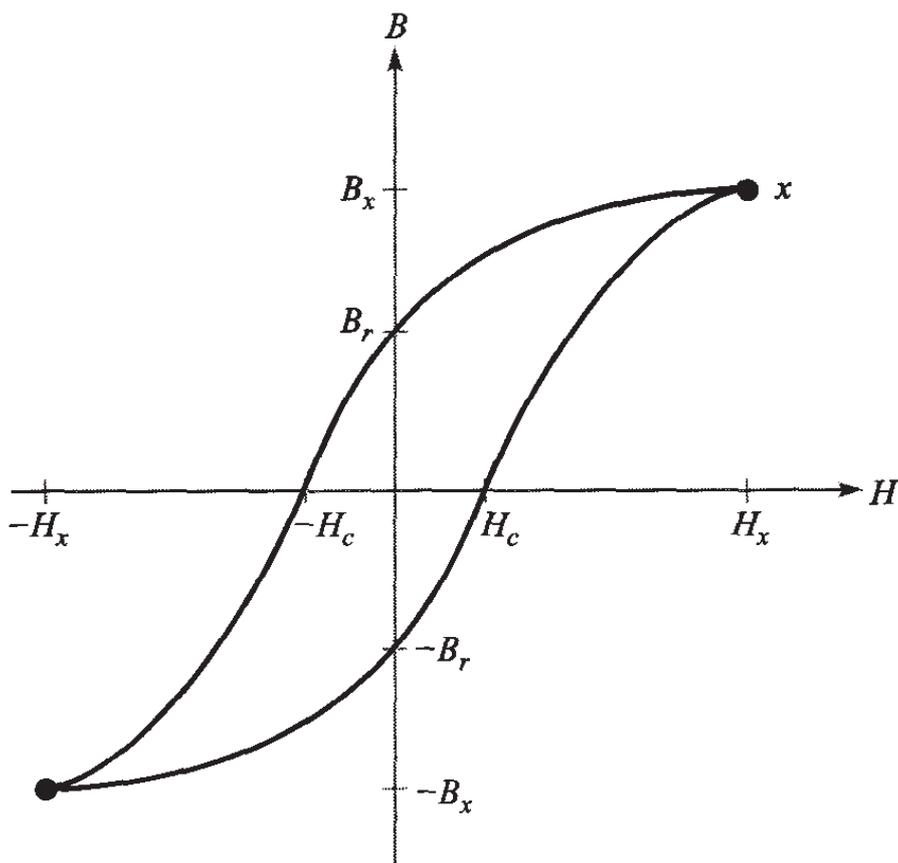


Fig. 2: Curva di isteresi di un campione di acciaio.

dove: $\mu_r = 1 + \chi_m$ è la *permeabilità relativa* e μ è la permeabilità. I materiali diamagnetici hanno una permeabilità relativa leggermente inferiore ad uno, mentre i materiali paramagnetici hanno una permeabilità relativa leggermente superiore ad uno. I materiali ferromagnetici hanno una permeabilità relativa variabile con il variare del campo applicato.

6.5 Circuiti magnetici

Il nome deriva dalla grande somiglianza che questo tipo di "circuiti magnetici" ha con i circuiti elettrici in continua. La sola importante differenza è nella natura nonlineare delle porzioni ferromagnetiche del circuito, per cui i metodi di analisi che devono essere adottati sono simili a quelli che si usano nei circuiti contenenti componenti nonlineari come i diodi, ad esempio.

Analogamente a quanto fatto per il campo elettrico, definiamo un potenziale magnetico scalare, o meglio una tensione magnetica tra A e B, come:

$$V_{mAB} = \int_A^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \quad (6.15)$$

dove l'integrale dipende dal percorso. A differenza del potenziale elettrico, il potenziale

magnetico non è conservativo. Ciò dipende dal fatto che l'integrale chiuso:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_{\text{tot}} = NI \quad (6.16)$$

non è nullo come nel caso dell'equivalente elettrico. La corrente totale è ottenuta pensando che un conduttore percorso dalla corrente I è avvolto in N spire attorno al percorso chiuso lungo cui si effettua l'operazione di integrazione del campo magnetico.

Si può pensare che questo percorso chiuso, lungo cui calcoliamo la circuitazione di \mathbf{H} , sia l'equivalente magnetico di un circuito elettrico, un "tubo di flusso" chiuso su se stesso in cui sia confinato un flusso magnetico. Possiamo ottenere questo confinamento di un campo magnetico in più modi, come vedremo negli esempi seguenti. Consideriamo, quindi, un tubo di flusso cilindrico lungo d e con sezione S , composto di un materiale magnetico lineare di permeabilità μ .

In analogia con la legge di Ohm: $V = RI$ dei circuiti elettrici, definiamo una costante \mathcal{R} , chiamata *riluttanza*, che leghi il potenziale magnetico scalare al flusso. La relazione, detta *legge di Hopkinson*, è:

$$V_{mAB} = \mathcal{R} \Phi \quad (6.17)$$

dove la riluttanza è misurata in [A·spire/Wb], mentre il flusso magnetico Φ è:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mu \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.18)$$

Analogamente alla resistenza dei conduttori elettrici di area S e lunghezza d , è possibile calcolare la riluttanza di conduttori isotropici e lineari con la seguente formula:

$$\mathcal{R} = \frac{d}{\mu S} \quad (6.19)$$

Generalmente, il materiale più comune dove si applica questa formula è l'aria.

Dobbiamo ora caratterizzare le sorgenti di campo magnetico, analogamente alle sorgenti di tensione in un circuito elettrico. La sorgente del flusso magnetico è definita partendo dalla relazione (6.16). Quindi la sorgente di flusso magnetico, detta forza magnetomotrice (fmm), è una corrente che passa all'interno del circuito magnetico, non è un componente identificabile con due morsetti, come nel caso dei circuiti elettrici.

Come primo esempio, troviamo il flusso in un toroide con il nucleo di aria, con 500 spire percorse da 4 A, una sezione di 6 cm^2 e un raggio medio di 15 cm. Il confinamento del campo nel toroide si ottiene distribuendo le spire uniformemente lungo la circonferenza del toroide stesso. La sorgente è pari a:

$$V_{m,s} = 2000 \text{ A} \cdot \text{spire} \quad (6.20)$$

la riluttanza è:

$$\mathcal{R} = \frac{d}{\mu S} = \frac{2\pi (0.15)}{4\pi 10^{-7} \times 6 \cdot 10^{-4}} = 1.25 \cdot 10^9 \text{ A} \cdot \text{spire/Wb} \quad (6.21)$$

da cui:

$$\Phi = \frac{V_{m,s}}{\mathcal{R}} = \frac{2000}{1.25 \cdot 10^9} = 1.6 \cdot 10^{-6} \text{ Wb} \quad (6.22)$$

e i vettori B e H sono:

$$B = \frac{\Phi}{S} = 2.67 \cdot 10^{-3} \text{ T}, \quad H = \frac{B}{\mu} = 2120 \text{ A} \cdot \text{spire/m} \quad (6.23)$$

Applicando direttamente la legge circuitale di Ampere, si ottiene:

$$H_{\Phi} 2\pi r = N I \Rightarrow H_{\Phi} = \frac{N I}{2\pi r} = \frac{2000}{2\pi \cdot 0.15} = 2120 \text{ A} \cdot \text{spire/m} \quad (6.24)$$

L'equivalente elettrico di questo circuito è una sorgente di tensione chiusa su di una resistenza.

Nel secondo esempio, usiamo un toroide con il nucleo di acciaio, eccetto per un traferro di 2 mm in aria. Le misure del toroide sono le stesse di prima e ci sono ancora 500 spire. Vogliamo sapere che corrente è necessaria per instaurare una densità di flusso di 1 T ovunque nel toroide. Il circuito magnetico attuale è equivalente a un circuito elettrico con una sorgente e due resistenze in serie, una delle quali non-lineare. Dal momento che è fissata la "corrente", è facile trovare la "tensione" su ogni resistenza e quindi la forza "elettro-motrice". Nel traferro si ha:

$$\mathcal{R}_{aria} = \frac{d_{aria}}{\mu_0 S} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \times 6 \cdot 10^{-4}} = 2.65 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{spire/Wb} \quad (6.25)$$

Quindi il flusso totale, sia nel traferro che nell'acciaio, è:

$$\Phi = B S = 1 \times 6 \cdot 10^{-4} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ Wb} \quad (6.26)$$

La forza magneto-motrice (fmm) richiesta per sostenere quel flusso nel traferro è:

$$V_{m,aria} = \Phi \mathcal{R}_{aria} = 6 \cdot 10^{-4} \times 2.65 \cdot 10^6 = 1590 \text{ A} \cdot \text{spire} \quad (6.27)$$

Guardando ora la Fig. 1, vediamo che è necessario un campo magnetico pari a 200 A·spire/m per produrre una densità di flusso di 1 T. Perciò si ha:

$$H_{acciaio} = 200 \text{ A} \cdot \text{spire/m} \Rightarrow V_{m,acciaio} = H_{acciaio} d_{acciaio} = 200 \times 2\pi \times 0.15 = 188 \text{ A} \cdot \text{spire} \quad (6.28)$$

$$V_m = V_{m,aria} + V_{m,acciaio} = 1778 \text{ A} \cdot \text{spire} \Rightarrow I = 3.556 \text{ A} \quad (6.29)$$

Notate la differenza di tensione magnetica tra l'anello in acciaio e il traferro. Un materiale ferroso presenta una "resistenza magnetica" molto più bassa dell'aria, per cui il flusso magnetico rimane confinato, per la maggior parte, nell'anello stesso. Per fare un'analogia con i circuiti elettrici, se mettiamo in parallelo due resistenze in valore molto diverse tra loro, la corrente scorrerà quasi interamente nella resistenza di valore più basso.

E' infine importante notare che, pur non scendendo in particolari, ci sono parecchie approssimazioni nei calcoli fatti, che comunque non invalidano i risultati ottenuti.

6.6 Energia potenziale e campi magnetici

L'energia totale immagazzinata in un campo magnetico è pari a:

$$W_H = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \, dv = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \underbrace{\mu H^2}_{\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}} \, dv = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \frac{B^2}{\mu} \, dv \quad (6.30)$$

Il calcolo è più complesso che nel caso del campo elettrico, per cui si rimanda la dimostrazione al corso di campi elettromagnetici, in cui verrà introdotto il vettore di Poynting. L'energia è distribuita nel volume con una densità pari a $\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \text{ J/m}^3$.

6.7 Induttanza

Come premessa, introduciamo il concetto di *flusso concatenato*. Consideriamo una bobina con N spire in cui una corrente I produce il flusso Φ . Possiamo assumere che questo flusso attraversa tutte le N spire, e quindi che il flusso concatenato con la bobina è N volte il flusso concatenato con la singola spira, cioè è $N\Phi$. Quindi il flusso concatenato con la bobina è definito come il flusso $N\Phi$ totale che attraversa tutte le spire della bobina.

Consideriamo ora un materiale magnetico lineare: definiamo come *induttanza* il rapporto tra il flusso totale concatenato e la corrente che lo produce:

$$L = \frac{N\Phi}{I} \quad (6.31)$$

L'induttanza si misura in henry [H], che è equivalente al [Wb/A]. In materiali ferromagnetici, il legame tra la corrente e il flusso non è lineare, e quindi la definizione appena data di induttanza vale solo puntualmente, per un certo valore di campo. Quindi l'induttanza varia al variare del campo applicato.

Calcoliamo l'induttanza di un cavo coassiale in aria. Il flusso tra i conduttori del cavo è stato calcolato nella eq. (5.17). Si ottiene immediatamente l'induttanza per un tratto lungo d di cavo, e precisamente:

$$L = \frac{\mu_0 d}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad \text{H} \quad (6.32)$$

mentre l'induttanza per unità di lunghezza è:

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad \text{H/m} \quad (6.33)$$

In questo caso $N = 1$ e tutto il flusso è concatenato con la corrente.

Consideriamo ora una bobina, o solenoide, in aria, di raggio R , con N spire avvolte su una lunghezza d , percorse da una corrente I . Ricordando l'eq. (5.10), il flusso prodotto nel solenoide è:

$$\Phi = \mu_0 \frac{NI}{d} S = \mu_0 \frac{N}{d} I \pi R^2 = \mu_0 n I \pi R^2 \quad (6.34)$$

dove $n = N/d$ è il numero di spire per unità di lunghezza. L'induttanza del solenoide è pertanto:

$$L = \frac{N\Phi}{I} = N \mu_0 n \pi R^2 = \mu_0 n^2 \pi R^2 d = \mu_0 n^2 S d \quad \text{H} \quad (6.35)$$

mentre l'induttanza per unità di lunghezza è:

$$L = \mu_0 n^2 S \quad \text{H/m} \quad (6.36)$$

Calcoliamo ora l'energia immagazzinata in un solenoide in aria. Ricorrendo all'eq. (6.30), si trova che:

$$\begin{aligned} W_H &= \frac{1}{2} \int_{vol} \mu_0 H^2 dv = \frac{1}{2} \int_0^S \int_0^d \mu_0 (nI)^2 dz dS = \frac{1}{2} \mu_0 (nI)^2 S d = \frac{1}{2} (\mu_0 n^2 S d) I^2 \\ &= \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \Phi I = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L} \end{aligned} \quad (6.37)$$

6.8 Mutua induttanza

Il concetto di mutua induttanza deriva dall'accoppiamento di flussi magnetici che si verifica quando due solenoidi, per esempio, sono abbastanza vicini spazialmente da interagire a vicenda. Denominiamo come 1 e 2 due circuiti che producono un campo magnetico. Si definisce *mutua induttanza* M_{12} tra i circuiti 1 e 2, in termini di flussi concatenati, la seguente:

$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1} \quad (6.38)$$

dove Φ_{12} è il flusso prodotto da I_1 che si concatena con le spire percorse dalla corrente I_2 e N_2 è il numero di spire del circuito 2. La mutua induttanza è correlata quindi con la interazione magnetica che si verifica tra due correnti. Analogamente, si può definire la mutua induttanza M_{21} come:

$$M_{21} = \frac{N_1 \Phi_{21}}{I_2} \quad (6.39)$$

Si dimostra, per motivi energetici, che vale la seguente relazione:

$$M_{12} = M_{21} \quad (6.40)$$

Infatti, in termini di mutua energia, partendo dalla eq. (6.30), si può mostrare che la definizione riportata nella eq. (6.38) è equivalente a:

$$\begin{aligned} M_{12} &= \frac{1}{I_1 I_2} \int_{\text{vol}} (\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{H}_2) \, dv = \frac{1}{I_1 I_2} \int_{\text{vol}} (\mu \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2) \, dv \\ &= \frac{1}{I_1 I_2} \int_{\text{vol}} (\mu \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{H}_1) \, dv = M_{21} \end{aligned} \quad (6.41)$$

Calcoliamo ora la mutua induttanza di due solenoidi coassiali in aria, di raggio R_1 e R_2 ($R_2 > R_1$), con N_1 e N_2 spire avvolte su una lunghezza d , percorse dalle correnti I_1 e I_2 . Le spire per unità di lunghezza sono, rispettivamente, n_1 e n_2 . Il campo nei due induttori è, dall'eq. (5.10):

$$\begin{aligned} H_1 &= \begin{cases} n_1 I_1 & (0 < \rho < R_1) \\ 0 & (\rho > R_1) \end{cases} \\ H_2 &= \begin{cases} n_2 I_2 & (0 < \rho < R_2) \\ 0 & (\rho > R_2) \end{cases} \end{aligned} \quad (6.42)$$

da cui il flusso concatenato del primo circuito con il secondo e la mutua induttanza sono:

$$\Phi_{12} = \mu_0 n_1 I_1 \pi R_1^2 \quad (6.43)$$

$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1} = \frac{n_2 d \mu_0 n_1 I_1 \pi R_1^2}{I_1} = \mu_0 n_1 n_2 \pi R_1^2 d = \mu_0 n_1 n_2 S d = M_{21} \quad (6.44)$$

E' ancora da affrontare il problema del segno dell'accoppiamento, dovuto al fatto che i flussi possono sommarsi o sottrarsi. Se i flussi si sommano il segno della mutua è positivo, altrimenti negativo.

6.9 Energia e ciclo di isteresi

Ritorniamo al ciclo di isteresi di un materiale ferro-magnetico visto nel precedente capitolo. Se provvediamo a magnetizzare e smagnetizzare un campione di detto materiale secondo il ciclo mostrato in Fig. 2, compiamo un lavoro magnetico che in parte è dissipato in energia non recuperabile, nella fattispecie calore. Si può dimostrare che la densità di energia dissipata in un ciclo completo di isteresi è pari all'area racchiusa dal ciclo stesso. Proviamo a calcolarla. Sappiamo che la densità di energia immagazzinata in un campo magnetico è (vedi eq. (6.30)):

$$W_H = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \quad (6.45)$$

mentre la relazione tra \mathbf{B} e \mathbf{H} in una bobina con il nucleo ferroso è:

$$\mathbf{B} = \mu(H) \mathbf{H} \quad (6.46)$$

per cui il differenziale della energia immagazzinata nella bobina è:

$$dW_H = \frac{1}{2} d(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) = \frac{1}{2} d(BH) = \frac{1}{2} (B dH + H dB) \quad (6.47)$$

La densità di energia dissipata durante un ciclo completo di isteresi è quindi (A_{ciclo} è l'area del ciclo di isteresi nel piano H, B):

$$W_d = \oint_{\text{ciclo}} dW_H = \frac{1}{2} \oint_{\text{ciclo}} B dH + \frac{1}{2} \oint_{\text{ciclo}} H dB = \frac{1}{2} A_{\text{ciclo}} + \frac{1}{2} A_{\text{ciclo}} = A_{\text{ciclo}} \quad (6.48)$$

corrispondente all'area del ciclo stesso.

Ripetiamo il calcolo per un solenoide con area S e lunghezza d . Sappiamo, dalla (5.10), che il campo magnetico in un solenoide è pari a $H = \frac{NI}{d}$, da cui la corrente è pari a $I = \frac{NH}{d}$. Il flusso concatenato alla bobina è pari a $\Phi_c = N S B$, considerando B costante nel solenoide. L'energia dissipata in un ciclo è quindi:

$$W_d = \oint I d\Phi = S d \oint H dB \Rightarrow \frac{W_d}{S d} = \oint H dB \quad (6.49)$$

ricordando che: $V I dt = I (d\Phi/dt) dt = I d\Phi$ ha le dimensioni di un'energia, come vedremo nella legge di Faraday (vedi eq. (7.1)).

Vale la pena notare che un ciclo analogo su un solenoide in aria porta a un'energia dissipata nulla, dal momento che μ è costante, e quindi l'area del ciclo nel piano (B, H) è nulla.

7 CAMPI VARIABILI NEL TEMPO

Finora abbiamo trattato separatamente i campi elettrostatici e magnetostatici. Vedremo, in questo capitolo, che un campo elettrico variabile produce un campo magnetico e che un campo magnetico variabile produce un campo elettrico. Quindi, come la frequenza del campo aumenta, si devono considerare entrambi gli aspetti, parlando di campo elettromagnetico.

7.1 Legge di Faraday

Nel 1831 Faraday fece il primo esperimento in cui dimostrò che un campo magnetico variabile produce un campo elettrico in una spira con cui il campo magnetico è concatenato. In altre parole, un campo magnetico variabile nel tempo produce una forza elettromotrice (fem) in un opportuno circuito chiuso, dove una fem è semplicemente una tensione che si produce nel conduttore che forma la spira. La legge di Faraday può essere scritta come:

$$\text{fem} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{V} \quad (7.1)$$

L'equazione (7.1) presuppone un percorso chiuso, anche se non completamente formato da un conduttore continuo: può essere completato anche da un condensatore, o da una linea puramente immaginaria. Il flusso magnetico è quello che passa attraverso ogni superficie che ha come contorno la linea chiusa e la derivata del flusso è il tasso di cambiamento nel tempo. Una fem può risultare da una qualsiasi delle seguenti situazioni:

1. un campo magnetico variabile concatenato con una spira fissa,
2. un campo magnetico costante in moto relativo con una spira fissa,
3. una combinazione delle due situazioni precedenti.

Il segno negativo sta ad indicare che la fem produce una corrente il cui flusso, sommato all'originale, tende a ridurre l'ampiezza opponendosi al flusso originale. Questa è la legge di Lenz.

Se il percorso chiuso è formato da N spire, allora le spire possono essere considerate coincidenti con sufficiente approssimazione e si può scrivere:

$$\text{fem} = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{V} \quad (7.2)$$

dove Φ è interpretato come il flusso che passa attraverso ognuna delle spire coincidenti.

Ora proseguiamo definendo la fem (misurata in volt [V]) come:

$$\text{fem} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad (7.3)$$

Questo integrale di linea dipende dallo specifico percorso chiuso, per cui se cambiamo il percorso, cambia anche la forza elettromotrice trovata. Notiamo la differenza con l'equazione (3.38) scritta nello studio dell'elettrostatica. Il campo elettrico dovuto a una distribuzione statica di cariche porta a una differenza di potenziale nulla su una linea chiusa, indipendentemente dal percorso scelto, per cui l'integrale di linea, calcolato su

una linea aperta, permette la definizione di una differenza di potenziale. Ora, in presenza di un campo magnetico variabile, non possiamo più parlare di differenza di potenziale, ma dobbiamo introdurre il concetto di *tensione*, calcolata eseguendo l'integrale (7.3) su una particolare linea.

Sostituendo il flusso Φ con l'integrale di superficie di \mathbf{B} , otteniamo perciò:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (7.4)$$

Per determinare il segno opportuno da dare agli integrale di linea e di superficie, si deve tenere in mente la regola della mano destra, dove le dita della mano destra indicano il percorso della linea chiusa, mentre il pollice indica la direzione di $d\mathbf{S}$. Una densità di flusso \mathbf{B} nella direzione di $d\mathbf{S}$ e crescente nel tempo produce un valore medio di \mathbf{E} che è opposto alla direzione positiva lungo il percorso chiuso.

Se il percorso chiuso e la superficie di integrazione sono stazionari, quindi non variano nel tempo, allora si può portare l'operatore derivata all'interno del segno di integrale, ottenendo:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (7.5)$$

Ora presentiamo due semplici esempi.

Nel primo esempio, consideriamo un campo magnetico uniforme nello spazio all'interno della regione cilindrica $\rho < b$, crescente nel tempo con la legge:

$$\mathbf{B} = B_0 e^{kt} \mathbf{a}_z, \quad k > 0 \quad (7.6)$$

Considerando il percorso circolare a $\rho = a$, $a < b$, nel piano $z = 0$, in cui E_φ deve essere costante per ragioni di simmetria, abbiamo dalla eq. (7.4):

$$\text{fem} = 2\pi a E_\varphi = -k B_0 e^{kt} \pi a^2 \quad (7.7)$$

da cui:

$$E_\varphi = -\frac{1}{2} k B_0 e^{kt} a \quad (7.8)$$

Se B_0 fosse positivo, un conduttore di resistenza R inserito nel circuito sarebbe percorso da una corrente con verso opposto a \mathbf{a}_φ , e questa corrente indurrebbe un flusso opposto a \mathbf{a}_z . Siccome E_φ aumenta nel tempo, e insieme la corrente e il suo flusso, il tasso di incremento del flusso principale viene diminuito, secondo la legge di Lenz.

Nel secondo esempio, il flusso magnetico è costante, mentre il percorso chiuso cambia nel tempo. Consideriamo due conduttori paralleli a sbarra, posti a distanza d , connessi ad un estremo da un voltmetro ad alta resistenza. All'altro estremo facciamo scorrere orizzontalmente a velocità v costante un conduttore a sbarra che chiude il circuito, in modo da allargare l'area racchiusa dalla spira. Il vettore \mathbf{B} è costante nel tempo, uniforme nello spazio, ed è perpendicolare al piano contenente la spira. Nell'istante in cui la sbarra mobile dista y dall'altro estremo dei conduttori paralleli, il flusso è:

$$\Phi = Byd \quad (7.9)$$

Dall'equazione (7.1), otteniamo:

$$\text{fem} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B \frac{dy}{dt} d = -Bvd \quad (7.10)$$

Anche qui la fem prodotta (localizzata sul voltmetro, ammettendo che le sbarre sono conduttori ideali), tende a generare una corrente che si oppone all'aumento del flusso principale, che scorre con un verso di rotazione orario (visto dall'alto). Notate che la corrente può circolare realmente solo se il circuito ha una resistenza finita.

Infine, ricordando che in una bobina vale la relazione $\Phi = LI$, ricaviamo, mediante l'operazione di derivazione nel tempo, l'equazione costitutiva dell'induttanza lineare:

$$\frac{d\Phi}{dt} = L \frac{dI}{dt} \Rightarrow V = L \frac{dI}{dt} \quad (7.11)$$

dove V , rappresentando una caduta di tensione, ha segno opposto alla fem (vedi legge di Lenz).

7.2 Corrente di spostamento

Consideriamo ora dei campi elettrici variabili. Sappiamo che un condensatore alimentato con una tensione continua è equivalente ad un circuito aperto, dopo un opportuno transitorio. Invece i condensatori sono percorsi da corrente quando la tensione di alimentazione è variabile nel tempo, vedi i circuiti alimentati in alternata. Eppure il dielettrico è attraversato solo dal campo elettrico, e nessuna carica può attraversarlo. Quindi ci deve essere qualche altra forma di corrente che chiude il circuito, associata ad un campo elettrico variabile. Questa corrente è chiamata *corrente di spostamento*, e la relativa densità è definita come:

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (7.12)$$

Questa densità di corrente si aggiunge alla densità di corrente di conduzione definita in (4.5). Modifichiamo perciò la legge circuitale di Ampere, tenendo conto di questa ulteriore corrente:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I + I_d = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (7.13)$$

Ricaviamo la corrente di spostamento in un condensatore piano alimentato con una sorgente di tensione variabile. L'ampiezza del vettore spostamento è: $D = \rho_s$, la tensione: $V = (\rho_s/\epsilon) d$, da cui: $D = \epsilon(V/d)$. Quindi la corrente I_d è data da:

$$I_d = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\epsilon}{d} \frac{dV}{dt} d\mathbf{S} = \frac{dV}{dt} \left(\frac{\epsilon S}{d} \right) = C \frac{dV}{dt} \quad (7.14)$$

Questa è l'equazione costitutiva dei condensatori lineari.

8 EQUAZIONI DI MAXWELL

Nel corso dei precedenti capitoli, abbiamo esaminato gli aspetti fondamentali dei campi elettrostatico, elettromagnetico e delle interazioni tra i campi elettrico e magnetico, quando gli stessi variano nel tempo, e ne abbiamo dedotto delle leggi matematiche fondamentali per descrivere il comportamento di detti campi. Queste equazioni fondamentali sono state raccolte, completate e presentate dal fisico scozzese James Clerk Maxwell nel 1873.

Scriviamo ora le quattro equazioni note come *equazioni di Maxwell in forma integrale*, in quanto si riferiscono a grandezze macroscopiche che possono essere misurate sperimentalmente. Per completezza e per facilitare lo studio, a lato di ogni equazione, è riportato il riferimento all'equazione corrispondente nel testo.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} \rho_v dv & \text{eq. (3.23)} \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 & \text{eq. (5.15)} \\ \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} & \text{eq. (7.5)} \\ \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} & \text{eq. (7.13)} \end{array} \right. \quad (8.1)$$

In mezzi lineari, le relazioni che legano tra loro \mathbf{E} con \mathbf{D} e \mathbf{B} con \mathbf{H} sono:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \mu \mathbf{H} \quad (8.2)$$

Per avere un quadro completo, dobbiamo aggiungere ancora l'equazione di continuità della corrente:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{dQ_i}{dt} \quad \text{eq. (4.3)} \quad (8.3)$$

Queste equazioni ci permettono di trovare le condizioni al contorno che si devono considerare quando si lavora in mezzi fisici diversi. Questo argomento verrà trattato in altri corsi.

9 APPENDICE

C	coulomb
m	metro
s	secondo
J	joule
W	watt
N	newton
V	volt
A	ampere
Ω	ohm
S	siemens
F	farad
Wb	weber
T	tesla
H	henry

Unità del S.I.

GRANDEZZA	DIMENSIONI		
carica Q	C		
vettore \mathbf{E}	N/C	V/m	
vettore \mathbf{D}	C/m ²		
permittività ϵ	F/m	C ² /N·m ²	
potenziale elettr. V (fem)	V	J/C	N·m/C
corrente A	A	C/s	
densità di corrente J	A/m ²		
conduttività σ	S/m	A/V·m	
resistività ρ	Ω ·m	V·m/A	
resistenza R	Ω	V/A	
capacità C	F	C/V	
energia pot. W_E	J		
potenza elet. p	W	J/s	V·A
vettore \mathbf{H}	A/m		
vettore \mathbf{B}	T	Wb/m ²	V·s/m ²
flusso Φ	Wb	V·s	
permeabilità μ	H/m	T/A	Wb/m·A
potenziale scal. mag. V_m (fmm)	A·spire		
riluttanza \mathcal{R}	A·spire/Wb	H ⁻¹	
induttanza L	H	Wb·spire/A	
energia pot. W_H	J		

Dimensioni delle principali grandezze fisiche