

Figure 4: Andamento della perdita di energia per ionizzazione in funzione della variabile $\beta\gamma$ della particella incidente per diversi materiali. In basso sono riportate le scale per i corrispondenti valori dell'impulso relativi a muoni, pioni e protoni

La formula di Bethe e Bloch è valida per particelle più pesanti dell'elettrone e positrone e velocità maggiori di qualche centesimo della velocità della luce. La correzione δ (*correzione di densità*), che non discuteremo nel dettaglio, è dovuta alla polarizzazione del mezzo, dipende dalla densità di quest'ultimo e limita la crescita relativistica fino al punto da poterla, in prima approssimazione, considerare costante. Discuteremo direttamente la formula di Bethe-Bloch invece che quella di Bohr.

2.2.1 Osservazioni

- La perdita di energia per unità di percorso per collisione (nota anche come *potere frenante* ovvero come *stopping power* o *collision energy loss* in inglese) dE/dX è (all'incirca) indipendente dall'assorbitore se espressa in funzione dello spessore massico e se trascuriamo la dipendenza logaritmica contenuta nel termine di potenziale di ionizzazione ($I \approx Z$). Questo perché il termine Z/A è in prima approssimazione approssimabile con $Z/A \approx 1/2$ per tutti gli elementi della tavola periodica (l'idrogeno ne è l'ovvia eccezione).
- La perdita di energia per unità di cammino ha una dipendenza quadratica dalla carica della particella incidente
- La perdita di energia per unità di cammino *per collisione* non contiene alcuna dipendenza dalla massa, energia o impulso della particella incidente e pertanto la curva di Bethe Bloch è da considerarsi una curva universale, se espressa in

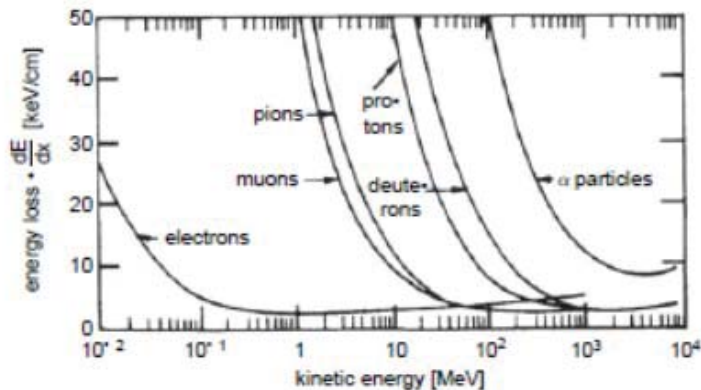


Figure 5: Andamento della perdita di energia per ionizzazione in funzione dell'energia della particella incidente per diverse particelle incidenti

funzione della velocità o di qualsiasi funzione della velocità della particella incidente (ad esempio di $\beta\gamma$). In figura 7 è possibile osservare l'andamento del potere frenante in funzione di $\beta\gamma$ ($= P/Mc$). Si noti

1. come il comportando della curva di B-B sia dominato dalla dipendenza da $1/\beta^2$ per piccoli β ($\beta \ll 1$)
 2. sviluppi un minimo (*minimo di ionizzazione*) per $\beta\gamma \sim 3$ (tale valore dipende debolmente dall'assorbitore, tramite I , così come la perdita di energia al minimo che vale $1 \div 2 \text{ MeV gr}^{-1} \text{ cm}^2$). Le particelle al minimo di ionizzazione sono dette minimo ionizzanti o MIP (dall'inglese, minimum ionizing particles).
 3. presenti una lenta crescita logaritmica ($\sim \ln(\gamma^2)$) nella regione relativistica (*risalita relativistica*) dopo il minimo di ionizzazione. Nella regione relativistica ed ultrarelativistica tale risalita viene in realtà quasi completamente compensata dalla correzione di densità.
- Risulta infine ovvia conseguenza dell'osservazione precedente, che qualora si osservi la dE/dX in funzione dell'impulso (così come da altra variabile dipendente dalla massa) di una particella, la curva relativa a ciascuna particella differirà per un diverso fattore di scala (la massa) e in generale, a parità di impulso, la perdita di energia per unità di cammino sarà diversa per masse diverse (vedasi fig. 5). Questa osservazione sarà la base di una tecnica molto importante e diffusa per la determinazione della massa delle particelle, come discuteremo più avanti (v.par. 4.1).

Sebbene la curva di Bethe-Bloch(9) non si possa usare per la descrizione del comportamento di elettroni e positroni, l'andamento della perdita di energia di tali particelle risulta molto simile.

Si vedano in fig. 6 alcuni esempi (delle prime misure) di rivelazione mediante misura della ionizzazione in camere a nebbia (vedi par. 5.2) di particelle con diverso potere frenante (il diverso potere frenante si traduce in tracce più o meno marcate). In fig. 8 è invece mostrata, in funzione dell'impulso, la risposta di un rivelatore a gas a particelle di diverse masse.

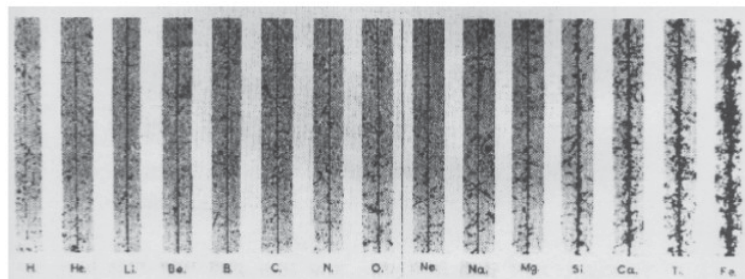
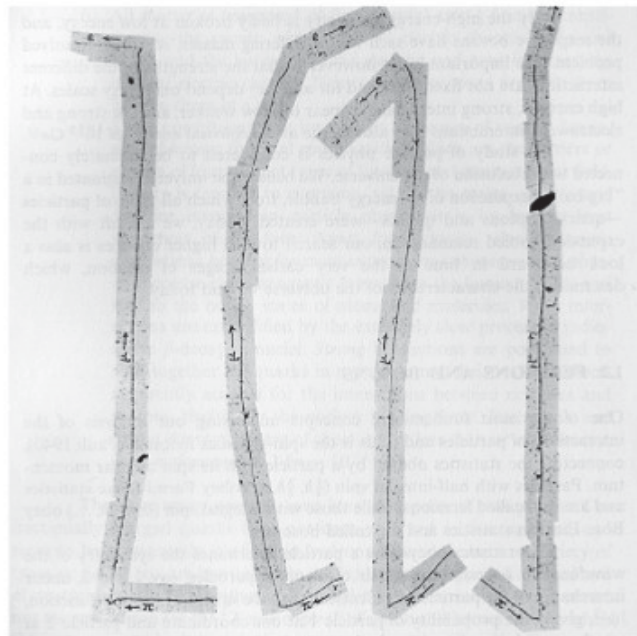
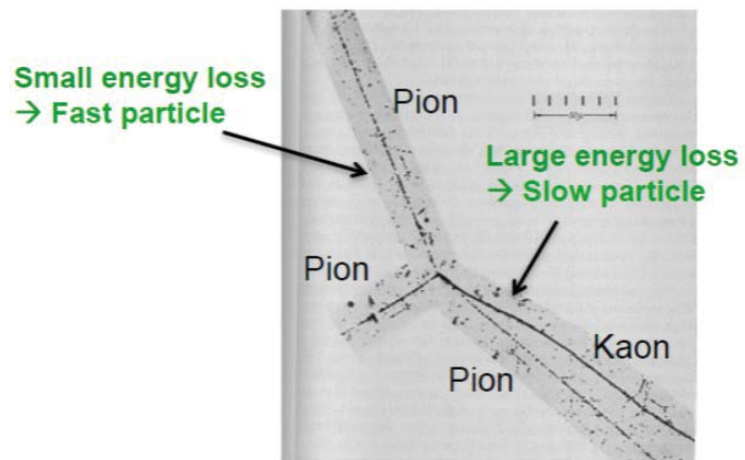


Figure 6: Tracce, raccolte mediante camera a nebbia, di particelle con diverso potere frenante

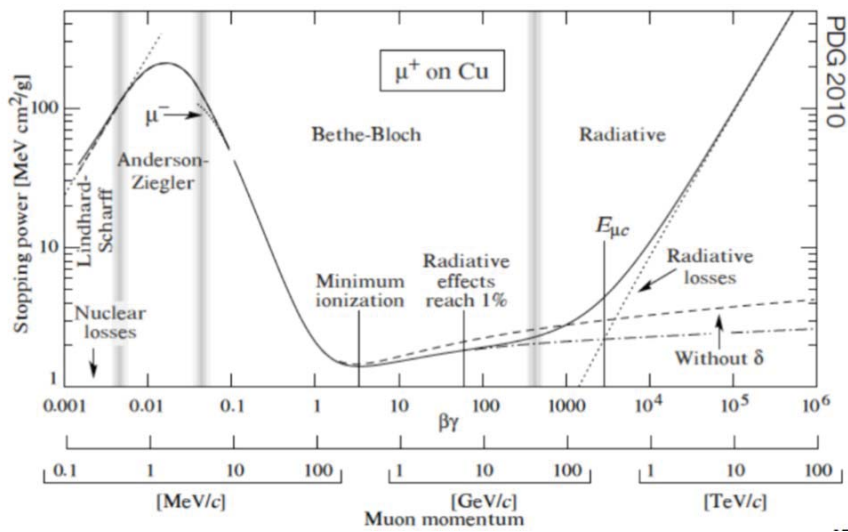


Figure 7: Andamento della perdita di energia per ionizzazione in funzione della variabile $\beta\gamma$ della particella incidente in rame. In basso sono riportate le scale per i corrispondenti valori dell'impulso relativi a muoni

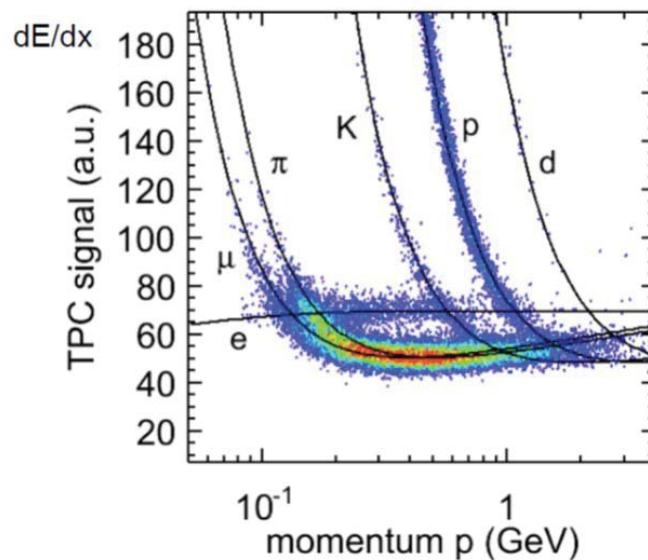


Figure 8: Potere frenante (energia rilasciata per unita di cammino) misurato all'interno di una camera ripiena di gas per particelle di masse diverse al variare dell'impulso misurato

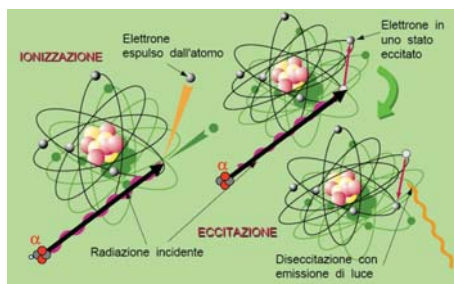


Figure 9: Rappresentazione pittorica di interazione tra una particella carica incidente e gli atomi del mezzo

2.2.2 Fluttuazioni nel rilascio di energia

E' importante sottolineare che la dE/dx fornita dalla formula di Bethe-Bloch rappresenta il valor medio atteso per la perdita di energia per unità di cammino di una particella carica che attraversa un mezzo. Il processo di perdita di energia è in realtà di tipo statistico, e l'energia totale persa in uno spessore di materiale è dato dalla somma di molti eventi di urto con gli elettroni del mezzo. Ciascun urto produce una perdita di energia, ma l'energia trasferita in un urto non è fissa, ma dipende dal parametro d'impatto e fluttua in un intervallo di valori distribuiti secondo una distribuzione di probabilità. Questo è il motivo di quanto affermato nel paragrafo 2.1.3: se consideriamo un fascio monocromatico di particelle incidenti su uno spessore di materiale la distribuzione dell'energia del fascio all'uscita dell'assorbitore (e analogamente quella dell'energia rilasciata) non sarà più monocromatica (vedi fig. 1 e 10).

In generale la perdita di energia in uno spessore di materiale assorbitore di un fascio monocromatico di particelle identiche (ovvero la distribuzione di probabilità della perdita di energia di una di tali particelle) sarà il risultato di un certo numero di urti secondo una distribuzione poissoniana. Se il numero di urti è sufficientemente elevato il teorema del limite centrale ci dice che la distribuzione dell'energia rilasciata in un assorbitore (somma di N urti, ciascuno descritto dalla stessa distribuzione statistica) è di tipo gaussiano (perlomeno nel limite per N che tende all'infinito). Il fenomeno sopra descritto va sotto il nome inglese di *energy straggling*, ovvero fluttuazione energetica. Nel caso di spessori così sottili da far sì che il teorema del limite centrale non valga, le distribuzioni della perdita di energia non saranno di tipo gaussiano ma risulteranno asimmetriche con una coda verso gli alti rilasci energetici (distribuzioni di Landau e di Vavilov).

In figura 11 è possibile osservare la distribuzione dell'energia persa da un fascio di protoni di 10 MeV in spessori di silicio di valore crescente. Si noti come al crescere del numero di urti (ovvero dello spessore) la distribuzione tenda a diventare, a partire da una distribuzione asimmetrica con una coda verso le alte energie, sempre piu' gaussiana.

Osservazione. La fluttuazione dell'energia rilasciata da una particella in un rivelatore è una delle limitazioni piu' importanti ad un'efficiente identificazione della massa della stessa. L'identificazione puo' venir fatta ad esempio misurando la diversa perdita di energia (media) attesa per particelle di massa diversa a parità di impulso misurato. Tuttavia, pur in presenza di valori medi attesi sufficientemente diversi, la

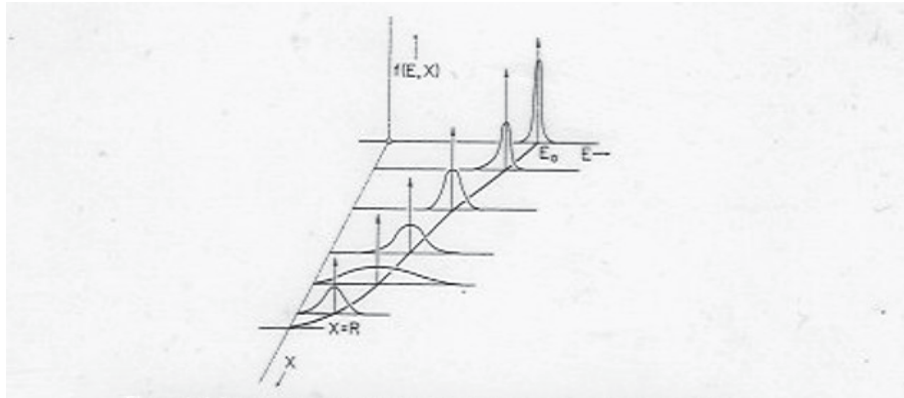


Figure 10: Distribuzione dell'energia di un fascio di particelle cariche inizialmente monoenergetico a differenti profondità di penetrazione. [fig. tratta da Leo, Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments, Springer]

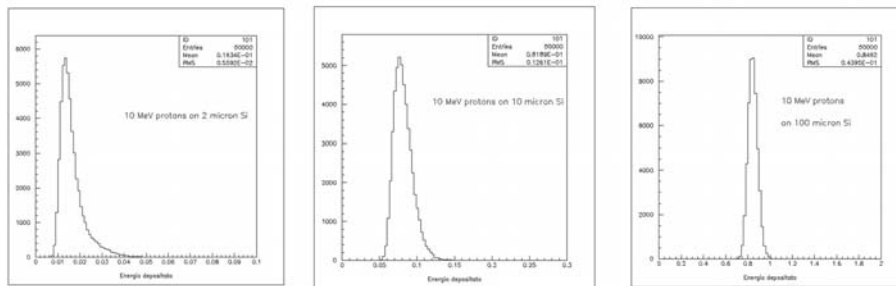


Figure 11: Distribuzione della perdita di energia di protoni di 10 MeV attraverso spessori crescenti di silicio

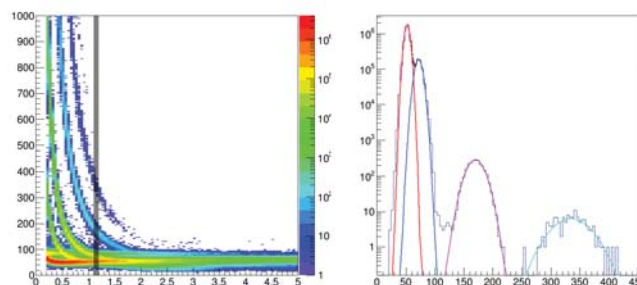


Figure 12: Potere frenante per diverse particelle cariche e dettaglio della fluttuazione di energia di particelle relative ad un valore fissato di impulso (indicato con la barra verticale)

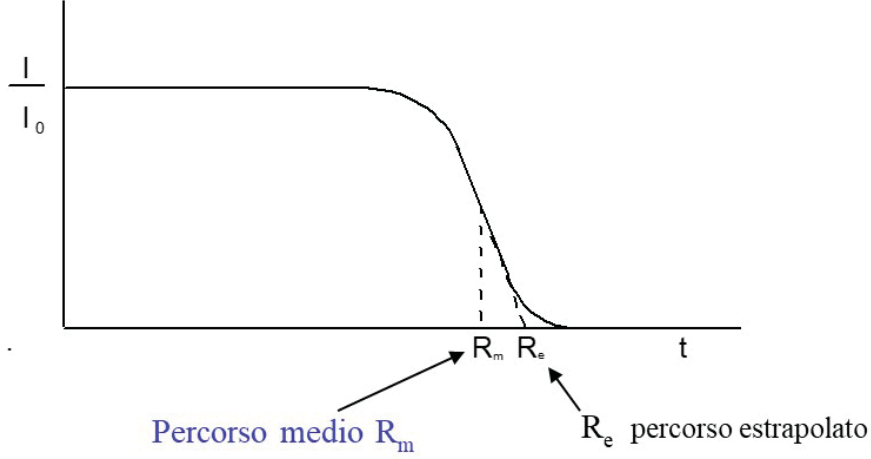


Figure 13: Determinazione del range a partire da una curva di trasmissione (I è il numero di particelle trasmesse per unità di tempo in funzione delle spessore t essendo I_0 il numero di particelle entranti) di un fascio di particelle in funzione dello spessore x attraversato (R_m è il range medio, R_e è il range estrapolato).

fluttuazione puo' portarci ad avere una sovrapposizione della regione di risposta per le due particelle. Un esempio di tale problema si puo' vedere in fig. 12, ove, fissando l'attenzione, per un determinato valore di impulso (definito dalla barra verticale), sulla diversa risposta attesa dalle curve continue (Bethe-Bloch), si nota in realtà uno sparpagliamento della risposta attorno al valore atteso.

2.3 Percorso residuo (range)

Come appena discusso, dopo aver attraversato un assorbitore un fascio monocromatico risulterà degradato in energia, non sarà più monoenergetico e presenterà un angolo diffusione. Fino ad un certo spessore, essenzialmente tutte le particelle saranno trasmesse, ma al di là di questo alcune delle particelle non emergeranno più. Ad uno spessore R , chiamato *range* medio, metà delle particelle verrà fermata e infine, con uno spessore sufficientemente grande, nessuna particella emergerà. Il comportamento del numero di particelle trasmesse rispetto allo spessore dell'assorbitore è mostrato in figura 13.

Se si conosce il potere ionizzante è possibile calcolare il percorso(medio) residuo (*range*) di una particella in un dato mezzo, essendo questo definito come il cammino che la stessa puo' compiere prima di perdere tutta la sua energia.

$$R(E) = \int_0^R dx = \int_{E_0}^0 \frac{dE}{dE/dx} \quad (10)$$

Per una particella di carica z , massa M ed energia E_0 , nella regione non relativistica, ove, dalla 9, possiamo scrivere (trascurando il termine logaritmico) $dE/dx \sim \frac{z^2}{v^2} \sim \frac{Mz^2}{E}$,

$$R = \int_0^{E_0} -\frac{dE}{dE/dx} \approx \frac{K}{Mz^2} \int_{E_0}^0 E dE = \frac{K}{Mz^2} E_0^2 \quad (11)$$

In figura 14 è possibile osservare la dipendenza del range dall'energia per particelle di massa diversa. Le considerazioni fatte sul carattere stocastico e la conseguente