Misura e integrazione in $\mathbb{R}^N$

↖ secondo Riemann

↑ secondo Peano - Jordan

Motivazioni

Vogliamo introdurre uno strumento che

- permetta di definire la misura per un'ampia classe di figure piane (aree) e di corpi solidi (volume)
- permetta di definire svariati concetti fisici (massa, baricentro, momento d'inerzia, potenziale e campo gravitazionali o elettrici, ...)
- fornire uno strumento operativo per il loro calcolo

Integrale di Riemann su rettangoli in $\mathbb{R}^N$

Per maggiore chiarezza premettiamo un richiamo alla definizione di integrale per le funzioni di una variabile, poi diamo la definizione per le funzioni di due variabili e infine veniamo al caso generale.

A) $N = 1$

- Sia $R = [a, b]$, con $a < b$, un intervallo in $\mathbb{R}$ o 1-rettangolo in $\mathbb{R}$.

Decomposizione di R (o partizione di R)

Fissiamo $n+1$ punti $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ in $[a, b]$.
Poniamo $R_k = [x_{k-1}, x_k]$ con $k \in \{1 \dots n\}$. La collezione

$$\mathcal{S} = \{R_k : k \in \{1 \dots n\}\}$$

si dice decomposizione di R individuata da $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

· Poniamo $\Delta(R) = \{ \delta : \delta \text{ decomposizione di } R \}$.

<u>Ordinamento in $\Delta(R)$.</u>

Siano $\delta, \delta' \in \Delta(R)$ individuate da $\{x_0, x_1, \dots x_n\}$ e $\{x_0', x_1', \dots x_m'\}$, rispettivamente. Si pone

$$\delta \vdash \delta' \iff \{x_0, x_1, \dots x_n\} \subseteq \{x_0', x_1', \dots x_m'\}. \quad (\delta' \text{ più fine di } \delta)$$

Si verifica immediatamente che $\vdash$ è una relazione d'ordine parziale (non totale) in $\Delta(R)$.

<u>Proposizione</u>

Se $\delta, \delta' \in \Delta(R)$, allora esiste $\delta^* \in \Delta(R)$ minima seguente comune δ, δ' e $\delta_* \in \Delta(R)$ massima precedente comune.

<u>Dim.</u> Se δ, δ' sono individuate da $\{x_0, x_1 .. x_n\}$, $\{x_0', x_1' \dots x_m'\}$, rispettivamente, si prende come δ^* la decomposizione individuata da $\{x_0, x_1 .. x_n\} \cup \{x_0', x_1', .. x_m'\}$ e come δ_* la decomposizione individuata da $\{x_0, x_1 .. x_n\} \cap \{x_0', x_1' \dots x_m'\}$.

<u>Conclusione</u>

$(\Delta(R), \vdash)$ è un reticolo $\quad (\delta^* = \delta \vee \delta', \ \delta_* = \delta \wedge \delta')$

• Sia $f : R = [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata (cioè $\inf_R f > -\infty$ e $\sup_R f < +\infty$).

<u>Somme inferiori e superiori</u> (di Darboux)

Sia $\delta \in \Delta(R)$. Poniamo

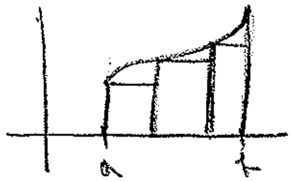
$$s(\delta, f) = \sum_{k=1}^{n} l_k \, m_1(R_k) \qquad \text{somma inferiore di } f \text{ su } \delta$$

$$S(\delta, f) = \sum_{k=1}^{n} L_k \, m_1(R_k)$$ somme superiore di f su δ

dove $l_k = \inf_{R_k} f$, $L_k = \sup_{R_k} f$ e $m_1(R_k) = x_k - x_{k-1}$,

con $k \in \{1 \dots n\}$.

Significato geometrico



Proposizione

Per ogni $\delta, \delta' \in \Delta(R)$ si ha

(i) $s(\delta) \leq S(\delta)$

(ii) $\delta \vdash \delta' \Rightarrow s(\delta) \leq s(\delta')$ e $S(\delta) \geq S(\delta')$

(iii) $s(\delta) \leq S(\delta')$

Dim.

- (i): segue che $l_k \leq L_k$ per ogni k
- (ii): siano δ, δ' individuate da $\{x_0, x_1 \dots x_n\}$ e $\{x_0, \dots x_n\} \cup \{x'\}$

  con $x_{i-1} < x' < x_i$ per qualche i. Risulta

  $$l_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \leq \inf_{[x_{i-1}, x']} f = l_i', \quad \inf_{[x', x_i]} f = l_i''$$

  e

  $$l_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq l_i'(x' - x_{i-1}) + l_i''(x_i - x').$$

  Quindi si conclude che

  $$s(\delta) = \sum_{k=1}^{n} l_k \, m_1(R_k) \leq \sum_{j=1}^{m} l_j' \, m_1(R_j') = s(\delta').$$

  Il caso generale si tratta applicando questo ragionamento un numero finito di volte. Similmente si prova $S(\delta') \leq S(\delta)$.

- (iii): si ha, posto $\delta^* = \delta \vee \delta'$,

  $$s(\delta) \leq s(\delta^*) \leq S(\delta^*) \leq S(\delta').$$

4

- Poniamo

$$\sigma(f) = \{ s(\sigma, f) : \sigma \in \Delta(R) \} \quad e$$

$$\Sigma(f) = \{ S(\sigma, f) : \sigma \in \Delta(R) \}.$$

<u>Conclusione</u>

$\sigma(f)$ e $\Sigma(f)$ sono insiemi numerici separati; cioè

$\sup \sigma(f) \leq \inf \Sigma(f)$.

<u>Integrale di Riemann (-Darboux) su R</u>

- Se $\sigma(f)$ e $\Sigma(f)$ sono insiemi contigui, cioè $\sup \sigma(f) = \inf \Sigma(f)$, si dice che f è integrabile secondo Riemann su $R = [a,b]$ e si pone

$$\int_R f = \int_a^b f(x)\,dx = \sup \sigma(f) = \inf \Sigma(f) : \quad \text{integrale di } f \text{ su } R.$$

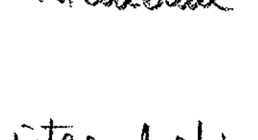
- Se $\sigma(f)$ e $\Sigma(f)$ <u>non</u> sono contigui, cioè $\sup \sigma(f) < \inf \Sigma(f)$, allora f <u>non</u> è integrabile su R, ma si pone

$$\sup \sigma(f) = \underline{\int_R} f \quad : \quad \text{integrale inferiore di } f \text{ su } R$$

e $$\inf \Sigma(f) = \overline{\int_R} f \quad : \quad \text{integrale superiore di } f \text{ su } R.$$

<u>Significato geometrico</u>

$\int_a^b f = \text{area}(T)$



<u>Esempio</u>

Sia $D : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & x \in \mathbb{Q}^c \cap [0,1] \end{cases}$$

funzione di Dirichlet
(funzione caratteristica di $\mathbb{Q} \cap [0,1]$)

Si ha, per ogni $\sigma \in \Delta([0,1])$,

$$s(\sigma) = 0 \quad e \quad S(\sigma) = 1$$

Quindi D non è integrabile, con $\underline{\int_{[0,1]}} D = 0$, $\overline{\int_{[0,1]}} D = 1$.

B) $N = 2$

- Sia $R = [a,b] \times [c,d]$, con $a<b$ e $c<d$, un rettangolo in $\mathbb{R}^2$ o 2-rettangolo.

Decomposizione di R

Facciamo $n+1$ punti $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ in $[a,b]$ e $m+1$ punti $y_0 = c < y_1 < \dots < y_m = d$ in $[c,d]$. Poniamo

$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ con $i \in I = \{1 \dots n\}$, $j \in J = \{1 \dots m\}$.

La collezione

$$\delta = \{ R_{ij} : i \in I, j \in J \}$$

si dice decomposizione di R individuata da $\{x_0, x_1 \dots x_n; y_0, y_1 \dots y_m\}$.

- Poniamo $\Delta(R) = \{ \delta : \delta \text{ decomposizione di } R \}$

Ordinamento in $\Delta(R)$

Siano $\delta, \delta' \in \Delta(R)$ individuate da $\{x_0, x_1 \dots x_n; y_0, y_1 \dots y_m\}$ e $\{x_0', x_1', \dots x_p'; y_0', y_1', \dots y_q'\}$, rispettivamente. Si pone

$$\delta \vdash \delta' \iff \{x_0, x_1 \dots x_n\} \subseteq \{x_0', x_1' \dots x_p'\} \text{ e }$$
$$\{y_0, y_1 \dots y_m\} \subseteq \{y_0', y_1' \dots y_q'\}.$$

Si verifica che $\vdash$ è una relazione d'ordine parziale in $\Delta(R)$.

Proposizione

Se $\delta, \delta' \in \Delta(R)$, allora esiste $\delta^* \in \Delta(R)$ minimo seguente comune δ, δ' ed esiste $\delta_* \in \Delta(R)$ massimo precedente comune.

Dim. Si prende δ^* individuata da $\{x_0, x_1, \dots x_n\} \cup \{x_0', x_1', \dots x_p'\}$ e $\{y_0, y_1 \dots y_m\} \cup \{y_0', y_1' \dots y_q'\}$ e analogamente δ_* individuata da $\{x_0, x_1 \dots x_n\} \cap \{x_0', x_1', \dots x_p'\}$ e $\{y_0, y_1 \dots y_m\} \cap \{y_0', y_1', \dots y_q'\}$.

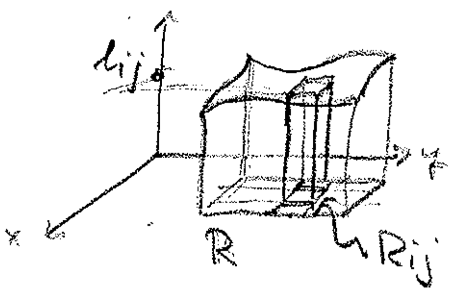
Conclusione

$(\Delta(R), \vdash)$ è un reticolo.

- Sia $f: R = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata.

Somme inferiori e superiori

Significato geometrico



Sia $\delta \in \Delta(R)$. Poniamo

$$s(\delta, f) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} l_{ij}\, m_2(R_{ij})$$

e

$$S(\delta, f) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} L_{ij}\, m_2(R_{ij}),$$

dove $l_{ij} = \inf_{R_{ij}} f$, $L_{ij} = \sup_{R_{ij}} f$, $m_2(R_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$

con $i \in \{1 \dots n\}$, $j \in \{1 \dots m\}$.

Proposizione

Per ogni $\delta, \delta' \in \Delta(R)$, si ha

(i) $s(\delta) \leq S(\delta)$

(ii) $\delta \vdash \delta' \implies s(\delta) \leq s(\delta')$ e $S(\delta) \geq S(\delta')$

(iii) $s(\delta) \leq S(\delta')$

Dim. Come in dim. $N=1$.

- Poniamo

$$\sigma(f) = \{ s(\delta, f) : \delta \in \Delta(R) \}$$

e

$$\Sigma(f) = \{ S(\delta, f) : \delta \in \Delta(R) \}$$

Conclusione

$\sigma(f)$ e $\Sigma(f)$ sono insiemi numerici separati, cioè

$\sup \sigma(f) \leq \inf \Sigma(f)$.

Integrale di Riemann (-Darboux) su R

- Se $\sigma(f)$ e $\Sigma(f)$ sono insiemi contigui, cioè $\sup\sigma(f) = \inf\Sigma(f)$, si dice che f è integrabile secondo Riemann su $R=[a,b]\times[c,d]$ e si pone
$$\int_R f = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \sup\sigma(f) = \inf\Sigma(f).$$

- Se $\sigma(f)$ e $\Sigma(f)$ **non** sono insiemi contigui, cioè $\sup\sigma(f) < \inf\Sigma(f)$, allora f **non** è integrabile su R, ma si pone
$$\underline{\int}_R f = \sup\sigma(f)$$
e
$$\overline{\int}_R f = \inf\Sigma(f).$$

Esempi

- Sia $f: R=[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$, definita da $f(x,y)=k\in\mathbb{R}^+$. Si ha, per ogni $\delta\in\Delta(R)$,
$$s(\delta,f) = k\cdot m_2(R) = S(\delta,f)$$
e quindi $$\iint_R k\,dx\,dy = k\cdot m_2(R).$$

- Sia $D: R=[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$, definita da
$$f(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)^T\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\cap R\\ 0 & (x,y)^T\in(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})^c\cap R\end{cases}$$
Si ha, per ogni $\delta\in\Delta(R)$,
$$s(\delta,D)=0 \quad e \quad S(\delta,D)=m_2(R)$$
e quindi $$\underline{\int}_R D = 0 < \overline{\int}_R D = m_2(R).$$

Significato geometrico ($f\geq 0$)

$T=\{(\underline{x}, f(\underline{x}))\in\mathbb{R}^{N+1} : \underline{x}\in R\}$ $\qquad \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \mathrm{vol}(T).$

c) $N \in \mathbb{N}^+$ (caso generale).

- Sia $R = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_N, b_N]$, con $a_1 < b_1 \ldots a_N < b_N$, un rettangolo in $\mathbb{R}^N$ o N-rettangolo (3-rettangolo = parallelepipedo rettangolo)

<u>Decomposizione di R</u>

Fissiamo $p_1 + 1$ punti $\{x_0^1, x_1^1, \ldots x_{p_1}^1\}$ in $[a_1, b_1]$; ...

... $p_N + 1$ punti $\{x_0^N, x_1^N, \ldots x_{p_N}^N\}$ in $[a_N, b_N]$.

Poniamo

$$R_{i_1 \ldots i_N} = [x_{i_1-1}^1, x_{i_1}^1] \times \ldots \times [x_{i_N-1}^N, x_{i_N}^N]$$

con $i_1 \in I_1 = \{1, \ldots, p_1\}, \ldots, i_N \in I_N = \{1, \ldots, p_N\}$. La collezione

$$\delta = \{ R_{i_1 \ldots i_N} : i_1 \in I_1, \ldots, i_N \in I_N \}$$

si dice decomposizione di R.

- Poniamo $\Delta(R) = \{ \delta : \delta \text{ decomposizione di } R \}$.

<u>Ordinamento in $\Delta(R)$</u>

Siano $\delta, \delta' \in \Delta(R)$ individuate da

$\{x_0^1, x_1^1 \ldots x_{p_1}^1; \ldots; x_0^N, x_1^N \ldots x_{p_N}^N\}$,

$\{y_0^1, y_1^1 \ldots y_{q_1}^1; \ldots; y_0^N, y_1^N \ldots y_{q_N}^N\}$, rispettivamente.

Si pone

$$\delta \prec \delta' \iff \{x_0^1, x_1^1 \ldots x_{p_1}^1\} \subseteq \{y_0^1, y_1^1 \ldots y_{q_1}^1\}, \ldots$$

$$\ldots \{x_0^N, x_1^N \ldots x_{p_N}^N\} \subseteq \{y_0^N, y_1^N, \ldots, y_{q_N}^N\}$$

Si verifica che $\prec$ è una relazione d'ordine parziale in $\Delta(R)$.

Proposizione

Se $\delta, \delta' \in \Delta(R)$, allora esiste $\delta^* \in \Delta(R)$ minimo seguente comune col esiste $\delta_* \in \Delta(R)$ massimo precedente comune.

Conclusione

$(\Delta(R), \vdash)$ è un reticolo.

Notazione:

Introduciamo, per comodità, il multiindice

$$\alpha = (i_1 \dots i_N) \in I_1 \times \dots \times I_N \; (\subseteq \mathbb{N}^+ \times \dots \times \mathbb{N}^+).$$

- Sia $f: R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_N, b_N] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata.

Somme inferiori e superiori (di Riemann-Darboux)

Sia $\delta \in \Delta(R)$. Poniamo

$$s(\delta, f) = \sum_\alpha l_\alpha \cdot m_N(R_\alpha) \quad \left(= \sum_{i_1=1}^{p_1} \dots \sum_{i_N=1}^{p_N} l_{i_1 \dots i_N} m_N(R_{i_1 \dots i_N})\right)$$

e

$$S(\delta, f) = \sum_\alpha L_\alpha \cdot m_N(R_\alpha),$$

dove $l_\alpha = \inf_{R_\alpha} f$, $L_\alpha = \sup_{R_\alpha} f$, $m_N(R_\alpha) = (x^1_{i_1} - x^1_{i_1-1}) \cdot \ldots \cdot (x^N_{i_N} - x^N_{i_N-1})$,

con $\alpha = (i_1 \dots i_N) \in I_1 \times \dots \times I_N$.

Proposizione

Per ogni $\delta, \delta' \in \Delta(R)$, si ha

(i) $s(\delta) \leq S(\delta)$

(ii) $\delta \vdash \delta' \Rightarrow s(\delta) \leq s(\delta')$ e $S(\delta) \geq S(\delta')$

(iii) $s(\delta) \leq S(\delta')$.

Poniamo

$$\sigma(f) = \{ s(\delta, f) : \delta \in \Delta(R) \}$$

e

$$\Sigma(f) = \{ S(\delta, f) : \delta \in \Delta(R) \}.$$

<u>Conclusione</u>

$\sigma(f)$ e $\Sigma(f)$ sono insiemi numerici separati, cioè $\sup \sigma(f) \leq \inf \Sigma(f)$.

<u>Integrale di Riemann (-Darboux) su R</u>

- Se $\sigma(f)$ e $\Sigma(f)$ sono insiemi numerici contigui, cioè $\sup \sigma(f) = \inf \Sigma(f)$, si dice che f è integrabile secondo Riemann su $R = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_N, b_N]$ e si pone

$$\int_R f = \int \cdots \int_R f(x_1, \ldots x_N)\, dx_1 \ldots dx_N = \sup \sigma(f) = \inf \Sigma(f).$$

- Se $\sigma(f)$ e $\Sigma(f)$ <u>non</u> sono insiemi contigui, cioè $\sup \sigma(f) < \inf \Sigma(f)$, allora f <u>non</u> è integrabile su R, ma si pone

$$\underline{\int}_R f = \sup \sigma(f) \quad : \text{ integrale inferiore}$$

e

$$\overline{\int}_R f = \inf \sigma(f) \quad : \text{ integrale superiore}$$

Criteri di integrabilità su N-rettangoli (di Riemann)

Proposizione (I criterio di integrabilità)

Sia $f : R \to \mathbb{R}$ limitata su R N-rettangolo. Si ha che f è integrabile su R se e solo se

$$(C)\quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists\, \delta \in \Delta(R))\left(S(\delta) - s(\delta) = \sum_{\alpha} (L_\alpha - l_\alpha)\, m_N(R_\alpha) < \varepsilon \right).$$

Dim.

- Se vale (C), allora $\sigma(f)$ e $\Sigma(f)$ sono contigui e quindi f è integrabile.
- Se f è integrabile, allora $\sigma(f)$ e $\Sigma(f)$ sono contigui e quindi per ogni $\varepsilon > 0$, esistono $\delta_1, \delta_2 \in \Delta(R)$ tali che $S(\delta_1) - s(\delta_2) < \varepsilon$. Posto $\delta = \delta_1 \vee \delta_2$, si ha

$$S(\delta) - s(\delta) \leq S(\delta_1) - s(\delta_2) < \varepsilon.$$

Somme di Cauchy-Riemann

Sia $f : R \to \mathbb{R}$ limitata su R N-rettangolo. Per ogni $\delta \in \Delta(R)$ e ogni scelta di punti $x_\alpha \in R_\alpha$, con $\alpha \in I_1 \times \dots \times I_N$, si definisce la somma di Cauchy-Riemann

$$s(\delta, (x_\alpha)_\alpha) = \sum_\alpha f(x_\alpha)\, m_N(R_\alpha).$$

Ovviamente risulta: $\quad s(\delta) \leq s(\delta, (x_\alpha)_\alpha) \leq S(\delta)$.

- Se f è integrabile su R, allora si ha: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta \in \Delta(R)$ tale che, per ogni scelta di punti $x_\alpha \in R_\alpha$ con $\alpha \in I_1 \times \dots \times I_N$,

$$\left| \int_R f - \sum_\alpha f(x_\alpha)\, m_N(R_\alpha) \right| < \varepsilon.$$

Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, si prende $\sigma \in \Delta(R)$ tale che

$$\int_R f - \frac{\varepsilon}{2} < s(\sigma) \le S(\sigma) < \int_R f + \frac{\varepsilon}{2} .$$

- Viceversa, se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\sigma \in \Delta(R)$ tale che, per ogni scelta di punti $x_\alpha \in R_\alpha$, con $\alpha \in I_1 \times \ldots \times I_N$,

$$|\lambda - s(\sigma, (x_\alpha)_\alpha)| < \varepsilon,$$

allora f è integrabile su R e $\int_R f = \lambda$.

Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, si prende $\sigma \in \Delta(R)$ tale che per ogni scelta di punti $x_\alpha \in R_\alpha$ sia

$$\lambda - \frac{\varepsilon}{4} < s(\sigma, (x_\alpha)_\alpha) < \lambda + \frac{\varepsilon}{4} .$$

Passando agli estremi inferiori e superiori nelle somme si ottiene

$$\lambda - \frac{\varepsilon}{4} \le s(\sigma) \le S(\sigma) \le \lambda + \frac{\varepsilon}{4}$$

e quindi $\qquad S(\sigma) - s(\sigma) \le \varepsilon/2 < \varepsilon .$

Dunque f è integrabile e $\int_R f = \lambda$.

Un' ulteriore criterio basato sull' oscillazione delle funzioni.

Oscillazione

- Sia $f : E\,(\subseteq \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ limitata. Si pone

$$\omega_f(E) = \sup_{x,y \in E} |f(x) - f(y)| = \operatorname{diam} f(E) = \sup_E f - \inf_E f.$$

- Sia $f : E\,(\subseteq \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ localmente limitata in $x^0 \in E$.

Si pone

$$\omega_f(x_0) = \inf_{\rho > 0} \underbrace{\omega_f(B(x^0, \rho))}_{\text{fne crescente di } \rho} = \lim_{\rho \to 0^+} \omega_f(B(x^0, \rho)).$$

Osservazione

f è continua in $x^0 \iff \omega_f(x^0) = 0$.

Teorema (II criterio d'integrabilità) **(di Du Bois-Reymond)**

Sia $f : R \to \mathbb{R}$ limitata su R N-rettangolo. Si ha che:

f è integrabile su R se e solo se

i) per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $\eta > 0$ esiste $\delta \in \Delta(R)$ tale che, indicando con β gli indici per cui $\omega_f(R_\beta) = L_\beta - l_\beta \geq \eta$, si ha $\sum_\beta m_N(R_\beta) < \varepsilon$.

Dim. Supponiamo $f \not\equiv 0$.

- Se f è integrabile su R, allora, fissati $\varepsilon > 0$ e $\eta > 0$, esiste $\delta \in \Delta(R)$ tale che

$$\varepsilon\eta > \sum_\alpha (L_\alpha - l_\alpha)\, m_N(R_\alpha) = \sum_\beta (L_\beta - l_\beta)\, m_N(R_\beta) + \\ + \sum_\gamma (L_\gamma - l_\gamma)\, m_N(R_\gamma) \geq \eta \sum_\beta m_N(R_\beta)$$

e quindi $\sum_\beta m_N(R_\beta) < \varepsilon$.

- Se vale la condizione (o), allora, fissato $\varepsilon > 0$ e posto $\eta = \frac{\varepsilon}{2 m_N(R)}$, con $L = \sup_R |f| > 0$, esiste $\delta \in \mathcal{D}(R)$ tale che

$$\sum_\beta m_N(R_\beta) < \frac{\varepsilon}{4L}$$

e quindi

$$\sum_\alpha (L_\alpha - l_\alpha)\, m_N(R_\alpha) = \sum_\beta \overbrace{(L_\beta - l_\beta)}^{\geq \eta} m_N(R_\beta) + \sum_\gamma \overbrace{(L_\gamma - l_\gamma)}^{< \eta} m_N(R_\gamma)$$

$$\leq 2L \sum_\beta m_N(R_\beta) + \eta \sum_\gamma m_N(R_\gamma)$$

$$< 2L \cdot \frac{\varepsilon}{4L} + \frac{\varepsilon}{2 m_N(R)} \cdot m_N(R) = \varepsilon$$

Esercizio: calcolare $\int_0^1 f$

Esempio

Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{se } x = \frac{p}{q}, \text{ con } p, q \text{ primi fra loro}, \\ 0 & \text{se } x \in ([0,1] \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\} \end{cases}$$

La funzione f è discontinua sui razionali e continua sugli irrazionali. Proviamo la seconda affermazione. Sia $x_0 \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Fissato $\varepsilon > 0$, osserviamo che esiste nell'intervallo $[0,1]$ solo un numero finito di razionali $\frac{p}{q}$, con p, q primi fra loro, tali che $\frac{1}{q} \geq \varepsilon$. Prendiamo $\rho > 0$ tale che $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ non ne contenga alcuno: se $x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$, allora $|f(x)| < \varepsilon$.

al max $1 + 2 + \dots + \bar{q}$, $\bar{q} = [\frac{1}{\varepsilon}]$

Proviamo che f verifica la condizione (o).
Fissiamo $\varepsilon > 0$ ed $\eta > 0$. Poiché esiste solo un insieme finito di razionali $\frac{p}{q}$, con p, q primi fra loro, tali che $\frac{1}{q} \geq \eta$, possiamo trovare una decomposizione δ in cui gli intervalli R_β che contengono tali punti e dove l'oscillazione $\omega_f(R_\beta) = \frac{1}{q} \geq \eta$, hanno misura totale $\sum_\beta m_1(R_\beta) < \varepsilon$.

Condizioni sufficienti per l'integrabilità

Teorema

Se $f: R \to \mathbb{R}$ è continua su R N-rettangolo, allora f è integrabile su R.

Dim.

Poiché f è continua sul compatto R, per il teorema di Weierstrass, è limitata e, per il teorema di Heine, è uniformemente continua, cioè

$(\forall \eta > 0)(\exists \rho > 0)(\forall x, y \in R)(\|x - y\| < \rho \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \eta)$.

Pertanto, fissato $\varepsilon > 0$ e $\eta > 0$, basta prendere $\delta \in \mathcal{A}(R)$ tale che, per ogni α, $\operatorname{diam}(R_\alpha) < \rho$ e quindi

$$\omega_f(R_\alpha) = L_\alpha - l_\alpha < \eta,$$

cioè l'insieme degli indici β per i quali $\omega_f(R_\beta) \geq \eta$ è vuoto e dunque

$$\sum_\beta m_N(R_\beta) = 0 < \varepsilon.$$

Ne consegue che f è integrabile per il II criterio.

Teorema (valido solo per $N=1$) (monotonia)

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è monotona, allora f è integrabile su $[a,b]$.

Dim. Supponiamo f crescente. Fissiamo $\varepsilon>0$ e prendiamo $\delta\in\Delta([a,b])$ individuata dai punti $x_k = a+\frac{b-a}{n}k$, con $k\in\{1\dots n\}$ e n da determinarsi.

Si ha

$$
\begin{aligned}
S(\delta)-s(\delta) &= \sum_{k=1}^{n}(L_k-l_k)(x_k-x_{k-1}) = \\
&= \sum_{k=1}^{n}\big(f(x_k)-f(x_{k-1})\big)\frac{b-a}{n} = \\
&= \big(f(x_1)-f(x_0)+f(x_2)-f(x_1)+\dots+f(x_n)-f(x_{n-1})\big)\frac{b-a}{n} \\
&= \big(f(b)-f(a)\big)(b-a)\frac{1}{n} < \varepsilon,
\end{aligned}
$$

purché n sia sufficientemente grande. Il I criterio implica l'integrabilità di f.

Osservazione

Questo teorema e il precedente esempio mostrano che la continuità è ben lontana dall'essere una condizione necessaria per l'integrabilità. In particolare, una funzione integrabile può essere discontinua, anche su un insieme numerabile.