Proprietà dell'integrale su N-rettangoli

L'insieme delle funzioni integrabili e il funzionale integrale

Sia R un N-rettangolo. Poniamo

$$\mathcal{R}(R) = \{ f : R \to \mathbb{R} \mid f \text{ integrabile su } R \}$$

e

$$\mathcal{I} : \mathcal{R}(R) \to \mathbb{R}, \qquad \mathcal{I}(f) = \int_R f .$$

Vogliamo studiare le proprietà di $\mathcal{R}(R)$ e di $\mathcal{I}$.

Premettiamo due lemmi.

Lemma 1

- Se $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sono insiemi limitati, allora, posto $A + B = \{ a+b : a \in A, b \in B \}$, si ha
$$\inf(A+B) = \inf A + \inf B$$
e
$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B.$$
- Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme limitato e $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora, posto $\lambda A = \{ \lambda a \mid a \in A \}$, si ha
$$\lambda > 0 \Rightarrow \inf(\lambda A) = \lambda \inf A \quad \text{e} \quad \sup(\lambda A) = \lambda \sup A$$
$$\lambda < 0 \Rightarrow \inf(\lambda A) = \lambda \sup A \quad \text{e} \quad \sup(\lambda A) = \lambda \inf A.$$

Dim. Per esercizio

Lemma 2

Se $f : R \to \mathbb{R}$ è integrabile su R e $\varphi : K \to \mathbb{R}$ è continua, con K un compatto tale che $f(R) \subseteq K$, allora $\varphi \circ f$ è integrabile su R.

Dim.

Per il teorema di Heine applicato a φ, risulta

$(\forall \eta > 0)(\exists \rho > 0)(\forall t_1, t_2 \in K)(|t_1 - t_2| < \rho \Rightarrow |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \eta)$.

Per il II criterio di integrabilità applicato a f, si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $\rho > 0$ esiste $\delta \in \Delta(R)$ tale che, indicando con β gli indici per cui $\omega_f(R_\beta) = L_\beta^f - l_\beta^f \geq \rho$, risulta $\sum_\beta m_N(R_\beta) < \varepsilon$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e $\eta > 0$. Sia $\rho > 0$ corrispondente a η e $\delta \in \Delta(R)$ corrispondente a ε e ρ. Gli indici μ per cui risulta:

$$\omega_{\varphi \circ f}(R_\mu) = L_\mu^{\varphi \circ f} - l_\mu^{\varphi \circ f} \geq \eta$$

sono compresi fra gli indici β e quindi

$$\sum_\mu m_N(R_\mu) \leq \sum_\beta m_N(R_\beta) < \varepsilon.$$

Il II criterio di integrabilità implica che $\varphi \circ f$ è integrabile.

Osservazioni ($N = 1$, per semplicità)

Alla luce del precedente risultato, il quale afferma che

1) se $f: [a,b] \to [c,d]$ è integrabile e $\varphi: [c,d] \to \mathbb{R}$ è continua, allora $\varphi \circ f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile,

è naturale porre le seguenti questioni:

2) se $f: [a,b] \to [c,d]$ è integrabile e $\varphi: [c,d] \to \mathbb{R}$ è integrabile, allora $\varphi \circ f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile?

La risposta è negativa.

Esempio

Posto $f: [0,1] \to [0,1]$, con $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, \text{ con } p, q \text{ primi fra loro} \\ 0 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}^c \end{cases}$

e

$\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}$, con $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$,

si ha che

$$(\varphi \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & x = \frac{p}{q}, \text{ con } p, q \text{ primi fra loro,} \\ 0 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

è la funzione di Dirichlet e quindi non integrabile, pur essendo f e φ integrabili.

3) se $f: [a,b] \to [c,d]$ è continua e $\varphi: [c,d] \to \mathbb{R}$ integrabile, allora $\varphi \circ f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile?

Anche in questo caso la risposta è negativa, ma il controesempio è più elaborato ($\to$ Jitan Lu, Amer. Math. Monthly 106 (1999), 763-766).

Linearità

Se $f, g \in \mathcal{R}(R)$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora $\lambda f + \mu g \in \mathcal{R}(R)$ e

$$\int_R (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_R f + \mu \int_R g ,$$

quindi $\mathcal{R}(R)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e J è un funzionale lineare.

Dim.

- Somma

Fissato $\varepsilon > 0$ esistono $\delta', \delta'' \in \Delta(R)$ tali che

$$S(\delta', f) - s(\delta', f) < \frac{\varepsilon}{2} , \quad S(\delta'', g) - s(\delta'', g) < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Sia $\delta \in \Delta(R)$ seguente δ', δ''. Poiché per ogni α $(f+g)(R_\alpha) \subseteq$
$\subseteq f(R_\alpha) + g(R_\alpha)$, dal Lemma 1 segue che

$$S(\delta, f+g) - s(f+g, \delta) \leq S(\delta, f) + S(\delta, g) - s(\delta, f) - s(\delta, g)$$
$$\leq S(\delta', f) - s(\delta', f) + S(\delta'', g) - s(\delta'', g) < \varepsilon .$$

Quindi $f+g$ è integrabile per il I criterio. Inoltre risulta

$$s(\delta, f) + s(\delta, g) \leq s(\delta, f+g) \leq \int_R (f+g) \leq$$

$$\leq S(\delta, f+g) \leq S(\delta, f) + S(\delta, g)$$

e quindi

$$\int_R (f+g) = \int_R f + \int_R g .$$

- Prodotto per una costante $\lambda \in \mathbb{R}$

Sia $\lambda \neq 0$. Posto $\varphi(t) = \lambda t$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua.
Per il Lemma 2, $\varphi \circ f = \lambda f$ è integrabile su R.
Inoltre risulta:

$$\lambda > 0 \Rightarrow \lambda s(\delta, f) = s(\delta, \lambda f) \leq \int_R \lambda f \leq S(\delta, \lambda f) = \lambda S(\delta, f)$$

$$\lambda < 0 \Rightarrow \lambda S(\delta, f) = s(\delta, \lambda f) \leq \int_R \lambda f \leq S(\delta, \lambda f) = \lambda s(\delta, f)$$

e quindi $\displaystyle \int_R \lambda f = \lambda \int_R f .$

Monotonia

Se $f, g \in \mathcal{R}(R)$ e $f(\underline{x}) \le g(\underline{x})$ per ogni $\underline{x} \in R$, allora

$$\int_R f \le \int_R g.$$

cioè I è un funzionale monotono.

Dim.

Per ogni $\delta \in \Delta(R)$ si ha

$$s(\delta, f) = \sum_\alpha \ell_\alpha^f m_N(R_\alpha) \le \sum_\alpha \ell_\alpha^g m_N(R_\alpha) = s(\delta, g).$$

Da cui segue

$$s(\delta, f) \le \sup \sigma(g)$$

e quindi

$$\int_R f = \sup \sigma(f) \le \sup \sigma(g) = \int_R g.$$

Osservazioni

- Sia $h: R \to \mathbb{R}$ integrabile tale che $h(\underline{x}) \ge 0$ per ogni $\underline{x} \in R$ e $\int_R h = 0$.

  In generale, non si può concludere che $h(\underline{x}) = 0$ per ogni $\underline{x} \in R$.

  Esempio: $h: [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da $h(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$.

- Sotto l'ulteriore ipotesi che h sia continua, allora si può concludere che $h(\underline{x}) = 0$ per ogni $\underline{x} \in R$.

- Posto, per ogni $h \in \mathcal{R}(R)$,

  $$\|h\|_1 = \int_R |h|.$$

  $\|\cdot\|_1$ è una seminorma in $\mathcal{R}(R)$, cioè $\|\cdot\|_1$ è omogenea e subadditiva, ma non è una norma, non essendo non-degenere.

  $\|\cdot\|_1$ è una norma in $\mathcal{C}^0(R)$.

- Se $f, g: R \to \mathbb{R}$ sono limitate, ma non integrabili, su R N-rettangolo e $f(\underline{x}) \le g(\underline{x})$ in R, si ha $\underline{\int}_R f \le \underline{\int}_R g$ e $\overline{\int}_R f \le \overline{\int}_R g$.

Integrabilità del valore assoluto

Se $f \in R(R)$, allora $|f| \in R(R)$ e

$$\left|\int_R f\right| \le \int_R |f|.$$

Dim:

Posto $\varphi(t)=|t|$, la funzione φ è continua. Quindi, per il Lemma 2, $\varphi \circ f = |f|$ è integrabile su R.

Inoltre si ha per ogni $x \in R$

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

e quindi per la monotonia

$$-\int_R |f| \le \int_R f \le \int_R |f|.$$

Osservazione

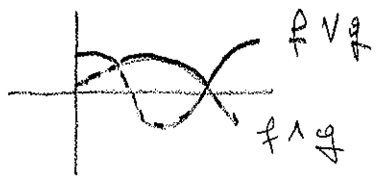
Se $|f| \in R(R)$, non si può concludere in generale che $f \in R(R)$.

Esempio: $f:[0,1] \to \mathbb{R}$, definita da $f(x)=\begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ -1 & x \in \mathbb{Q}^c \cap [0,1] \end{cases}$

non è integrabile, pur essendo $|f| = 1$ integrabile.

Integrabilità del minimo e del massimo

Se $f, g \in R(R)$, allora $f \wedge g = \min\{f, g\}$, $f \vee g = \max\{f, g\} \in R(R)$ e quindi $R(R)$ è un reticolo.



Dim.

Si ha

$$f \vee g = \max\{f, g\} = \frac{1}{2}\left(f + g + |f - g|\right)$$

e

$$f \wedge g = \min\{f, g\} = \frac{1}{2}\left(f + g - |f - g|\right)$$

La conclusione segue dai teoremi precedenti.

Osservazione

In particolare, se $f \in \mathcal{R}(R)$, allora $f^+, f^- \in \mathcal{R}(R)$.

Integrabilità del prodotto

Se $f, g \in \mathcal{R}(R)$, allora $f \cdot g \in \mathcal{R}(R)$ e quindi $\mathcal{R}(R)$ è un'algebra.
(commutativa).

Dim.

- Integrabilità di f^2

  Posto $\varphi(t) = t^2$, la funzione φ è continua. Quindi, per il Lemma 2, $\varphi \circ f = f^2$ è integrabile su R.

- Integrabilità di $f \cdot g$

  Si ha
  $$f \cdot g = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right]$$
  La conclusione segue dai risultati precedenti.

NB: Ovviamente, in generale, non vale $\int_R f g = \int_R f \cdot \int_R g$.

Proprietà della media

- Se $f \in \mathcal{R}(R)$, allora

$$\inf_R f \leq \frac{\int_R f}{m_N(R)} \leq \sup_R f.$$

- Se $f \in C^0(R)$, allora esiste $x^0 \in R$ tale che

$$f(x^0) = \frac{\int_R f}{m_N(R)} \quad \text{(media integrale)}$$

Dim

- Detta $\delta = \{R\}$ la decomposizione banale di R, si ha

$$s(\delta) = \inf_R f \cdot m_N(R) \leq \int_R f \leq \sup_R f \cdot m_N(R) = S(\delta).$$

- Per il teorema di Weierstrass e per il teorema di connessione, si ha $f(R) = [\min_R f, \max_R f]$ e quindi esiste $x^0 \in R$ tale che

$$f(x^0) = \frac{\int_R f}{m_N(R)} \in [\min_R f, \max_R f].$$

Proprietà della media pesata (per esercizio)

- Se $f, g \in \mathcal{R}(R)$, con $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in R$ e $\int_R g > 0$, allora

$$\inf_R f \leq \frac{\int_R f \cdot g}{\int_R g} \leq \sup_R f$$

- Se $f \in C^0(R)$ e $g \in \mathcal{R}(R)$, con $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in R$ e $\int_R g > 0$, allora esiste $x^0 \in R$ tale che

$$f(x^0) = \frac{\int_R f \cdot g}{\int_R g} \quad \text{(media integrale pesata)}$$

Integrabilità della restrizione

Se $f \in \mathcal{R}(R)$ e R' è un N-rettangolo contenuto in R, allora $f_{|R'} \in \mathcal{R}(R')$.

Dim.

Basta osservare che $f \cdot \chi_{R'}$ è integrabile su R e quindi $f_{|R'}$ lo è pure.

Additività rispetto al dominio

Se R, R', R'' sono N-rettangoli tali che $R = R' \cup R''$ e $\operatorname{int} R' \cap \operatorname{int} R'' = \emptyset$ e $f : R \to \mathbb{R}$ è tale che $f_{|R'} \in \mathcal{R}(R')$, $f_{|R''} \in \mathcal{R}(R'')$, allora $f \in \mathcal{R}(R)$ e

$$\int_R f = \int_{R'} f + \int_{R''} f .$$

Dim.

Fissato $\varepsilon > 0$ esistono $\delta' \in \Delta(R')$, $\delta'' \in \Delta(R'')$ tali che

$$S(\delta', f_{|R'}) - s(\delta', f_{|R'}) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad S(\delta'', f_{|R''}) - s(\delta'', f_{|R''}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sia δ una decomposizione di R che induce su R' e su R'' decomposizioni $\bar{\delta}'$ e $\bar{\delta}''$ più fini di δ' e di δ'', rispettivamente.

si ha

$$S(\delta,f)-s(\delta,f)=S(\bar\delta',f_{|R'})-s(\bar\delta',f_{|R'})+$$
$$+S(\bar\delta'',f_{|R''})-s(\bar\delta'',f_{|R''})<\varepsilon.$$

Quindi f è integrabile su R. Inoltre risultando

$$s(\bar\delta',f_{|R'})+s(\bar\delta'',f_{|R''})\leq\int_R f\leq$$
$$\leq S(\bar\delta',f_{|R'})+S(\bar\delta'',f_{|R''}),$$

si ha

$$\int_{R'}f+\int_{R''}f-\varepsilon\leq\int_R f\leq\int_{R'}f+\int_{R''}f+\varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di ε segue la tesi.

<u>Corollario</u>

Se $f\in\mathcal{R}(R)$ e $R=R'\cup R''$, con R', R'' N-rettangoli tali che $\mathrm{int}\,R'\cap\mathrm{int}\,R''=\emptyset$, si ha

$$\int_R f=\int_{R'}f+\int_{R''}f.$$

Formule di riduzione su N-rettangoli

Problema

Come calcolare $\int_R f$ con R un N-rettangolo?

- $N = 1$

  Teorema (di Torricelli)

  Se $f : R = [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile e primitivabile su R, allora $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$, con $G' = f$ in R.

- $N \geq 2$

  Si cerca di ricondurre il calcolo dell'integrale multiplo a successive integrazioni unidimensionali.

Formule di riduzione per integrali doppi

Teorema (di Fubini)

Se $f : R = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ è integrabile su R e per ogni $x \in [a,b]$, $f(x,\cdot) : [c,d] \to \mathbb{R}$ è integrabile su $[c,d]$, allora la funzione $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, definita da

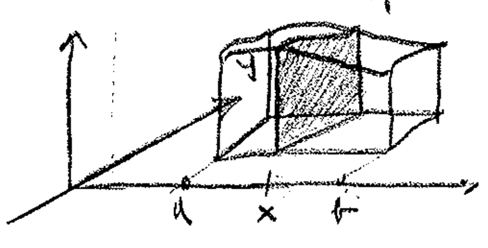
$$g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy,$$

è integrabile su $[a,b]$ e

$$\int_a^b g(x)\,dx = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy,$$

cioè

$$\underbrace{\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx}_{\text{integrale iterato}} = \underbrace{\iint_R f(x,y)\,dx\,dy}_{\text{integrale doppio}}$$



Dim.

Sia δ una decomposizione di R, con

$$\delta = \{ R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] : i = 1 \dots n,\ j = 1 \dots m \}.$$

Per ogni $i = 1 \dots n$, $j = 1 \dots m$, si ha

$$\inf_{R_{ij}} f = l_{ij} \leq f(x,y) \leq L_{ij} = \sup_{R_{ij}} f \qquad \text{in } R_{ij}.$$

Integrando su $[y_{j-1}, y_j]$ e sommando su $j = 1 \dots m$, si ottiene, per $i = 1 \dots n$,

$$\sum_{j=1}^{m} l_{ij} (y_j - y_{j-1}) \leq \int_c^d f(x,y)\,dy = g(x) \leq \sum_{j=1}^{m} L_{ij} (y_j - y_{j-1})$$

in $[x_{i-1}, x_i]$.

e quindi

$$\sum_{j=1}^{m} l_{ij} (y_j - y_{j-1}) \leq \inf_{[x_{i-1}, x_i]} g \leq \sup_{[x_{i-1}, x_i]} g \leq \sum_{j=1}^{m} L_{ij} (y_j - y_{j-1}).$$

Moltiplicando per $x_i - x_{i-1}$ e sommando su $i = 1 \dots n$ si ha

$$s(\delta, f) \leq s(\delta_x, g) \leq S(\delta_x, g) \leq S(\delta, f),$$

dove δ_x è la decomposizione di $[a, b]$ data da

$$\delta_x = \{ [x_{i-1}, x_i] : i = 1 \dots n \}.$$

Poichè f è integrabile su R, si ottiene

$$\iint_R f = \sup_{\delta} s(\delta, f) \leq \sup_{\delta_x} s(\delta_x, g)$$

e

$$\inf_{\delta_x} S(\delta_x, g) \geq \inf_{\delta} S(\delta, f) = \int_R f.$$

Quindi g è integrabile su $[a, b]$ e $\int_a^b g(x)\,dx = \iint_R f$.

Osservazioni

1. Vale un analogo risultato in cui le variabili si scambiano i ruoli.

2. La condizione $f \in \mathcal{R}(R)$ non implica che, per ogni $x \in [a,b]$, $f(x,\cdot) \in \mathcal{R}([c,d])$.

   Esempio: $f(x,y) = \begin{cases} 0 & [0,1]\times[0,1[\\ D(y) & [0,1]\times\{1\} \end{cases}$

3. Vale il seguente risultato più generale: se $f \in \mathcal{R}(R)$, allora

   per ogni $x \in [a,b]$, $\quad g(x) = \underline{\int_c^d} f(x,y)\,dy \quad$ e

   $$h(x) = \overline{\int_c^d} f(x,y)\,dy$$

   sono integrabili su $[c,d]$ e

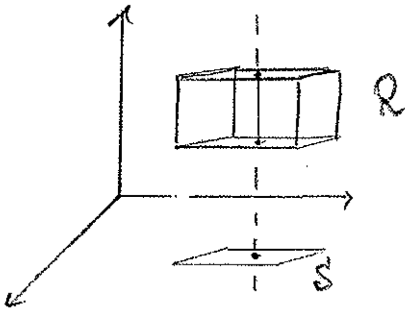
   $$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b h(x)\,dx.$$

4. Se $f \in C^0(R)$, allora

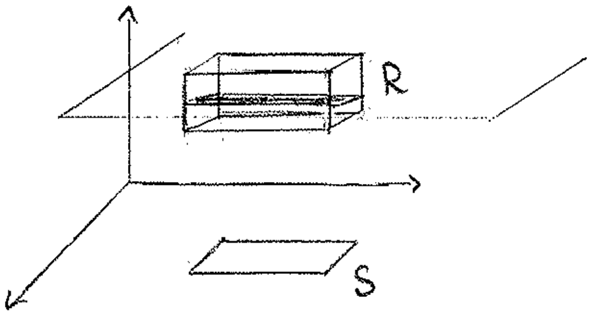
   $$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy.$$

Formule di riduzione per integrali tripli

Idea Due metodi sono naturali:



riduzione per corde



riduzione per sezioni

Riduzione per corde

Teorema (di Fubini)

Se $f : R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \to \mathbb{R}$ è integrabile su R e, per ogni $(x,y) \in S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, $f(x,y,\cdot) : [a_3, b_3] \to \mathbb{R}$ è integrabile su $[a_3, b_3]$, allora la funzione

$$g(x,y) = \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\, dz$$

è integrabile su S e

$$\iint_S g(x,y)\, dx\, dy = \iiint_R f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz,$$

cioè

$$\iint_S \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\, dx \right) dx\, dy = \iiint_R f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

integrale iterato integrale triplo

Osservazioni

- Analoghi risultati in cui le variabili si scambiano i ruoli sono validi.
- Le ipotesi sono soddisfatte se $f \in C^0(R)$.

Riduzione per sezioni

Teorema (di Fubini)

Se $f : R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \to \mathbb{R}$ è integrabile su R e, per ogni $z \in [a_3, b_3]$, $f(\cdot, \cdot, z) : S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ è integrabile su S, allora la funzione

$$h(z) = \iint_S f(x, y, z)\, dx\, dy$$

è integrabile su $[a_3, b_3]$ e

$$\int_{a_3}^{b_3} h(z)\, dz = \iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz ,$$

cioè

$$\int_{a_3}^{b_3} \left(\iint_S f(x, y, z)\, dx\, dy \right) dz = \iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Osservazioni

- Analoghi risultati in cui le variabili si scambiano i ruoli sono validi
- Le ipotesi sono verificate se $f \in C^0(R)$.

Formule di riduzione in $\mathbb{R}^n$ (caso generale)

Teorema (di Fubini)

Se $f : R = ([a_1, b_1] \times \ldots \times [a_p, b_p]) \times ([c_1, d_1] \times \ldots \times [c_q, d_q]) \to \mathbb{R}$
è integrabile e, per ogni $x = (x_1 \ldots x_p) \in S = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_p, b_p]$,
$f(x, \cdot) : T = [c_1, d_1] \times \ldots \times [c_q, d_q] \to \mathbb{R}$ è integrabile su T,
allora la funzione rispetto a $(y_1 \cdots y_q) = y \in T$

$$g(x) = \int_T f(x, \cdot)$$

è integrabile su S e

$$\int_S g = \int_R f,$$

cioè

$$\int_S \left(\int_T f(x_1 \ldots x_p, y_1 \ldots y_q)\, dy_1 \ldots dy_q \right) dx_1 \ldots dx_p =$$

$$= \int_{R = S \times T} f(x_1 \ldots x_p, y_1 \ldots y_p)\, dx_1 \ldots dx_p\, dy_1 \ldots dy_p$$

Osservazione

- Le ipotesi sono verificate, se $f \in C^0(R)$.

20. A subset A of the unit square $S = [0, 1] \times [0, 1]$ that is dense in S and such that every vertical or horizontal line that meets S meets A in exactly one point.

What we are seeking is a one-to-one correspondence f with domain and range $[0, 1]$ and with a graph dense in S. We start by defining $f(x)$ for $x \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$, in stages. Let the points of $B \equiv ((0, 1] \cap \mathbb{Q}) \times ((0, 1] \cap \mathbb{Q})$ be arranged in a sequence: (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\cdots$. We define $f(x_1) \equiv y_1$ for the zero stage. For stage one we partition B into four disjoint parts by vertical and horizontal bisecting lines, $((0, \frac{1}{2}] \cap \mathbb{Q}) \times ((0, \frac{1}{2}] \cap \mathbb{Q})$, $((0, \frac{1}{2}] \cap \mathbb{Q}) \times ((\frac{1}{2}, 1] \cap \mathbb{Q})$, $\cdots$, and denote these parts in any order: B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{14}. Denote by (x_{11}, y_{11}) the first point of the sequence $\{(x_n, y_n)\}$ that belongs to B_{11} and is such that neither $x_{11} = x_1$ nor $y_{11} = y_1$, and let $f(x_{11}) \equiv y_{11}$. Denote by (x_{12}, y_{12}) the first point of the sequence $\{(x_n, y_n)\}$ that belongs to B_{12} and is such that x_{12} is different from both x_1 and x_{11} and y_{12} is different from both y_1 and y_{11}, and let $f(x_{12}) \equiv y_{12}$. After $f(x_{13})$ is defined similarly to be equal to y_{13}, we denote by (x_{14}, y_{14}) the first point of $\{(x_n, y_n)\}$ that belongs to B_{14} and is such that x_{14} is different from x_1, x_{11}, x_{12}, and x_{13}, and y_{14} is different from y_1, y_{11}, y_{12}, and y_{13}, and define $f(x_{14}) \equiv y_{14}$. This completes stage one. Stage two is similar, with B partitioned into sixteen $= 4^2$ parts by further vertical and horizontal bisections, B_{21}, B_{22}, $\cdots$, $B_{2,4^2}$. For each of these parts in turn we define f at a rational point not yet in its domain and having as value a rational point not yet in its range. If this procedure is indefinitely continued, with B partitioned into 4^n congruent parts at stage n, a function f having the specified properties for $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ is obtained. Finally, we extend the domain and range of f to $[0, 1]$ by defining $f(x) \equiv x$ for $x \in [0, 1] \setminus ((0, 1] \cap \mathbb{Q})$.

consists of *all* α less than Ψ, and the range E of $q(\alpha)$ contains a point p_α from *every* closed plane set F_α of positive plane measure.

We now show that the set E is nonmeasurable by assuming the contrary and obtaining a contradiction. Indeed, if E is measurable, then so is its complement E', and since E' contains no closed plane set of positive plane measure, E' must have measure zero. On the other hand, since every line in the plane meets E in at most two points, E must also have measure zero (by the Fubini theorem). Therefore the entire plane, being the union of the two sets E and E' of measure zero, must also be of measure zero, and we have the desired contradiction.

We note too that if S is any set of positive plane measure, then $S \cap E$ is nonmeasurable. Otherwise the Fubini theorem implies that $\mu(S \cap E) = 0$, whence $\mu(S \setminus E) > 0$. Thus $S \setminus E$ contains some closed set F of positive plane measure. Since $F \cap E = \emptyset$, there is a contradiction of the basic property of E: E meets every closed set of positive plane measure.

S. Mazurkiewicz [31] constructed a plane set E meeting each line of the plane in *precisely* two points. However, such a set E may be measurable and indeed is then of measure zero. The reason for this is the form of the construction which depends only upon the existence of a set E_1 in the plane such that E_1 meets every line in a set of cardinality $\mathfrak{c}$. The set E is then formed as a subset of E_1.

However, sets enjoying the property of E_1 may have plane measure zero. For example, let C be the Cantor set on $[0, 1]$ and let

$$E_1 = (\mathbb{R} \times C) \cup (C \times \mathbb{R}).$$

Then clearly each line meets E_1 in a set of cardinality $\mathfrak{c}$ and yet E_1 is a (closed) set of plane measure zero.

In [3] the construction of a "Mazurkiewicz set" is given in answer to a problem posed in that journal.

F. Galvin has shown the following: If $1 \leqq n \leqq \aleph_0$, where $\aleph_0$ is the cardinality of $\mathfrak{N}$, there is a nonmeasurable set S in the plane such that the intersection of S with any line consists of precisely n points.

22. A nonnegative function of two variables $f(x, y)$ such that

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dy\, dx = 0$$

and such that $\iint_S f(x, y)\, dA$, where $S = [0, 1] \times [0, 1]$, does not exist.

We shall give two examples, one in which Riemann integration is used and one in which Lebesgue integration is used.

First example: Let f be the characteristic function of the set of Example 20. Then for every $y \in [0, 1]$, $\int_0^1 f(x, y)\, dx = 0$, and for every $x \in [0, 1]$, $\int_0^1 f(x, y)\, dy = 0$, the integrals being those of Riemann. However, the double Riemann integral over S fails to exist, since for the function f the upper and lower Riemann integrals are equal to 1 and 0, respectively.

Second example: Let f be the characteristic function of the set of Example 21. Then the iterated integrals are again both equal to zero, where the integration is that of either Riemann or Lebesgue, while the function f is not measurable on S, and hence has no double Lebesgue integral there.

23. A real-valued function of one real variable whose graph is a nonmeasurable plane set.

Let $f(x)$ be defined as follows, for $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) \equiv \begin{cases} \max\{y \mid (x, y) \in E\} & \text{if} \quad \{y \mid (x, y) \in E\} \neq \emptyset, \\ 0 \quad \text{if} \quad \{y \mid (x, y) \in E\} = \emptyset, \end{cases}$$

where E is the set of Example 21. Let $E_1 \equiv \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} \cap E$, $E_2 \equiv E \setminus E_1$. Then either E_1 or E_2 (or both) must be nonmeasurable since their union is E. If E_1 is nonmeasurable, then

$$F \equiv \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

the graph of f, is the union of E_1 and a subset of the x axis; hence, since the latter has plane measure zero, F is nonmeasurable. If E_2 is nonmeasurable, let $g(x)$ be defined, for $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) \equiv \begin{cases} \min\{y \mid (x, y) \in E)\} & \text{if} \quad \{y \mid (x, y) \in E\} \\ & \qquad \text{consists of two distinct points,} \\ 0 \quad \text{otherwise.} & \end{cases}$$

Then $G \equiv \{(x, g(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$, the graph of g, is the union of E_2 and a subset of the x axis, and hence nonmeasurable. There must exist, then, in one way or the other, a function whose graph is a nonmeasurable plane set.