Integrazione di funzioni limitate su insiemi limitati

Insufficienza dell'integrale sugli N-rettangoli

Come definire e calcolare

$$\iint_E x \, dx\, dy, \qquad \text{con} \qquad E = \{(x,y)^T : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \min\{x^2, 1-\tfrac{1}{2}x\}\}$$

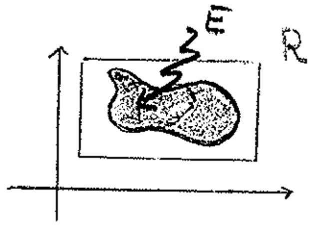
o

$$\iiint_E 1 \, dx\, dy\, dz, \qquad \text{con} \qquad E = \{(x,y,z)^T : x^2+y^2 \le 1+z^2,\ 0 \le z \le 1\} \quad ?$$

Estensione nulla di una funzione

Siano $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme <u>limitato</u> e $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione. Sia R un N-rettangolo tale che $E \subseteq R$.
Definiamo $f_0 : R \to \mathbb{R}$ ponendo

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ 0 & x \in R \setminus E \end{cases}$$



Integrale su un insieme limitato

Si dice che $f : E\ (\subseteq \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, con f <u>limitata</u> ed E <u>limitato</u>, è integrabile su E se esiste un N-rettangolo R, con $E \subseteq R$, tale che la funzione $f_0 : R \to \mathbb{R}$ è integrabile su R e si pone

$$\int_E f = \int_R f_0 .$$

Osservazione

La definizione non dipende dal particolare N-rettangolo R.

Problema

In generale, la funzione f_0 non è continua su R, anche quando f è continua su E.
<u>Esempio</u> Se $f = 1$ su E, $f_0 = \chi_E$ è discontinua su $\partial E \cap \operatorname{int} R$.

Si cercano condizioni più generali della continuità atte a garantire l'integrabilità di f_0 su R.

Teoria della misura secondo Peano-Jordan in $\mathbb{R}^N$

Insieme misurabile secondo Peano-Jordan in $\mathbb{R}^N$

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme limitato. Si dice che E è misurabile secondo Peano-Jordan (PJ-misurabile) in $\mathbb{R}^N$ se la funzione 1 è integrabile su E e si pone

$$m_N(E) = \int_E 1 = \int_R \chi_E ,$$

dove χ_E è la funzione caratteristica di E e R è un N-rettangolo con $E \subseteq R$.

Osservazioni.

1) Se $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è un insieme limitato non misurabile in $\mathbb{R}^N$, allora si definiscono

$$m_N^{(i)}(E) = \underline{\int}_R \chi_E \quad : \quad \underline{\text{misura interna di } E}$$

e

$$m_N^{(e)}(E) = \overline{\int}_R \chi_E \quad : \quad \underline{\text{misura esterna di } E.}$$

Esempio $N=1$: $E = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ non è misurabile in $\mathbb{R}$, dato che χ_E non è integrabile e $m_1^{(i)}(E) = \underline{\int_0^1} \chi_E = 0$, $m_1^{(e)}(E) = \overline{\int_0^1} \chi_E = 1$.

2) Esistono in $\mathbb{R}^N$ insiemi aperti limitati e insiemi compatti non misurabili.

- Poniamo

$$\mathcal{M}(\mathbb{R}^N) = \{ E \subseteq \mathbb{R}^N : E \text{ è misurabile in } \mathbb{R}^N \}$$

e

$$m_N : \mathcal{M}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}, \quad \text{con} \quad m_N(E) = \int_E 1 .$$

Vogliamo caratterizzare $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ e descrivere le proprietà di m_N.

$$\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B \in \mathcal{R}(R),$$
$$\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B} \in \mathcal{R}(R),$$
$$\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_{A\cap B} \in \mathcal{R}(R)$$

e quindi valgono le formule relative alla misura.

3) La conclusione segue dal fatto che $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$ per ogni x e dalla monotonia dell'integrale.

4) • Sia $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ e sia R un N-rettangolo tale che $E \subseteq R$. Dall'integrabilità di χ_E su R segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta \in \Delta(R)$ tale che (↑ I criterio)

$$\sum_\alpha (L_\alpha - l_\alpha)\, m_N(R_\alpha) < \varepsilon.$$

Indichiamo con

β gli indici tali che $L_\beta = 1$, cioè $R_\beta \cap E \neq \emptyset$,

e γ gli indici tali che $l_\gamma = 1$, cioè $R_\gamma \subseteq E$,

e poniamo

$$Q = \bigcup_\beta R_\beta \supseteq E \quad \text{e} \quad P = \bigcup_\gamma R_\gamma \subseteq E.$$

Risulta

$$\varepsilon > \sum_\alpha (L_\alpha - l_\alpha)\, m_N(R_\alpha) = \sum_\beta (L_\beta - l_\beta)\, m_N(R_\beta)$$
$$= \sum_\beta L_\beta\, m_N(R_\beta) - \sum_\beta l_\beta\, m_N(R_\beta)$$
$$= \sum_\beta m_N(R_\beta) - \sum_\gamma l_\gamma\, m_N(R_\gamma)$$
$$= m_N(Q) - m_N(P).$$

Plurirettangoli in $\mathbb{R}^N$

Si dice che $P \subseteq \mathbb{R}^N$ è un plurirettangolo in $\mathbb{R}^N$ se esistono k N-rettangoli $R_1 \dots R_k$ tali che, per $i \neq j$, $\text{int}\, R_i \cap \text{int}\, R_j = \emptyset$ e $P = R_1 \cup \dots \cup R_k$, oppure $P = \emptyset$.

Proprietà elementari della misura

1) Se $R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_N, b_N]$ è un N-rettangolo, allora

$$m_N(R) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_N - a_N) ;$$

inoltre $\emptyset \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ e $m_N(\emptyset) = 0$.

2) Se $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$, allora $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$;

inoltre,
$$m_N(A \cup B) = m_N(A) + m_N(B) - m_N(A \cap B)$$
e
$$m_N(A \setminus B) = m_N(A) - m_N(A \cap B)$$

3) Se $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ e $A \subseteq B$, allora $m_N(A) \leq m_N(B)$

4) Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ limitato. Si ha che $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ se e solo se

(c) per ogni $\varepsilon > 0$ esistono plurirettangoli P, Q in $\mathbb{R}^N$ tali che $P \subseteq E \subseteq Q$ e $m_N(Q) - m_N(P) < \varepsilon$.

Dim.

1) Dalla definizione di integrale segue
$$m_N(R) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_N - a_N)$$
e dal fatto che $\chi_\emptyset = 0$ segue $m_N(\emptyset) = 0$.

2) Sia R un N-rettangolo tale che $A \cup B \subseteq R$.
Dal fatto che $\chi_A, \chi_B \in \mathcal{R}(R)$ segue

• Sia vera la condizione (C) e sia R un N-rettangolo tale che $E \subseteq R$. Fissato $\varepsilon > 0$, siano P, Q plurirettangoli tali che $P \subseteq E \subseteq Q \subseteq R$ e $m_N(Q) - m_N(P) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Poiché $\chi_P \le \chi_E \le \chi_Q$ in R, risulta per ogni $\sigma \in \Delta(R)$

$$s(\sigma, \chi_P) \le s(\sigma, \chi_E) \le S(\sigma, \chi_E) \le S(\sigma, \chi_Q).$$

Sia $\sigma \in \Delta(R)$ tale che

$$m_N(P) - \frac{\varepsilon}{4} < s(\sigma, \chi_P), \qquad S(\sigma, \chi_Q) < m_N(Q) + \frac{\varepsilon}{4}$$

e quindi

$$\begin{aligned} S(\sigma, \chi_E) - s(\sigma, \chi_E) &\le S(\sigma, \chi_Q) - s(\sigma, \chi_P) \\ &< m_N(Q) + \frac{\varepsilon}{4} - m_N(P) + \frac{\varepsilon}{4} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Pertanto χ_E è integrabile su R per il I criterio e dunque E è misurabile.

Insiemi trascurabili secondo Peano-Jordan in $\mathbb{R}^N$

Un insieme $T \subseteq \mathbb{R}^N$ si dice PJ-trascurabile in $\mathbb{R}^N$ se $m_N(T) = 0$.

Proposizione

Sia $T \subseteq \mathbb{R}^N$ limitato. Si ha: $m_N(T) = 0$ se e solo se

(I) $\begin{cases} \text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste un plurirettangolo } Q \text{ in } \mathbb{R}^N \text{ tale} \\ \text{che } T \subseteq \operatorname{int} Q \text{ e } m_N(Q) < \varepsilon. \end{cases}$

Dim.

- Sia $m_N(T) = 0$ e sia R un N-rettangolo tale che $T \subseteq R$. Si ha

$$0 = m_N(T) = \int_R \chi_T = \inf \Sigma(\chi_T).$$

Per le proprietà dell'estremo inferiore, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta \in \Delta(R)$ tale che

$$S(\delta, \chi_T) < \frac{\varepsilon}{2^N}.$$

Indichiamo con β gli indici tali che $L_\beta = 1$, cioè $R_\beta \cap T \neq \emptyset$.

Quindi risulta

$$T \subseteq \bigcup_\beta R_\beta \quad \text{e} \quad \sum_\beta L_\beta m_N(R_\beta) = S(\delta, \chi_T) < \frac{\varepsilon}{2^N}.$$

Per ogni β, sia R'_β l'N-rettangolo ottenuto da R_β raddoppiandone le dimensioni. Si ha

$$R_\beta \subseteq \operatorname{int} R'_\beta \quad \text{e} \quad m_N(R'_\beta) = 2^N m_N(R_\beta).$$

Poniamo $\quad Q = \bigcup_\beta R'_\beta.$

Risulta

$$T \subseteq \bigcup_p R_p \subseteq \bigcup_p \operatorname{int} R'_p \subseteq \operatorname{int}\Big(\bigcup_p R'_p\Big) = \operatorname{int} Q$$

e $$m_N(Q) = \sum_p m_N(R'_p) < 2^N \frac{\varepsilon}{2^N} = \varepsilon .$$

- Sia vera la condizione (b). Fissato $\varepsilon > 0$ esiste un plurirettangolo Q in $\mathbb{R}^N$ tale che

$$T \subseteq Q \qquad \text{e} \qquad m_N(Q) < \varepsilon .$$

Dunque è verificata la condizione (c) e pertanto T è misurabile.

Sia R un N-rettangolo tale che $Q \subseteq R$. Poiché

$$\chi_T(x) \le \chi_Q(x) \quad \text{per ogni } x,$$

si ha

$$m_N(T) = \int_R \chi_T \le \int_R \chi_Q = m_N(Q) < \varepsilon .$$

Dall'arbitrarietà di ε segue la tesi.

<u>Esempi</u>

1) Se T è un singoletto (o T è finito), allora $m_N(T) = 0$ per ogni $N \geq 1$.

2) Se $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è limitato e $k \in \mathbb{R}$, allora, posto $T = E \times \{k\} \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$, $m_{N+1}(T) = 0$.

In particolare:
- se $T \subseteq \mathbb{R}^N$ è 1-rettangolo, allora $m_N(T) = 0$ per ogni $N \geq 2$
- se $T \subseteq \mathbb{R}^N$ è 2-rettangolo, allora $m_N(T) = 0$ per ogni $N \geq 3$

3) Se $\varphi : R \to \mathbb{R}$ è integrabile su R N-rettangolo, allora, posto $G(\varphi) = \{(x, \varphi(x)) : x \in R\} \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$, $m_{N+1}(G(\varphi)) = 0$.

Dim

1) • $T = \{(x_1 \dots x_N)\} \subseteq [x_1, x_1+\varepsilon] \times \dots \times [x_N, x_N+\varepsilon] = P$ e $m_N(P) = \varepsilon^N$

• se T è finito, allora è unione finita di singoletti.

2) se E è limitato, allora esiste un N-rettangolo R tale che $E \subseteq R$. Quindi si ha $E \times \{k\} \subseteq R \times [k, k+\varepsilon]$ e $m_{N+1}(R \times [k, k+\varepsilon]) = \varepsilon \cdot m_N(R)$, per ogni $\varepsilon > 0$.

3) Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta \in \Delta(R)$ tale che

$$\sum_\alpha (L_\alpha - l_\alpha)\, m_N(R_\alpha) < \varepsilon.$$

Poniamo

$$P = \bigcup_\alpha \left(R_\alpha \times [l_\alpha, L_\alpha] \right).$$

Si ha

$$G(\varphi) \subseteq P \quad \text{e} \quad m_{N+1}(P) = \sum_\alpha (L_\alpha - l_\alpha)\, m_N(R_\alpha) < \varepsilon.$$

Condizione di integrabilità su N-rettangoli

Teorema

Se $f: R \to \mathbb{R}$ è limitata su R N-rettangolo ed è continua su $R \setminus T$, con T trascurabile in $\mathbb{R}^N$, allora f è integrabile su R.

Dim. Sia $f \neq 0$.

Sia $L = \sup_R |f| > 0$. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Poiché T è trascurabile, per la condizione (D), esiste $\delta \in \Delta(R)$ tale che, indicando con β gli indici tali che $T \cap R_\beta \neq \emptyset$ e con γ gli indici tali che $T \cap R_\gamma = \emptyset$, si ha

$$T \subseteq \bigcup_\beta R_\beta \quad \text{e} \quad \sum_\beta m_N(R_\beta) < \frac{\varepsilon}{4L}.$$

Poniamo

$$K = \bigcup_\gamma R_\gamma \subseteq R \setminus T.$$

K è compatto e f è continua su K. Per il teorema di Heine f è uniformemente continua su K. Quindi esiste $\rho > 0$ tale che, per ogni $x, y \in K$, se $\|x-y\| < \rho$ allora

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot m_N(R)}$$

Prendiamo $\delta' \in \Delta(R)$ più fine di δ tale che, per ogni λ,

$$\operatorname{diam}(R'_\lambda) < \rho.$$

Indichiamo con μ gli indici tali che $\bigcup_\mu R'_\mu = \bigcup_\beta R_\beta$ e con ν gli indici tali che $\bigcup_\nu R'_\nu = \bigcup_\gamma R_\gamma = K$.

Si ha

$$S(\delta') - s(\delta') = \sum_\lambda (L_\lambda - l_\lambda) m_N(R'_\lambda)$$

$$= \sum_{\mu} (L_\mu - l_\mu)\, m_N(R'_\mu) + \sum_{\nu} (L_\nu - l_\nu) \cdot m_N(R'_\nu)$$

$$\leq \omega_f(R) \cdot \sum_{\mu} m_N(R'_\mu) + \sum_{\nu} \omega_f(R'_\nu) \cdot m_N(R'_\nu)$$

$$< 2L \cdot \frac{\varepsilon}{4L} + \frac{\varepsilon}{2\, m_N(R)} \cdot m_N(R) = \varepsilon .$$

Quindi f è integrabile per il I criterio.

Insiemi di misura nulla secondo Lebesgue

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^N$ ha misura nulla secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^N$ (L-misura nulla) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una successione $(R_k)_k$ di N-rettangoli tale che

$$E \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} R_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} m_N(R_k) < \varepsilon.$$

Osservazioni

- Se E $(\subseteq \mathbb{R}^N)$ ha PJ-misura nulla in $\mathbb{R}^N$, allora ha L-misura nulla in $\mathbb{R}^N$
- Se E $(\subseteq \mathbb{R}^N)$ è numerabile, allora E ha L-misura nulla in $\mathbb{R}^N$.

  Dim Sia $E = (x_k)_k$. Fissato $\varepsilon > 0$, prendiamo per ogni k un N-rettangolo R_k tale che $x_k \in R_k$ e $m_N(R_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Risulta

$$E \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} R_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} m_N(R_k) < \varepsilon \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon.$$

Esempio

$\mathbb{Q}$ ha L-misura nulla in $\mathbb{R}$.

Teorema (di Vitali-Lebesgue) (III criterio d'integrabilità)

Sia $f : R \to \mathbb{R}$ limitata su R N-rettangolo. Si ha che

f è integrabile su R se e solo se

f è continua su $R \setminus T$, con T avente misura nulla secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^N$.

Criterio di misurabilità secondo Peano-Jordan

Teorema

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ limitato. Si ha: E è PJ-misurabile in $\mathbb{R}^N$ se e solo se $\operatorname{fr} E$ è trascurabile in $\mathbb{R}^N$.

Dim.

- Sia E PJ-misurabile in $\mathbb{R}^N$ e sia R un N-rettangolo tale che $E \subseteq R$. Poiché χ_E è integrabile su R, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta \in \Delta(R)$ tale che

$$\sum_\alpha (L_\alpha - l_\alpha)\, m_N(R_\alpha) < \varepsilon .$$

Indichiamo con β gli indici tali che

$$L_\beta = 1 \quad \text{e} \quad l_\beta = 0 .$$

Ogni punto di $\operatorname{fr} E$ deve cadere in almeno uno degli R_β e quindi

$$\operatorname{fr} E \subseteq \bigcup_\beta R_\beta .$$

Posto $P = \bigcup_\beta R_\beta$, si ha

$$m_N(P) = \sum_\beta m_N(R_\beta) = \sum_\beta (L_\beta - l_\beta)\, m_N(R_\beta)$$
$$\leq \sum_\alpha (L_\alpha - l_\alpha)\, m_N(R_\alpha) < \varepsilon$$

Dunque vale la proprietà (D) e quindi $m_N(\operatorname{fr} E) = 0$.

- Sia $\operatorname{fr} E$ trascurabile in $\mathbb{R}^N$ e sia R un N-rettangolo tale che $E \subseteq R$. La funzione χ_E è limitata su R e continua su $R \setminus \operatorname{fr} E$. Dunque χ_E è integrabile su R e quindi E è misurabile.

Corollario

Se $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è misurabile, allora $\mathrm{cl}\, E$ e $\mathrm{int}\, E$ sono misurabili e $m_N(E) = m_N(\mathrm{cl}\, E) = m_N(\mathrm{int}\, E)$.

Dim.

Poiché E e $\mathrm{fr}\, E$ sono misurabili, $\mathrm{cl}\, E = E \cup \mathrm{fr}\, E$ e $\mathrm{int}\, E = E \setminus \mathrm{fr}\, E$ sono pure misurabili e valgono le uguaglianze scritte.

Insieme di Cantor (trascurabile)

Definiamo $\quad C = \bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n \, , \quad$ dove

$$\left.\begin{aligned}
C_1 &= [0,1] \setminus \left]\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right[\\
C_2 &= C_1 \setminus \left(\left]\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}\right[\cup \left]\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9}\right[\right) \\
&\dots \\
C_n &= C_{n-1} \setminus \left(\left]\tfrac{1}{3^n}, \tfrac{2}{3^n}\right[\cup \dots \cup \left]\tfrac{3^n-2}{3^n}, \tfrac{3^n-1}{3^n}\right[\right) \\
&\dots
\end{aligned}\right\} \quad \text{insiemi chiusi}$$

Risulta

$m_1(C_1) = \frac{2}{3}$

$m_1(C_2) = \frac{4}{9}$

...

$m_1(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

...

e quindi $\quad m_1(C) = 0.$

Inoltre si ha

- C è compatto, $\quad \operatorname{int} C = \emptyset, \quad C = \operatorname{fr} C$
- $\# C = \# [0,1] = \# \mathbb{R}$, in quanto tutti gli allineamenti $(0, x_1 x_2 \dots x_n \dots)_3$, con $x_n \in \{0,2\}$, sono in C.

Costruzione dell’insieme di Cantor

Insieme di Cantor-Smith-Volterra (non PJ-misurabile)

Definiamo $D = \bigcap_{n=1}^{+\infty} D_n$, dove

$D_1 = [0,1] \setminus]\frac{3}{8}, \frac{5}{8}[$

$D_2 = D_1 \setminus \left( ]\frac{5}{32}, \frac{7}{32}[\cup]\frac{25}{32}, \frac{27}{32}[\right)$

...

$D_n = D_{n-1} \setminus$ (2^{n-1} intervalli di lunghezza $\frac{1}{4^n}$ ciascuno posto al centro degli intervalli che formano D_{n-1})

...

Risulta

- D è compatto
- $\mathrm{int}\, D = \emptyset$ (se $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq D$, allora $I \subseteq D_n$ per ogni n e quindi $2\delta < \frac{1}{2^n}$ per ogni n)
- $D = \mathrm{fr}\, D$
- D non è PJ-misurabile. Se per assurdo lo fosse, allora $m_1(D) = m_1(\mathrm{fr}\, D) = 0$ e quindi, posto $E = [0,1] \setminus D$ e $E_n = [0,1] \setminus D_n$, si avrebbe la contraddizione

$$1 = m_1(E) = m_1\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m_1(E_n)$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{4^n} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$= \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}.$$

NB Qui abbiamo usato la numerabile sub-additività della misura secondo Peano-Jordan:
se $(E_n)_n$ è una successione di insiemi PJ-misurabili tali che $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ è PJ-misurabile, allora

$$m_N\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m_N(E_n).$$

Costruzione dell’insieme di Cantor-Smith-Volterra

Numerabile (sub-)additività della misura secondo Peano-Jordan

È facile verificare la seguente proprietà.

Sia E limitato. Si ha che

E è PJ-misurabile se e solo se

per ogni $\varepsilon>0$ esistono plurirettangoli P, Q tali che

$P \subseteq E \subseteq \operatorname{int} Q$ e $m_N(Q) - m_N(P) < \varepsilon$

(in particolare, $m_N(P) > m_N(E) - \varepsilon$ e $m_N(Q) < m_N(E) + \varepsilon$)

Proviamo che:

se $(E_n)_n$ è una successione di insiemi PJ-misurabili tali che $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ è PJ-misurabile, allora

$$m_N\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\Big) \le \sum_{n=1}^{+\infty} m_N(E_n).$$

Inoltre se $E_n \cap E_m = \emptyset$ per $n \ne m$, allora vale l'uguaglianza.

Dim. Poniamo $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$. Fissiamo $\varepsilon>0$. Esiste P plurirettangolo tale che $P \subseteq E$ e $m_N(P) > m_N(E) - \varepsilon$. Per ogni n esiste Q_n plurirettangolo tale che $E_n \subseteq \operatorname{int} Q_n$ e $m_N(Q_n) < m_N(E_n) + \varepsilon/2^n$. Poiché $P \subseteq E \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} \operatorname{int} Q_n$ e P è compatto, per la proprietà di Heine-Borel, esistono $Q_{n_1} \dots Q_{n_k}$ tali che $P \subseteq Q_{n_1} \cup \dots \cup Q_{n_k}$. Quindi si ottiene

$$\begin{aligned} m_N(E) - \varepsilon < m_N(P) &\le m_N(Q_{n_1}) + \dots + m_N(Q_{n_k}) \\ &< \Big(m_N(E_{n_1}) + \frac{\varepsilon}{2^{n_1}}\Big) + \dots + \Big(m_N(E_{n_k}) + \frac{\varepsilon}{2^{n_k}}\Big) \\ &\le \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(m_N(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} m_N(E_n) + \varepsilon. \end{aligned}$$

In conclusione, si ha $m_N(E) \le \sum_{n=1}^{+\infty} m_N(E_n) + 2\varepsilon$ e quindi la tesi, per l'arbitrarietà di ε.

Condizione d'integrabilità su un insieme limitato

Teorema

Se $f : E(\subseteq \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ è continua su E ed E è chiuso misurabile in $\mathbb{R}^N$, allora f è integrabile su E.

Dim.

Sia R un N-rettangolo t.c. che $E \subseteq R$. La funzione f_0 è limitata, perché f è limitata per il teorema di Weierstrass, essendo continua sul compatto E, ed è continua su $R \setminus \mathrm{fr}\, E$. Dunque f_0 è integrabile su R essendo $\mathrm{fr}\, E$ trascurabile.

Proprietà dell'integrale su insiemi limitati

Linearità

Se $f, g : E(\subseteq \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ sono integrabili su E limitato e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora $\lambda f + \mu g$ è integrabile su E e $\int_E \lambda f + \mu g = \lambda \int_E f + \mu \int_E g$.

Dim.
Si applica a f_0, g_0 l'analogo risultato per gli N-rettangoli.

Monotonia

Se $f, g : E(\subseteq \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ sono integrabile su E limitato e $f(x) \leq g(x)$ in E, allora $\int_E f \leq \int_E g$.

Integrabilità del valore assoluto

Se $f : E(\subseteq \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ è integrabile su E limitato, allora $|f|$ è integrabile su E e $\left|\int_E f\right| \leq \int_E |f|$.

Integrabilità del prodotto

Se $f, g : E (\subseteq \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ sono integrabili su E limitato, allora $f \cdot g$ è integrabile su E

Proprietà della media

- Se $f : E (\subseteq \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ è integrabile su E misurabile, allora
$$\inf_E f \leq \frac{\int_E f}{m_N(E)} \leq \sup_E f .$$
- Se $f : E (\subseteq \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ è continua su E misurabile, chiuso e connesso, allora esiste $x_0 \in E$ tale che
$$f(x_0) = \frac{\int_E f}{m_N(E)} .$$

Dim.

- Sia R un N-rettangolo tale che $E \subseteq R$. Poiché
$$\inf_E f \cdot \chi_E(x) \leq f_0(x) \leq \sup_E f \cdot \chi_E(x)$$
per ogni $x \in R$, si ha, integrando su R,
$$\inf_E f \cdot m_N(E) \leq \int_E f \leq \sup_E f \cdot m_N(E)$$
- Poiché E è compatto e connesso e f è continua, si ha $f(E) = [\min_E f, \max_E f]$. La conclusione segue dal fatto che
$$\min_E f \leq \frac{\int_E f}{m_N(E)} \leq \max_E f .$$

Integrabilità delle composte

Se $f : E (\subseteq \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ è integrabile su E limitato e $\varphi : D \to \mathbb{R}$ è continua, con D un compatto tale che $f(E) \subseteq D$, allora $\varphi \circ f$ è integrabile su E.

Integrabilità della restrizione

Se $f : E (\subseteq \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ è integrabile su E limitato ed $E' \subseteq E$ è misurabile in $\mathbb{R}^N$, allora $f|_{E'}$ è integrabile su E'.

Dim.
Sia R un N-rettangolo tale che $E \subseteq R$ e sia $\chi_{E'}$ la funzione caratteristica di E'. Si ha che $f_0 \cdot \chi_{E'}$ è integrabile su R.

Invarianza dell'integrale rispetto a insiemi trascurabili

Se $f : E (\subseteq \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ è integrabile su E limitato, $g : E \to \mathbb{R}$ è limitata e $f(x) = g(x)$ su $E \setminus T$ con $m_N(T) = 0$, allora g è integrabile su E e
$$\int_E f = \int_E g.$$

Dim.
Sia R un N-rettangolo tale che $E \subseteq R$. La funzione $h_0 = f_0 - g_0 : R \to \mathbb{R}$ è limitata e, posto $L = \sup_R |h_0|$, si ha $|h_0(x)| \leq L \cdot \chi_T(x)$ in R. Quindi risulta, per ogni $\delta \in \Delta(R)$, $\quad -L\, S(\delta, \chi_T) \leq s(\delta, h_0) \leq S(\delta, h_0) \leq L\, S(\delta, \chi_T)$ e pertanto $\quad 0 = -L \inf \Sigma(\chi_T) \leq \sup \sigma(h_0) \leq \inf \Sigma(h_0) \leq L \inf \Sigma(\chi_T) = 0$.
Si conclude allora che h_0 è integrabile su R e $\int_R h_0 = 0$.

Ne consegue che $g_0 = f_0 - h_0$ è integrabile su R e

$$\int_E g = \int_R g_0 = \int_R f_0 - \int_R h_0 = \int_R f_0 = \int_E f.$$

Additività rispetto al dominio

Se E, E', E'' sono insiemi misurabili di $\mathbb{R}^N$ tali che

$$E = E' \cup E'' \quad \text{e} \quad m_N(E' \cap E'') = 0$$

e $f : E \to \mathbb{R}$ è tale che $f|_{E'}$, $f|_{E''}$ sono integrabili su E', E'', rispettivamente, allora f è integrabile su E e

$$\int_E f = \int_{E'} f + \int_{E''} f.$$

Dim.

Posto $T = E' \cap E''$ e $g = f \cdot \chi_{E'} + f \chi_{E''}$, si ha che $g : E \to \mathbb{R}$ è integrabile su E e $g(x) = f(x)$ per ogni $x \in E \setminus T$, con $m_N(T) = 0$. Quindi f è integrabile su E e $\int_E f = \int_{E'} f + \int_{E''} f$.

Metodi di calcolo per integrali su insiemi misurabili

Formule di riduzione per integrali doppi

Insiemi normali in $\mathbb{R}^2$

- Siano $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, con $\varphi(x) \le \psi(x)$ in $[a,b]$.

L'insieme

$$E = \{(x,y) : a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$$

si dice insieme normale rispetto all'asse x di $\mathbb{R}^2$.

- Similmente si definiscono gli insiemi normali rispetto all'asse y.

Proposizione

Un insieme E normale in $\mathbb{R}^2$ è compatto e misurabile in $\mathbb{R}^2$.

Dim.

E è chiuso e limitato e

$$\text{fr}\, E = G(\varphi) \cup G(\psi) \cup \sigma_a \cup \sigma_b,$$

con $\sigma_a = \{(a,y)^T : \varphi(a) \le y \le \psi(a)\}$ e $\sigma_b = \{(b,y) : \varphi(b) \le y \le \psi(b)\}$, è trascurabile in $\mathbb{R}^2$.

Teorema (di riduzione su insiemi normali)

Se $f : E \to \mathbb{R}$ è continua ed E è un insieme normale rispetto all'asse x in $\mathbb{R}^2$, allora f è integrabile su E e

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Dim. Siano $\varphi \neq \psi$.

- Poiché E è chiuso e misurabile in $\mathbb{R}^2$ e f è continua su E, f è integrabile su E.

- Poniamo $\quad m = \min_{[a,b]} \varphi\,, \qquad M = \max_{[a,b]} \psi\,, \qquad$ con $m < M$,

e $\qquad R = [a,b] \times [m, M] \supseteq E$.

La funzione f_0, estensione nulla di f su R, è tale che:

1) f_0 è integrabile su R, essendo f integrabile su E;

2) per ogni $x \in [a,b]$, $f_0(x,\cdot) : [m,M] \to \mathbb{R}$ è integrabile su $[m,M]$, essendo discontinua al più nei punti $\varphi(x)$ e $\psi(x)$.

Quindi, per il teorema di Fubini, si ha

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f_0(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_m^M f_0(x,y)\,dy \right) dx$$
$$= \int_a^b \left(\int_m^{\varphi(x)} f_0(x,y)\,dy + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f_0(x,y)\,dy + \int_{\psi(x)}^{M} f_0(x,y)\,dy \right) dx$$
$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx .$$

- Vale un analogo risultato per gli insiemi normali rispetto all'asse y.

Insiemi sezionabili in $\mathbb{R}^3$

- Sia E un insieme chiuso e misurabile in $\mathbb{R}^3$. Si dice che E è sezionabile rispetto all'asse z in $\mathbb{R}^3$ se, posto
$$m = \min\{z \in \mathbb{R} : (x,y,z) \in E\} \quad e \quad M = \max\{z \in \mathbb{R} : (x,y,z) \in E\},$$
per ogni $z \in [m, M]$, l'insieme
$$S_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in E\}$$
è misurabile in $\mathbb{R}^2$.
- Similmente si definiscono gli insiemi sezionabili rispetto all'asse x o y.

Teorema (di riduzione per sezioni)

Se $f : E \to \mathbb{R}$ è continua ed E è un insieme sezionabile rispetto all'asse z in $\mathbb{R}^3$, allora f è integrabile su E e
$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_m^M \left(\iint_{S_z} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz.$$

Dim. per esercizio

- Valgono analoghi risultati per gli insiemi sezionabili rispetto agli assi x e y.

Teorema (Principio di Cavalieri)

Se A ed B sono insiemi sezionabili rispetto all'asse z in $\mathbb{R}^3$ e, per ogni $z \in \mathbb{R}$,
$$m_2(S_z) = m_2(T_z)$$
con $S_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in A\}$ e $T_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in B\}$,

allora
$$m_3(A) = m_3(B).$$

Formule di riduzione per integrali tripli

Insiemi normali in $\mathbb{R}^3$

• Siano $\varphi, \psi : K \to \mathbb{R}$ continue su K chiuso misurabile in $\mathbb{R}^2$, con $\varphi(x,y) \le \psi(x,y)$ in K. L'insieme

$$E = \{(x,y,z) : (x,y) \in K, \ \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$$

si dice insieme normale rispetto al piano xy in $\mathbb{R}^3$

• Similmente si definiscono gli insiemi normali rispetto ai piani xz e yz.

Proposizione

Un insieme E normale in $\mathbb{R}^3$ è compatto e misurabile

Dim. per esercizio

Teorema (di riduzione per corde)

Se $f : E \to \mathbb{R}$ è continua ed E è un insieme normale rispetto al piano xy in $\mathbb{R}^3$, allora f è integrabile su E e

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_K \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy.$$

Dim. per esercizio

• Valgono analoghi risultati per gli insiemi normali rispetto ai piani xz e yz.

Dim.

Poniamo
$$m = \min\{z \in \mathbb{R} : (x,y,z) \in A \cup B\}$$
e
$$M = \max\{z \in \mathbb{R} : (x,y,z) \in A \cup B\}.$$

Si ha
$$m_3(A) = \iiint_A 1\, dx\, dy\, dz = \int_m^M \left(\iint_{S_z} 1\, dx\, dy \right) dz = \int_m^M m_2(S_z)\, dz$$
$$= \int_m^M m_2(T_z)\, dz = \int_m^M \left(\iint_{T_z} 1\, dx\, dy \right) dz = \iiint_B 1\, dx\, dy\, dz = m_3(B).$$

Solidi di rotazione

Siano $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue tali che $0 \le \varphi(z) \le \psi(z)$ in $[a,b]$
e sia
$$D = \{(x,z) : a \le z \le b,\ \varphi(z) \le x \le \psi(z)\}, \text{ con } m_2(D) > 0$$

L'insieme
$$E = \{(x,y,z) : a \le z \le b,\ \varphi(z) \le \sqrt{x^2+y^2} \le \psi(z)\}$$
è il solido di rotazione in $\mathbb{R}^3$ ottenuto facendo ruotare D di 2π intorno all'asse z.

Teorema (di Pappo-Guldino)

Se E è un solido di rotazione in $\mathbb{R}^3$, allora E è misurabile in $\mathbb{R}^3$ e
$$m_3(E) = 2\pi\, x_B\, m_2(D),$$
con
$$x_B = \frac{\iint_D x\, dx\, dy}{m_2(D)}$$
l'ascissa del baricentro di D.

Dim.

E è misurabile in $\mathbb{R}^3$ perché $\mathrm{fr}(E)$ è trascurabile in $\mathbb{R}^3$.

Inoltre si ha

$$m_3(E) = \int_a^b \left(\iint_{S_z} 1 \, dx\, dy \right) dz = \int_a^b 2\pi \left(\frac{1}{2} \psi(z)^2 - \frac{1}{2} \varphi(z)^2 \right) dz$$

$$= 2\pi \int_a^b \left(\int_{\varphi(z)}^{\psi(z)} x \, dx \right) dz = 2\pi \iint_D x \, dx \, dy,$$

dove $S_z = \{(x, y, z) : \varphi(z) \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq \psi(z)\}$ per ogni $z \in [a, b]$.