Cambio di variabili negli integrali multipli

Premessa

In vari casi i teoremi di riduzione abbinati alla proprietà di additività rispetto al dominio permettono di eseguire il calcolo di un integrale multiplo. Tuttavia se la geometria del dominio d'integrazione è troppo complessa questo metodo può fallire. Può essere utile allora cercare un cambiamento di variabili che trasformi il dominio dato in un altro avente una geometria più semplice.

Esame del caso unidimensionale

Teorema

Se $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua e $\varphi : K = [\alpha, \beta] \to I$ è tale che

(i) φ è di classe C^1

(ii) φ è biiettiva

(iii) $\varphi'(t) \neq 0$ in K,

allora

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, & \text{se } \varphi' > 0 \\ \int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\varphi'(t)dt & \text{se } \varphi' < 0, \end{cases}$$

cioè

$$\int_I f = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt = \int_K (f\circ\varphi)\cdot|\varphi'|$$

Vogliamo estendere questa formula al caso N-dimensionale.

Prendiamo spunto da un caso semplice: il caso lineare in $\mathbb{R}^2$

Trasformazione lineare di coordinate in $\mathbb{R}^3$

Siano $a=(a_1,a_2,a_3)$, $b=(b_1,b_2,b_3)$, $c=(c_1,c_2,c_3) \in \mathbb{R}^3$ linearmente indipendenti, cioè $(a\times b)\cdot c \neq 0$, o equivalentemente, posto $\mathbb{M} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, $\det \mathbb{M} = (a\times b)\cdot c \neq 0$. Consideriamo il parallelepipedo

$$E = \{ua + vb + wc;\ 0\le u\le 1,\ 0\le v\le 1,\ 0\le w\le 1\}.$$

Risulta

$$m_3(E) = |(a\times b)\cdot c| = |\det \mathbb{M}|.$$

Definiamo $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ponendo $\Phi(u,v,w) = \mathbb{M}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$,

e $K=[0,1]^3$. Si ha che Φ è di classe C^1,

con $J\Phi = \mathbb{M}$, Φ è biiettiva, $\Phi(K) = E$

e

$$\iiint_E 1\,dx\,dy\,dz = m_3(E) = |\det \mathbb{M}| = \iiint_K |\det J\Phi|\,du\,dv\,dw.$$

Osservazione

$|\det J\Phi|$ è il fattore d'ingrandimento dei volumi legato alla trasformazione Φ.

Formula di cambiamento di variabili

Insiemi localmente misurabili

Sia $J \subseteq \mathbb{R}^N$. Si dice che J è localmente misurabile in $\mathbb{R}^N$ se, per ogni insieme E misurabile in $\mathbb{R}^N$, $E \cap J$ è misurabile in $\mathbb{R}^N$.

Trasformazione regolare di coordinate

Siano $A, B\ (\subseteq \mathbb{R}^N)$ aperti localmente misurabili. Si dice che $\Phi : A \to B$ è una trasformazione regolare di coordinate se

(i) Φ è di classe C^1

(ii) Φ è biettiva

(iii) $\det(J\Phi) \neq 0$ in ogni punto di A.

$\Rightarrow$ Φ diffeomorfismo di classe C^1

Teorema

Siano $A, B\ (\subseteq \mathbb{R}^N)$ aperti localmente misurabili e $\Phi : A \to B$ una trasformazione regolare di coordinate.
Se $f : E \to \mathbb{R}$ è integrabile su $E\ (\subseteq B)$ limitato e $K\ (\subseteq A)$ è un insieme misurabile tale che $\Phi(K) = E$ e $\det(J\Phi)$ è limitato su K, allora E è misurabile,

$$(f \circ \Phi)\,|\det(J\Phi)| \text{ è integrabile su } K$$

e

$$\int_E f = \int_K (f \circ \Phi) \cdot |\det(J\Phi)|.$$

Osservazione

Se $f = 1$, allora $m_N(E) = \int_K |\det(J\Phi)|$

fattore di ingrandimento locale della misura

Applicazioni degli integrali doppi

• Trasformazione lineare di coordinate

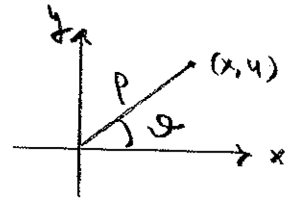
Sia $\mathbb{M}$ matrice 2×2 con $\det \mathbb{M} \neq 0$. La funzione $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con $\Phi(u,v) = \mathbb{M}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, è una trasformazione regolare di coordinate.

Esempio

Calcolare $\iint_E xy \, dx\,dy$, con $E = \{(x,y) : 2x \leq y \leq 2x+1,\ y-1 \leq x \leq y\}$

• Coordinate polari

Per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, esistono $\rho \in [0, +\infty[$ e $\vartheta \in [-\pi, \pi]$ tali che



$$\begin{cases} x = \rho \cos\vartheta \\ y = \rho \sin\vartheta . \end{cases}$$

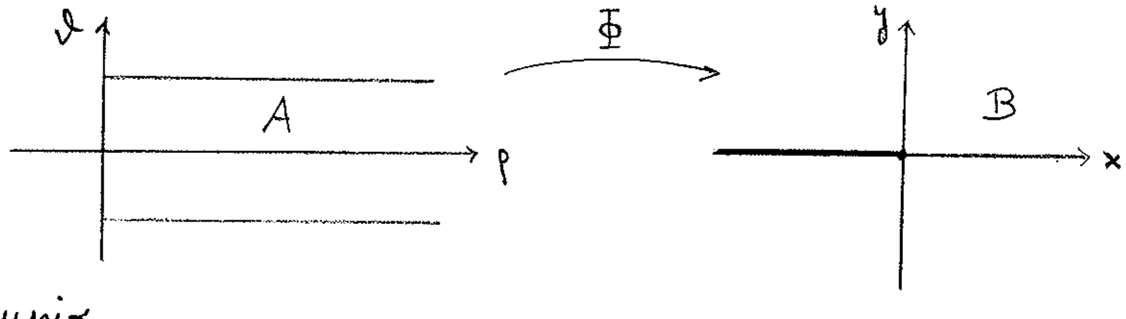
Posto $A = \{(\rho, \vartheta) : \rho > 0,\ -\pi < \vartheta < \pi\}$

e $B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \leq 0\}$,

resta individuata una trasformazione regolare di coordinate

$\Phi : A \to B$, definita da $\Phi(\rho, \vartheta) = (\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)$.

Infatti: Φ è di classe C^1, Φ è iniettiva e $\det(J\Phi)(\rho,\vartheta) = \rho > 0$.



Esempio

Calcolare $\iint_E (x^3 + xy^2)\, dx\,dy$, con $E = \{(x,y) : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ 0 \leq y \leq x\}$.

Altri esempi

- Calcolare $m_2(E)$,

con $E = \{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\}$ ($a, b > 0$ fissati).

Introducendo le coordinate ellittiche definite da

$\Phi : A =]0,+\infty[\times]-\pi, \pi[\to B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \le 0\}$, $\Phi(\rho,\vartheta) = (a\rho\cos\vartheta, b\rho\sin\vartheta)$,

si ottiene

$$m_2(E) = \iint_K ab\rho \, d\rho \, d\vartheta \qquad (|\det(J\Phi)| = ab\rho)$$

con $K = \{(\rho,\vartheta) : 0 < \rho < 1, \ |\vartheta| < \pi\}$.

- Calcolare $\iint_E \frac{1}{xy} dx\,dy$,

con $E = \{(x,y) : x > 0, y > 0, \ x \le y \le 2x, \ 1 \le xy \le 2\}$

Introducendo le coordinate curvilinee definite da

$\Phi : A =]0,+\infty[^2 \to B =]0,+\infty[^2$, $\Phi(u,v) = \left(\sqrt{\frac{v}{u}}, \sqrt{uv}\right)$,

si ottiene

$$\iint_E \frac{1}{xy} dx\,dy = \iint_K \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{2u} \, du\,dv \qquad \left(|\det(J\Phi)| = \frac{1}{2u}\right)$$

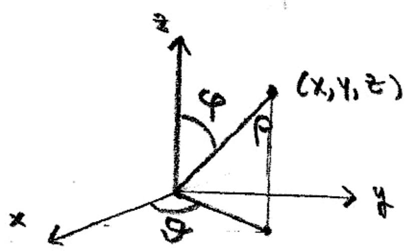
con $K = \{(u,v) : 1 \le u \le 2, \ 1 \le v \le 2\}$.

Applicazioni agli integrali tripli

- <u>Coordinate sferiche</u>

Per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, esistono $\rho \in [0,+\infty[$, $\vartheta \in [-\pi,\pi]$ e $\varphi \in [0,\pi]$ tali che

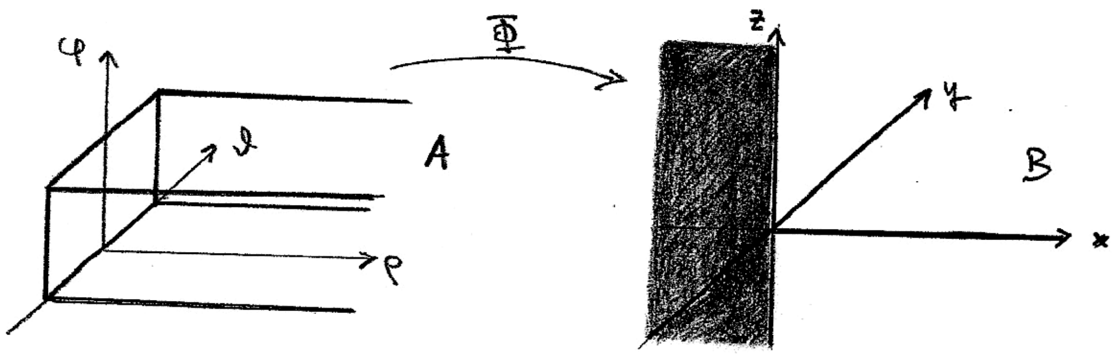
$$\begin{cases} x = \rho \cos\vartheta \sin\varphi \\ y = \rho \sin\vartheta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\varphi . \end{cases}$$



Posto
$$A = \{(\rho,\vartheta,\varphi) : \rho > 0 , \ -\pi < \vartheta < \pi , \ 0 < \varphi < \pi\}$$
e
$$B = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z) : x \leq 0, \ z \in \mathbb{R}\},$$
resta individuata una trasformazione regolare di coordinate

$\Phi : A \to B$, definita da
$$\Phi(\rho,\vartheta,\varphi) = (\rho\cos\vartheta\sin\varphi, \rho\sin\vartheta\sin\varphi, \rho\cos\varphi).$$

Infatti: Φ è di classe C^1, Φ è biiettiva e
$$\det(J\Phi)(\rho,\vartheta,\varphi) = -\rho^2 \sin\varphi \neq 0 .$$



<u>Esempio</u>

Calcolare $\iiint_E |z| \, dx\,dy\,dz$,

con $E = \{(x,y,z) : (x^2+y^2+z^2)^2 \leq x^2+y^2-z^2\}$.

- Coordinate cilindriche

Introducendo coordinate polari nel piano xy e posto

$$A = \{(\rho, \vartheta, z) : \rho > 0, -\pi < \vartheta < \pi, z \in \mathbb{R}\}$$

e

$$B = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \le 0, z \in \mathbb{R}\},$$

resta individuata una trasformazione regolare di coordinate

$\Phi : A \to B$, definita da $\Phi(\rho, \vartheta, z) = (\rho \cos\vartheta, \rho \sin\vartheta, z)$.

Infatti: Φ è di classe C^1, Φ è biiettiva e $\det(J\Phi)(\rho, \vartheta, z) = \rho > 0$.

Esempio

Calcolare baricentro di $E = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\}$

Altri esempi

- Calcolare $m_3(E)$,

con $E = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\}$ $(a, b, c > 0$ fissati$)$

Introducendo le coordinate ellissoidali definite da

$\Phi : A =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times]0, \pi[\to B = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \le 0, z \in \mathbb{R}\}$,

$\Phi(\rho, \vartheta, \varphi) = (a \rho \cos\vartheta \sin\varphi, b \rho \sin\vartheta \sin\varphi, c \rho \cos\varphi)$,

si ottiene

$$m_3(E) = \iiint_K a b c \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\vartheta \, d\varphi \qquad \left(|\det(J\Phi)| = abc\rho^2 \sin\varphi \right)$$

con $K =]0, 1[\times]-\pi, \pi[\times]0, \pi[$.

- Calcolare $m_3(E)$

con $E = \{(x, y, z) : 0 \le x+y+z \le 1, 1 \le x-y+z \le 2, 2 \le x+y-z \le 3\}$.

Misura della palla unitaria in $\mathbb{R}^N$

Poniamo, per ogni $r>0$,

$$B_r = \{(x_1 \dots x_N) \in \mathbb{R}^N : x_1^2 + \dots + x_N^2 \leq r^2\}$$

e

$$\omega_N = m_N(B_1).$$

Si ha

$$m_N(B_r) = r^N m_N(B_1) = r^N \omega_N .$$

Per ogni $t \in]-1,1[$, poniamo

$$E(t) = B_1 \cap \{(x_1 \dots x_N) : x_N = t\}.$$
$$= \{(x_1 \dots x_N) : x_1^2 + \dots + x_{N-1}^2 = 1-t^2, x_N = t\},$$

cioè $E(t)$ è una palla $(N-1)$-dimensionale di raggio $\sqrt{1-t^2}$. Quindi risulta

$$m_{N-1}(E(t)) = (1-t^2)^{\frac{N-1}{2}} \cdot \omega_{N-1}$$

Integrando per sezioni si ha

$$m_N(B_1) = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{N-1}{2}} \omega_{N-1} \, dt$$
$$= 2\omega_{N-1} \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{N-1}{2}} dt$$
$$= 2\omega_{N-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^N du .$$

Integrando per parti si ottiene

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^N du = \frac{N-1}{N} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{N-2} du$$

e quindi

se N è pari, allora

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^N du = \frac{(N-1)(N-3)\dots 3}{N(N-2)\dots 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(N-1)!!}{N!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

se N è dispari, allora

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^N du = \frac{(N-1)!!}{N!!}$$

Posto $A_N = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } N \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } N \text{ è dispari} \end{cases}$, si ha

$$\omega_N = 2 \frac{(N-1)!!}{N!!} A_N \cdot \omega_{N-1} .$$

e quindi

$$\omega_N = 2 \frac{(N-1)!!}{N!!} A_N \left(2 \frac{(N-2)!!}{(N-1)!!} A_{N-1} \, \omega_{N-2} \right)$$

$$= 4 \frac{(N-2)!!}{N!!} \frac{\pi}{2} \omega_{N-2}$$

$$= \frac{2\pi}{N} \omega_{N-2} .$$

Ricordando che $\omega_1 = 2$ e $\omega_2 = \pi$, si conclude

se $N = 2k$, allora $\omega_{2k} = \overbrace{\frac{2\pi}{2k} \cdot \frac{2\pi}{2k-2} \cdots \frac{2\pi}{4}}^{k-1 \text{ fattori}} \pi$

$$= \frac{2^{k-1}\pi^k}{2^{k-1}k!} = \frac{\pi^k}{k!}$$

se $N = 2k+1$, allora

$$\omega_{2k+1} = \overbrace{\frac{2\pi}{2k+1} \cdot \frac{2\pi}{2k-1} \cdots \frac{2\pi}{3}}^{k \text{ fattori}} \, 2$$

$$= \frac{2^{k+1} \pi^k}{(2k+1)!!}$$

Osservazione

- $\lim_{N \to +\infty} \omega_N = 0$

- $\omega_1 = 2 < \omega_2 = \pi < \omega_3 = \frac{4}{3}\pi < \omega_4 = \frac{\pi^2}{2} < \omega_5 = \frac{8}{15}\pi^2$

  e $\omega_N > \omega_{N+1}$, per $N \geq 5$.

- $\lim_{N \to +\infty} m_N(C_N) = +\infty$, dove

$$C_N = \{(x_1, \dots x_N) : \max\{|x_1|, \dots |x_N|\} \leq 1\}$$