Integrale in senso generalizzato

Premessa

Vogliamo estendere la nozione di integrale a insiemi illimitati e/o a funzioni illimitate.

Esempi

Come definire

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \qquad \text{o} \qquad \iint_{B_1\setminus\{0\}} \log\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)dx\,dy \quad ?$$

Idea

1) calcolare $\iint_{A_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$, con $A_n=\{(x,y): |x|\le n, |y|\le n\}$,

   e poi passare al limite per $n\to+\infty$.

2) calcolare $\iint_{B_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$, con $B_n=\{(x,y): x^2+y^2\le n^2\}$,

   e poi passare al limite per $n\to+\infty$.

3) calcolare $\iint_{C_n} \log\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)dx\,dy$, con $C_n=\{(x,y): \frac{1}{n^2}\le x^2+y^2\le 1\}$,

   e poi passare al limite per $n\to+\infty$.

Ricordiamo la seguente definizione.

Insieme localmente misurabile

Un insieme $J\subseteq\mathbb{R}^N$ si dice localmente misurabile in $\mathbb{R}^N$ se, per ogni insieme E misurabile in $\mathbb{R}^N$, $J\cap E$ è misurabile in $\mathbb{R}^N$.

Osservazione È sufficiente che E sia un N-rettangolo

Funzione localmente integrabile

- Sia $f : J \to \mathbb{R}$, con $J \subseteq \mathbb{R}^N$ insieme localmente misurabile in $\mathbb{R}^N$. Si dice che f è localmente integrabile su J se esiste una successione di insiemi $(A_n)_n$ tale che
  (i) A_n è misurabile in $\mathbb{R}^N$, per ogni n
  (ii) $A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq J$, per ogni n
  (iii) per ogni insieme misurabile $E \subseteq J$,
  $$\lim_{n \to +\infty} m_N(E \setminus A_n) = 0$$
  (iv) $f|_{A_n}$ è integrabile su A_n, per ogni n

- Una successione $(A_n)_n$ verificante (i), (ii), (iii), (iv) si dice <u>invadente J</u> e <u>adatta a f</u>.

Caso delle funzioni $f \geq 0$

Funzione integrabile in senso generalizzato ($f \geq 0$)

Sia $f : J \to \mathbb{R}$ localmente integrabile su J localmente misurabile in $\mathbb{R}^N$, con $f(x) \geq 0$ in J. Si dice che f è integrabile in senso generalizzato su J se è <u>finito</u>
$$\lim_{n \to +\infty} \int_{A_n} f$$
e si pone
$$\int_J f = \lim_{n \to +\infty} \int_{A_n} f,$$
dove $(A_n)_n$ è una successione invadente J e adatta a f.

Osservazione

Poiché $f \geq 0$ e $A_n \subseteq A_{n+1}$, la successione numerica $\left(\int_{A_n} f\right)_n$ è crescente (in senso debole) e quindi esiste, finito o $+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{A_n} f = \sup\limits_n \int_{A_n} f$.

- La definizione non dipende dalla particolare successione invadente J e adatta a f.

Proposizione

Se $f : J \to \mathbb{R}$ è localmente integrabile su J localmente misurabile e $(A_n)_n$, $(B_n)_n$ sono successioni invadenti J e adatte a f, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{B_n} f.$$

Dim.

Fissiamo un indice m. Poiché f è integrabile su B_m, f è limitata su B_m. Sia

$$L_m = \sup_{B_m} f.$$

Per ogni n, risulta

$$B_m = (B_m \cap A_n) \cup (B_m \setminus A_n)$$

e quindi

$$\int_{B_m} f = \int_{B_m \cap A_n} f + \int_{B_m \setminus A_n} f$$
$$\leq \int_{A_n} f + L_m \cdot m_N(B_m \setminus A_n).$$

Passando al limite per $n \to +\infty$, dalla condizione (iii) segue

$$\int_{B_m} f \leq \lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} f + L_m \cdot \lim_{n\to+\infty} m_N (B_m \setminus A_n)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} f$$

Per l'arbitrarietà di m, si conclude che

$$\lim_{m\to+\infty} \int_{B_m} f \leq \lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} f$$

e, scambiando i ruoli fra $(A_n)_n$ e $(B_m)_m$, l'uguaglianza.

Esempi

- Calcolare $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ e usare il risultato per calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.
- Calcolare $\iint_{B_1 \setminus \{0\}} \log\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) dx\,dy$.

Caso delle funzioni di segno qualunque

Se la funzione cambia segno ci possono essere dei problemi.

Esempio

Sia $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$. Posto

$$A_n = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq (2n+1)\tfrac{\pi}{2}\},$$
$$B_n = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 2n\pi\},$$
$$C_n = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq n\pi\},$$

si ha per ogni n

$$\int_{A_n} f = \pi\left(1-\cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right) = \pi,$$

$$\int_{B_n} f = \pi\left(1-\cos(2n\pi)\right) = 0,$$

$$\int_{C_n} f = \pi\left(1-\cos(n\pi)\right) = \pi\left(1-(-1)^n\right).$$

Si risolve il problema considerando f^+ e f^-.

Funzioni integrabili in senso generalizzato

Sia $f : J \to \mathbb{R}$ localmente integrabile su J localmente misurabile in $\mathbb{R}^N$. Si dice che f è integrabile in senso generalizzato su J se le funzioni $f^+ = \max\{f, 0\}$ e $f^- = -\min\{f, 0\}$ sono integrabili in senso generalizzato su J e si pone

$$\int_J f = \int_J f^+ - \int_J f^-.$$

Osservazione

A differenza di quello che accade per le funzioni limitate sugli insiemi limitati vale il seguente risultato.

Teorema

Sia $f : J \to \mathbb{R}$ localmente integrabile su J localmente misurabile in $\mathbb{R}^N$. Si ha che

f è integrabile in senso generalizzato su J se e solo se $|f|$ è integrabile in senso generalizzato su J.

Inoltre risulta

$$\int_J f = \lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} f \,,$$

dove $(A_n)_n$ è una successione invadente J e adattata a f.

<u>Dim.</u>

Ricordiamo che $\quad f = f^+ - f^- \quad$ e $\quad |f| = f^+ + f^-$.

Per ogni n, si ha

$$\int_{A_n} |f| = \int_{A_n} f^+ + \int_{A_n} f^-$$

e quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{A_n} |f|$ è finito se e solo se

$\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{A_n} f^+$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{A_n} f^-$ sono entrambi finiti.

Inoltre risulta

$$\int_J f = \lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} f^+ - \lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} f^- = \lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} (f^+ - f^-)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} f.$$

Insiemi misurabili in senso generalizzato

Sia J localmente misurabile in $\mathbb{R}^N$. Si dice che J è misurabile in senso generalizzato in $\mathbb{R}^N$ se la funzione 1 (o χ_J) è integrabile in senso generalizzato su J e si pone

$$m_N(J) = \int_J 1 .$$

<u>Esempi</u>

Calcolare $\quad m_2(J)$, con $J = \{(x,y) : \frac{1}{2x^2} \le y \le \frac{1}{1+x^2}\}$

e $\quad m_3(J)$, con $J = \{(x,y,z) : 0 < x^2+y^2 \le 1,\ 0 \le z \le \frac{1}{x^2+y^2}\}$.

Criterio del confronto

Siano $f, g : J \to \mathbb{R}$ localmente integrabili su J localmente misurabile in $\mathbb{R}^N$, con $|f(x)| \le g(x)$ in J.

Si ha che

(i) se g è integrabile in senso generalizzato su J, allora f è integrabile in senso generalizzato su J e

$$\left|\int_J f\right| \le \int_J |f| \le \int_J g.$$

(ii) se f non è integrabile in senso generalizzato su J, allora g non è integrabile in senso generalizzato su J.

Dim

(i) Siano (A_m), $(B_n)_n$ successioni invadenti J e adatte a f, g rispettivamente. Fissato m, $|f|$ è integrabile su A_m e quindi limitata, cioè esiste $L_m > 0$ tale che

$$|f(x)| \le L_m \quad \text{in } A_m.$$

Per ogni n risulta che

$$\int_{A_m} |f| = \int_{A_m \cap B_n} |f| + \int_{A_m \setminus B_n} |f|$$

$$\le \int_{A_m \cap B_n} g + L_m\, m_N(A_m \setminus B_n)$$

$$\le \int_{B_n} g + L_m\, m_N(A_m \setminus B_n).$$

Passando al limite per $n \to +\infty$, si ottiene

$$\int_{A_m} |f| \le \lim_{n\to+\infty} \int_{B_n} g = \int_J g$$

e quindi

$$\int_J |f| = \lim_{m\to+\infty} \int_{A_m} |f| \le \int_J g.$$

(ii) è l'implicazione contronominale di (i).

Applicazioni

Osserviamo che

- $\int_{J_1} \|x\|^{-\alpha}$, con $J_1 = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| \geq 1\}$, esiste

  se e solo se $\alpha > N$

- $\int_{J_2} \|x\|^{-\alpha}$, con $J_2 = \{x \in \mathbb{R}^N : 0 < \|x\| \leq 1\}$, esiste

  se e solo se $\alpha < N$.

Quindi risulta

- se $f : J_1 \to \mathbb{R}$ è localmente integrabile su J_1 ed esistono $M > 0$ e $\alpha > N$ tali che
$$|f(x)| \leq M \|x\|^{-\alpha} \quad \text{in } J_1,$$
allora f è integrabile in senso generalizzato su J_1
- se $f : J_2 \to \mathbb{R}$ è localmente integrabile su J_2 ed esistono $M > 0$ e $\alpha < N$ tali che
$$|f(x)| \leq M \|x\|^{-\alpha} \quad \text{in } J_2,$$
allora f è integrabile in senso generalizzato in J_2.

Osservazione

In dimensione $N = 1$, non confondere l'integrabilità in senso improprio con l'integrabilità in senso generalizzato.

Esempio

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ è integrabile in senso improprio in $]0, +\infty[$, ma non è integrabile in senso generalizzato in $]0, +\infty[$.

Integrali dipendenti da parametro

Problema. Studiare le proprietà di funzioni definite da

$$g(t) = \int_{E(t)} f(t,x)\,dx$$

dove la funzione $f(\cdot,t)$ e il dominio d'integrazione $E(t)$ dipendono dal parametro t. Qui ci occupiamo del caso in cui $E(t)$ non dipende da t o $E(t) = [\alpha(t), \beta(t)]$ è un intervallo dipendente da t.

Caso compatto

Sia $f : I \times E \to \mathbb{R}$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo ed $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un compatto misurabile, integrabile su E per ogni $t \in I$.
Definiamo $g : I \to \mathbb{R}$ ponendo

$$g(t) = \int_E f(t,x)\,dx$$

Teorema (di continuità)

Se f è continua in $I \times E$, allora g è continua in I.

Dim.
Sia $m_N(E) > 0$, altrimenti $g \equiv 0$.
Fissiamo $t_0 \in I$ e sia K un intervallo compatto con $t_0 \in K$.
Poiché f è continua in $K \times E$, allora f è uniformemente continua in $K \times E$ e quindi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (t,x), (t_0,x) \in K \times E)\Big(|t - t_0| < \delta \Rightarrow |f(t,x) - f(t_0,x)| < \varepsilon / m_N(E)\Big).$$

Dunque per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|g(t) - g(t_0)| = \left|\int_E (f(t,x) - f(t_0,x))\,dx\right| \le \int_E |f(t,x) - f(t_0,x)|\,dx < \varepsilon$$

per ogni t verificante $|t-t_0|<\delta$.

Teorema (di derivazione sotto il segno d'integrale)

Se esiste $\frac{\partial f}{\partial t} : I \times E \to \mathbb{R}$ continua, allora g è di classe C^1 in I, con

$$g'(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx \qquad \text{in } I.$$

Dim.

Fissiamo $t_0 \in I$. Per le formule di riduzione si ha, per ogni $t \in I$,

$$H(t) = \int_{t_0}^{t}\left(\int_E \frac{\partial f}{\partial t}(s,x)\,dx\right)ds$$

$$= \int_E\left(\int_{t_0}^{t}\frac{\partial f}{\partial t}(s,x)\,ds\right)dx$$

$$= \int_E (f(t,x) - f(t_0,x))\,dx = g(t) - g(t_0)$$

Poiché $h(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx$ è continua, per il teorema fondamentale del calcolo, si ottiene

$$H'(t) = h(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx = g'(t). \qquad \text{in } I.$$

Applicazione

Siano $\alpha, \beta : I \to E$, con $E \subseteq \mathbb{R}$ intervallo compatto, di classe C^1 e sia $f : I \times E \to \mathbb{R}$ di classe C^1. La funzione

$$g(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(t,x)\,dx$$

è di classe C^1 in I, con

$$g'(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx + f(t,\beta(t))\beta'(t) - f(t,\alpha(t))\,\alpha'(t).$$

(teorema del trasporto di Reynolds unidimensionale)

Caso non compatto

Sia $f: I \times J \to \mathbb{R}$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $J \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme localmente misurabile in $\mathbb{R}^N$, integrabile in senso generalizzato su J per ogni $t \in I$. Definiamo $g: I \to \mathbb{R}$ ponendo

$$g(t) = \int_J f(t,x)\,dx.$$

Teorema (di continuità)

Se f è continua in $I \times J$ ed esiste $\varphi: J \to \mathbb{R}$ integrabile in senso generalizzato su J tale che

$$|f(x,t)| \leq \varphi(x) \qquad \text{in } I \times J,$$

allora g è continua in I

Teorema (di derivazione sotto il segno d'integrale)

Se esiste $\frac{\partial f}{\partial t} : I \times J \to \mathbb{R}$ continua ed esistono $\varphi, \psi : J \to \mathbb{R}$ integrabili in senso generalizzato su J tali che

$$|f(x,t)| \leq \varphi(x) \qquad \text{e} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq \psi(x) \qquad \text{in } I \times J,$$

allora g è di classe C^1 in I, con

$$g'(t) = \int_J \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx \qquad \text{in } I.$$

Esempio

Calcolare $g(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin(tx)}{x}\,dx$, con $t \in \mathbb{R}$.