Università degli Studi di Trieste – Trieste, 20 aprile 2017

Corso di Laurea in Matematica, Corso di Laurea in Fisica
Esame di Analisi 3, modulo B
A.a. 2016-2017, I prova intermedia

COGNOME		NOME	
N. Matricola		Anno di corso	
Corso di Studi:	Matematica ○	Fisica ○	

ESERCIZIO N. 1. Si ponga

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + 4y^2 \leq 3\}.$$

(i) Dopo averlo descritto, si calcoli il volume del solido E_1 ottenuto facendo ruotare D di 2π intorno all'asse x.

• $D = \{(x,y)^T : \frac{(x-1)^2}{4} + y^2 \leq 1\}$ ellisse di semiassi $a=2$, $b=1$

• $E_1 = \{(x,y,z)^T : \frac{(x-1)^2}{4} + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ellissoide di semiassi $a=2$, $b=c=1$

• $m_3(E_1) = \frac{4}{3}\pi 2 = \frac{8}{3}\pi$

(ii) Dopo averlo descritto, si calcoli il volume del solido E_2 ottenuto facendo ruotare D di 2π intorno all'asse y.

• E_2 è il solido ottenuto facendo ruotare di 2π intorno all'y l'insieme $D_+ = D \cap \{(x,y)^T : x \geq 0\}$.

• Per il teorema di Pappo-Guldino si ottiene

$$m_3(E_2) = 2\pi \iint_{D_+} x\,dx\,dy = 2\pi \int_0^3 \left(\int_{-\frac{1}{2}\sqrt{3-x^2+2x}}^{\frac{1}{2}\sqrt{3-x^2+2x}} x\,dy \right) dx$$

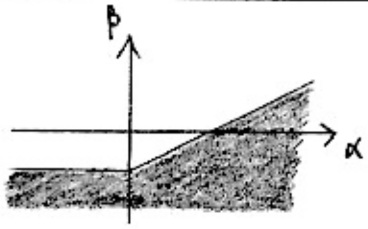
$$= 4\pi \int_0^3 x\sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{4}}\,dx = 3\sqrt{3}\pi + \frac{8}{3}\pi^2$$

ESERCIZIO N. 2. Si determinino, e si rappresentino nel piano, le coppie (α, β) per cui è integrabile in senso generalizzato su $J_\beta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 0 \leq y \leq x^\beta\}$ la funzione

$$f(x,y) = \frac{y}{1+x^\alpha}.$$

RISULTATO

- $\alpha > 0$: $\beta < \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}$
- $\alpha \leq 0$: $\beta < -\frac{1}{2}$



SVOLGIMENTO Si distinguano i casi

• $\alpha > 0$:

Posto, per ogni n, $A_n = \{(x,y)^T : 1 \leq x \leq n, \ 0 \leq y \leq x^\beta\}$ si ha

$$\iint_{A_n} \frac{y}{1+x^\alpha}\,dx\,dy = \int_1^n \left(\int_0^{x^\beta} \frac{y}{1+x^\alpha}\,dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_1^n \frac{x^{2\beta}}{1+x^\alpha}\,dx$$

Poiché $\dfrac{x^{2\beta}}{1+x^\alpha} \sim \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\alpha - 2\beta}$ per $x \to +\infty$,

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^{2\beta}}{1+x^\alpha}\,dx$ esiste finito $\Leftrightarrow$ $\alpha - 2\beta > 1$ $\Leftrightarrow$ $\beta < \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}$,

• $\alpha \leq 0$:

Poiché $\dfrac{x^{2\beta}}{1+x^\alpha} \sim \left(\dfrac{1}{x}\right)^{-2\beta}$ per $x \to +\infty$,

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^{2\beta}}{1+x^\alpha}\,dx$ esiste finito $\Leftrightarrow$ $-2\beta > 1$ $\Leftrightarrow$ $\beta < -\frac{1}{2}$.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli

$$\iiint_E z e^{\frac{y}{x}}\, dx\, dy\, dz,$$

con $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < y < 2x, \frac{1}{x} < y < \frac{2}{x}, \frac{1}{x^2} < z < \frac{2}{x^2}\}$.

RISULTATO

$$\frac{3}{8} e^2$$

SVOLGIMENTO

Poiché $E = \{(x,y,z)^T : 1 < \frac{y}{x} < 2,\ 1 < xy < 2,\ 1 < x^2 z < 2\}$,

conviene fare il cambio di variabili $(x,y,z)^T = \Phi(u,v,v)$:

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x} \\ v = xy \\ w = xz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u^{-\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} \\ y = u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} \\ z = u \frac{1}{v} w \end{cases}$$

Si ha

$$\left| \det J\, \Phi(u,v,w) \right| = \frac{1}{2v}$$

e quindi, posto $K = [1,2]^3$,

$$\iiint_E z e^{\frac{y}{x}} dx\, dy\, dz = \iiint_K u \frac{1}{v} w\, e^u \frac{1}{2v}\, du\, dv\, dw$$

$$= \left(\int_1^2 u e^u du\right) \cdot \left(\int_1^2 \frac{1}{2v^2} dv\right) \cdot \left(\int_1^2 w\, dw\right) = \frac{3}{8} e^2$$

ESERCIZIO 4. Posto $R =]0,1[\times]0,1[$, si dimostri che

$$\iint_R \frac{1}{1-xy}\,dxdy = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

SVOLGIMENTO

Sia $0<a<1$ e $R_a =]0,a]^2$. Si ha

$$\iint_{R_a} \frac{1}{1-xy}\,dxdy = \iint_{R_a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (xy)^n \right) dxdy.$$

Per la convergenza uniforme della serie in R_a, si ottiene

$$\iint_{R_a} \frac{1}{1-xy}\,dxdy = \sum_{n=0}^{+\infty} \iint_{R_a} (xy)^n\,dxdy$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^a x^n dx \right) \left(\int_0^a y^n dy \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{n+1} \right)^2.$$

Questa serie converge uniformemente in $[0,1]$ per l'M-test di Weierstrass. Quindi si passa al limite per $a \to 1$ e si conclude che

$$\iiint_R \frac{1}{1-xy}\,dxdy = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$