Corso di Laurea in Matematica, Corso di Laurea in Fisica
Esame di Analisi 3, modulo B
A.a. 2016-2017, sessione estiva, I appello

COGNOME ______________________ NOME ______________________

N. Matricola ______________________ Anno di corso ______________________

Corso di Studi: Matematica ○ Fisica ○

ESERCIZIO N. 1. Si ponga $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \le e^{-y^2}, |z| \le y\}$.

(*i*) Si stabilisca, giustificando la risposta, se E è un insieme compatto.

Per ogni $y \ge 0$, $(0,y,0)^T \in E \Rightarrow E$ non è limitato

(*ii*) Si stabilisca, giustificando la risposta, se E è un insieme localmente misurabile in $\mathbb{R}^3$.

∂E è localmente trascurabile (essendo unione di grafici di funzioni continue) $\Rightarrow$ E è localmente misurabile in $\mathbb{R}^3$

(*iii*) Si stabilisca, giustificando la risposta, se E è un insieme misurabile in $\mathbb{R}^3$, almeno in senso generalizzato.

Posto, per ogni n,

$$A_n = \{(x,y,z)^T : 0 \le y \le n, |x| \le e^{-y^2}, |z| \le y\},$$

si ha

$$\iiint_{A_n} 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^n \left(\int_{-e^{-y^2}}^{e^{-y^2}} \left(\int_{-y}^{y} 1\,dz \right) dx \right) dy$$

$$= \int_0^n 4y e^{-y^2} dy = \left[-2 e^{-y^2} \right]_0^n$$

$$= 2(1 - e^{-n^2}) \to 2, \quad \text{se } n \to +\infty.$$

quindi E è misurabile in s.g. in $\mathbb{R}^3$ e $m_3(E) = 2$.

ESERCIZIO N. 2. Posto, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, $A_n = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{n^4} + \frac{y^2}{n^2} + \frac{z^2}{n} \le 1 \le nx^2 + n^2y^2 + n^4z^2\}$, si calcoli

$$\lim_{n\to+\infty} \iiint_{A_n} (x^2+y^2+z^2+1)^{-2}\,dx\,dy\,dz$$

RISULTATO

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} (x^2+y^2+z^2+1)^{-2}\,dx\,dy\,dz = \pi^2$$

SVOLGIMENTO

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \iiint_{A_n} (x^2+y^2+z^2+1)^{-2}\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\mathbb{R}^3} (x^2+y^2+z^2+1)^{-2}\,dx\,dy\,dz,$$

conviene porre, per ogni n,

$$B_n = \{(x,y,z)^T : x^2+y^2+z^2 \le n^2\}$$

e calcolare, usando coordinate sferiche,

$$\iiint_{B_n} (x^2+y^2+z^2+1)^{-2}\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{n}(1+\rho^2)^{-2}\rho^2 \sin\varphi \,d\rho\right)d\vartheta\right)d\varphi$$

$$= 2\pi\left(\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\right)\cdot\left(\int_0^{n}\rho^2(1+\rho^2)^{-2}\,d\rho\right) =$$

$$= 2\pi\left[-\rho(1+\rho^2)^{-1} + \operatorname{arctg}\rho\right]_0^n$$

$$= 2\pi\left(\operatorname{arctg} n - n(1+n^2)^{-1}\right) \to \pi^2, \text{ per } n\to+\infty$$