Esercizi

- Provare che se $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sono insiemi limitati e $\lambda, \mu \in [0, +\infty[$, allora

$$\sup(\lambda A + \mu B) = \lambda \sup A + \mu \sup B$$

e

$$\inf(\lambda A + \mu B) = \lambda \inf A + \mu \inf B.$$

- Provare che f è continua in x_0 se e solo se $\omega_f(x_0) = 0$.

- Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \ \vee \ x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, \ p, q \in \mathbb{N}^+ \text{ coprimi}. \end{cases}$$

Provare che

a) f è continua in $x_0 = 0 \ \vee \ x_0 \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$

b) f è discontinua in $x_0 = \frac{p}{q}$.

c) f è integrabile

Calcolare $\int_0^1 f$.

- Provare che se $p, q \in]0, +\infty[$ verificano $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, allora

a) per ogni $u, v \in [0, +\infty[$, si ha $uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$ (Young);

b) per ogni $f, g : R \to \mathbb{R}$ integrabili su R N-rettangolo e tali che $f \geq 0$, $g \geq 0$ in R e $\int_R |f|^p = \int_R |g|^q = 1$, si ha

$$\int_R fg \leq 1$$

c) per ogni $f, g : R \to \mathbb{R}$ integrabili su R N-rettangolo si ha

$$\left|\int_R fg\right| \leq \left(\int_R |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_R |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$ (Hölder)