RILEVAZIONE DELLA MORTALITÀ IN AMBITO ATTUARIALE

Rilevazioni trasversali (cross-sectional studies)

Si individua il gruppo di studio, cioè un gruppo di individui per i quali interessa studiare la sopravvivenza (tipicamente gli assicurati di una compagnia di assicurazione, gli iscritti ad un fondo pensione, …).

Si fissa un periodo di osservazione durante il quale è osservato il gruppo di studio; di solito si osserva la collettività per 3-5 anni.

All’inizio dell’osservazione ci saranno individui già presenti, ai quali se ne aggiungeranno altri durante il periodo di osservazione;

alcuni individui possono uscire per causa diversa dal decesso durante l’osservazione, per esempio perché è scaduto il contratto di assicurazione, oppure perché è stata riscattata la polizza;

ci saranno individui ancora in vita al termine dell’osservazione.

Si può considerare come istante iniziale l’età minima di ingresso in assicurazione, oppure un’età minima a partire dalla quale si dispone di osservazioni.

Generalmente si ha a che fare con dati **incompleti**:

se non è osservato l'istante iniziale, l'osservazione è detta troncata a sinistra

se non è osservato il decesso, l'osservazione è detta censurata a destra

Obiettivo: stimare q_x o m_x per $x = a, a + 1, \dots, \omega - 1$, essendo a l'età minima.

Osservazione: Nei modelli di sopravvivenza non parametrici la stima del modello avviene separatamente per ciascuna classe di età

Supponiamo di disporre di dati individuali esatti, cioè per ogni individuo osservato i sono noti:

- data di nascita
- data di ingresso in osservazione
- data di uscita dall'osservazione
- causa di uscita, che può essere: fine osservazione (survival)
decesso (death)
altra causa (withdrawal)

Per ogni individuo osservato i si determina il **vettore delle età**:

$$(y_i, z_i, \theta_i, \phi_i,)$$

essendo

y_i l'età esatta (anno intero + frazione d'anno) di ingresso in osservazione

z_i l'età esatta che l'individuo i avrà alla data in cui terminerà la sua osservazione (può essere la data di fine rilevazione della collettività, oppure la data di scadenza della polizza); è detta **età di uscita pianificata**

θ_i l'età esatta di uscita per morte ($\theta_i = 0$ se l'individuo i non è uscito per morte)

ϕ_i l'età esatta di uscita per altra causa ($\phi_i = 0$ se l'individuo i non è uscito per altra causa)

$(y_i, z_i]$ è detto **intervallo di osservazione pianificata** per l'individuo i

Per ogni individuo osservato si determinano le classi di età $]x, x+1]$ per le quali l'individuo contribuisce all'osservazione

Con riferimento alla classe di età $]x, x+1]$ ed all'individuo i, caratterizzato dal vettore delle età $(y_i, z_i, \theta_i, \phi_i,)$

l'individuo i <u>non contribuisce alla osservazione</u> per la classe di età $]x, x+1]$ se:

- $y_i \geq x+1$
- $z_i \leq x$
- $0 < \theta_i \leq x$ oppure $0 < \phi_i \leq x$

Se l'individuo i <u>contribuisce alla osservazione</u> per la classe di età $]x, x+1]$

tale osservazione, relativa alla classe di $]x, x+1]$, è riassunta da un vettore detto vettore delle durate

Per ogni classe di età $]x, x+1]$ e per ogni individuo i che contribuisce alla osservazione per tale classe di età si determina il **vettore delle durate**

$$(r_i, s_i, t_i, k_i,)$$

essendo

$x + r_i$ l'età esatta di ingresso in osservazione nella classe di età $]x, x+1]$ con $0 \le r_i < 1$ e

$$r_i = \begin{cases} 0 & se\ y_i \le x \\ y_i - x & se\ x < y_i < x+1 \end{cases}$$

$x + s_i$ l'età esatta di uscita pianificata dalla osservazione per la classe di età $]x, x+1]$ con $0 < s_i \le 1$ e

$$s_i = \begin{cases} 1 & se\ z_i \ge x+1 \\ z_i - x & se\ x < z_i < x+1 \end{cases}$$

$x + t_i$ l'età esatta di uscita per morte se $\theta_i = x + t_i$, altrimenti $t_i = 0$

$x + k_i$ l'età esatta di uscita per altra causa se $\phi_i = x + k_i$, altrimenti $k_i = 0$

ESPOSIZIONE ATTUARIALE E FREQUENZE DI DECESSO

Per stimare q_x ovvero m_x, per $x = a, a+1, \dots, \omega - 1$,sono state introdotte, in ambito attuariale, le stime ottenute rapportando il numero di decessi osservati ad una qualche misura di esposizione.

Con riferimento alla classe di età $]x, x+1]$ e con riferimento agli individui i che contribuiscono alla osservazione per tale classe di età si definiscono

$$S = \{i \mid \text{l'individuo } i \text{ è in vita all'età } x + s_i\}$$ *survival*

$$D = \{i \mid \text{l'individuo } i \text{ esce per morte all'età } x + t_i\}$$ *death*

$$W = \{i \mid \text{l'individuo } i \text{ esce per altra causa all'età } x + k_i\}$$ *withdrawal*

Sia

$\theta_x = \# D$ il numero di individui che decedono nella classe di età $]x, x+1]$

Stime per $q_x = \dfrac{d_x}{l_x}$ per $x = a, a+1, \dots, \omega - 1$

Def. **Frequenza (grezza) di decesso**

$$\overset{o}{q}_x = \frac{\theta_x}{E_x}$$

essendo E_x l'**esposizione attuariale o numero iniziale di esposti al rischio**

$$E_x = \sum_{i \in S \cup D \cup W} (1 - r_i) - \sum_{i \in S} (1 - s_i) - \sum_{i \in W} (1 - k_i)$$

Stime per $m_x = \dfrac{d_x}{L_x}$ per $x = a, a+1, \dots, \omega - 1$

Def. **Frequenza (grezza) centrale di decesso**

$$\overset{o}{m}_x = \frac{\theta_x}{E_x^C}$$

essendo E_x^C il **numero centrale di esposti al rischio**

$$E_x^C = \sum_{i \in S \cup D \cup W} (1 - r_i) - \sum_{i \in S} (1 - s_i) - \sum_{i \in W} (1 - k_i) - \sum_{i \in D} (1 - t_i)$$

Osservazione

Ricordando la relazione $L_x = l_x - d_x(1-\bar{t}_x)$ si nota che si ha

$$E_x^C = E_x - \sum_{i \in D}(1-t_i)$$

Giustificazione di Cantelli

Sia D_x il n.a. dei decessi nella classe di età $]x, x+1]$; si stima q_x con il metodo dei momenti, ponendo

$$E(D_x) = \theta_x$$

Poiché

$$E(D_x) = \sum_{i \in S \cup D \cup W} {}_{1-r_i}q_{x+r_i} - \sum_{i \in S} {}_{1-s_i}q_{x+s_i} - \sum_{i \in W} {}_{1-k_i}q_{x+k_i}$$

nell'ipotesi di interpolazione iperbolica si ha ${}_{1-r}q_{x+r} = (1-r)\, q_x$, quindi

$$E(D_x) = q_x \left[\sum_{i \in S \cup D \cup W}(1-r_i) - \sum_{i \in S}(1-s_i) - \sum_{i \in W}(1-k_i) \right] = q_x\, E_x$$

Da cui si ottiene la stima con il metodo dei momenti: $\overset{o}{q}_x = \dfrac{\theta_x}{E_x}$

Osservazioni

- Nella valutazione si ipotizza "uguale mortalità" per i soggetti che rimangono nella collettività, per i nuovi ingressi e per coloro che escono per altra causa

- La giustificazione di Cantelli è errata in quanto le valutazioni relative ad uno stesso individuo sono fatte in stati di informazione diversi

- θ_x è il numero di decessi osservati con età esatta nella classe di età $]x, x+1]$.

  Poiché si contano i decessi nell'anno che inizia con l'età esatta x e termina con l'età esatta $x+1$ si dice che si prende come **riferimento l'anno di vita** compreso tra due compleanni.

  Per coerenza, anche nella valutazione dell'esposizione si prende come riferimento l'anno di vita. Infatti, disponendo di dati individuali esatti si determina per ciascun individuo la sua esposizione nell'anno di vita, infatti si ha

$$E_x = \sum_{i \in S} (s_i - r_i) + \sum_{i \in W} (k_i - r_i) + \sum_{i \in D} (1 - r_i)$$

  Nota: per gli individui che decedono il contributo all'esposizione è $\sum_{i \in D} (1 - r_i)$