Esercizi Analisi Matematica II

Anno accademico 2017-2018

Foglio 1

1. **P** Studiare il comportamento delle seguenti serie, specificando nel caso se la convergenza è semplice o assoluta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \arctan n}{\sqrt{n^6+1}};$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^2} \right); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n + 3^n};$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^3+1)}}; \quad \sum_{k=5}^{\infty} \frac{1-2k}{2^{k/2}};$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 + (-1)^n}; \quad \sum_{n=2}^{\infty} n^{-n/2}; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{k^2};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n^2+1} - n); \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3});$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} 3^{-n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/n^2} - 1); \quad \sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/\sqrt{n}} - 1);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\log(n+1) - \log(n))^{\log(n)}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^2};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\sin(1/n)); \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\log(n+1) - \log(n)\right); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\log(n)+1};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^3}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}; \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n^2-n};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{\binom{3n}{n}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt[3]{1-\cos(1/n)}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^3-n} - n); \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\tan(1/n))^2 .$$

2. **P** Tenendo presente che
$$\lim_n \sqrt[n]{n!} = +\infty,$$
studiare la convergenza della seguente serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{n/\log(n+1)}}{n!}.$$

3. **P** Studiare il comportamento delle seguenti serie, specificando nel caso se la convergenza è semplice o assoluta
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n};$$
$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{20n+1}{n^2-4}; \quad \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{20n+1}{n^2-n};$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}; \quad \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k};$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+\sqrt{n}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\cos(n^2)+\sqrt{n}).$$

4. **P** Studiare, usando sia il metodo della serie condensata che il criterio integrale per serie, la convergenza della seguente serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

5. **P** Studiare, usando sia il metodo della serie condensata che il criterio integrale per serie, la convergenza delle seguenti serie al variare del parametro $\alpha > 0$
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha} \quad \text{e} \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)(\log(\log n))^\alpha}.$$

6. **P** Studiare il comportamento delle seguenti serie, specificando nel caso se la convergenza è semplice o assoluta
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n^{3/2})}{n^{3/2}}; \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\arctan n}{n\sqrt{n-1}};$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi+\pi/2)}{2n+\cos(n\pi)}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{2n+\cos(n\pi)};$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-\sqrt{n}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot 3^{-\sqrt{n}};$$

$$\sum_{n=5}^{\infty}(-1)^{n+2}(\sqrt[n]{3}-1); \quad \sum_{n=2}^{\infty}\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n};$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right); \quad \sum_{n=1}^{\infty}n(1-e^{1/n^2}); \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi/2-\arctan n}{\sqrt{n}}.$$

7. **P** Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, il comportamento delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin(1/n); \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sin x)^n}{n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\sin x)^n}{n};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos(x/n)).$$

8. **P** Verificare che la serie

$$1-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{2^3}-\ldots-\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{2^{n-1}}-\ldots$$

è convergente e se ne calcoli la somma.

9. **P** Si discuta, al variare del parametro α ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -\frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$), la convergenza della serie

$$1+\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{(1+\alpha)(1+2\alpha)}+\ldots+\frac{1}{(1+\alpha)(1+2\alpha)\cdot\ldots\cdot(1+n\alpha)}+\ldots$$

10. **P** Si determini per quali valori di α, $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}2^n(\sin\alpha)^{2n}.$$

Nei casi in cui è convergente calcolarne la somma.

11. **P** Si discuta, al variare del parametro α, $\alpha > 0$, il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^\alpha}}-1\right).$$

12. **P** Si dimostri che per ogni $a \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$ vale

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}=\frac{1}{a}.$$

13. **P** Sia assegnata la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ricorrenza nel modo seguente:
$$a_1 = 1; \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}, \; n \in \mathbb{N}.$$
Verificare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è divergente.

14. **P** Si studi la convergenza, semplice o assoluta, delle seguenti serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-1); \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}; \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n}\right)^{\log n}.$$

15. **P**$*$ Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che la serie
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{1/k^2} f(x)\,dx\right)$$
è convergente.

16. **P**$*$ Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su $\mathbb{R}$ e tale che $f(0) = 0$. Dimostrare che la serie
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{1/k} f(x)\,dx\right)$$
è convergente.

17. **P**$*$ Studiare il comportamento della seguente serie
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\log(1-1/\sqrt{n})+1/\sqrt{n}\right).$$

18. **P**$*$ Studiare il comportamento della seguente serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1/n-\log(1+1/n)\right).$$

19. **P**$*$ Studiare il comportamento della seguente serie
$$\sum_{k=1}^{\infty}(\arctan(1/k)-1/k).$$

20. **P**$*$ Studiare, al variare del parametro α, $\alpha > 0$, il comportamento della seguente serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{1/n^{\alpha}}-1-\frac{1}{n^{\alpha}}-\frac{1}{2n^{2\alpha}}\right).$$

Legenda:
T esercizio teorico; **P** esercizio pratico; **F** esercizio facoltativo; $*$ esercizio difficile