FREQUENZE DI DECESSO PER TAVOLE SELEZIONATE

Un modello di sopravvivenza selezionato è definito mediante una famiglia di funzioni di sopravvivenza

$$S(t;x) \qquad t \geq 0 \qquad x = a, a+1, \dots, \omega - 1$$

dove

- x è l'età (intera) di ingresso in assicurazione
- t è l'antidurata dell'assicurazione

Una **tavola di mortalità selezionata** è definita da un insieme di sequenze del tipo

$$\begin{array}{llll} l_{[a]} & l_{[a]+1} & l_{[a]+2} & \cdots \\ l_{[a+1]} & l_{[a+1]+1} & l_{[a+1]+2} & \cdots \\ \cdots & & & \\ l_{[x]} & l_{[x]+1} & l_{[x]+2} & \cdots \\ \cdots & & & \end{array}$$

dove

$$l_{[x]+t} = l_{[x]} \cdot S(t;x)$$

$$x = a, a+1, \dots, \omega - 1$$

$$t = 0, 1, \dots$$

Per stimare un modello di sopravvivenza selezionato si determinano le frequenze di decesso per le diverse età di ingresso in assicurazione e antidurate.

Poiché l'età (intera) di ingresso in assicurazione è l'età arrotondata all'emissione della polizza e l'antidurata è il numero di anni in cui l'individuo è presente in assicurazione, si prende come riferimento l'anno di polizza.

Con riferimento all'età arrotondata x di ingresso in assicurazione e all'intervallo di antidurate $]t, t+1]$,il vettore delle durate $(r_i, s_i, t_i, k_i,)$ dell'individuo i che contribuisce alla osservazione per l'intervallo di antidurate $]t, t+1]$ è così definito

r_i con $0 \le r_i < 1$ tale che r_i è l'antidurata esatta all'ingresso in osservazione nell'intervallo di antidurate $]t, t+1]$

s_i con $0 < s_i \le 1$ tale che s_i è l'antidurata esatta all'uscita dall'osservazione dell'intervallo di antidurate $]t, t+1]$

t_i con $0 < t_i \le 1$ tale che $t + t_i$ è l'antidurata totale esatta all'uscita per morte

k_i con $0 < k_i \le 1$ tale che $t + k_i$ è l'antidurata totale esatta all'uscita per altra causa

Si definisce

$\theta_{[x]+t}$ il numero di decessi osservati per gli assicurati entrati in assicurazione all'età arrotondata x e con antidurata esatta in $]t, t+1]$

$E_{[x]+t}$ il numero iniziale di esposti al rischio nell'anno di polizza $]t, t+1]$, per gli assicurati entrati in assicurazione all'età arrotondata x

$$E_{[x]+t} = \sum_{i \in S \cup D \cup W} (1 - r_i) - \sum_{i \in S} (1 - s_i) - \sum_{i \in W} (1 - k_i)$$

Si definisce la **frequenza di decesso**

$$\overset{o}{q}_{[x]+t} = \frac{\theta_{[x]+t}}{E_{[x]+t}}$$

che fornisce una stima di $q_{[x+f]+t}$ con $-\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2}$

Nel caso di distribuzione uniforme dei compleanni nell'anno di polizza si può assumere $f = 0$ e quindi $\overset{o}{q}_{[x]+t}$ fornisce una stima di $q_{[x]+t}$

Indicato con

$E^{C}_{[x]+t}$ il numero centrale di esposti al rischio nell'anno di polizza $]t, t+1]$, per gli assicurati entrati in assicurazione all'età arrotondata x

$$E^{C}_{[x]+t} = \sum_{i \in S \cup D \cup W} (1 - r_i) - \sum_{i \in S} (1 - s_i) - \sum_{i \in W} (1 - k_i) - \sum_{i \in D} (1 - t_i)$$

si definisce la **frequenza centrale di decesso**

$$\overset{o}{m}_{[x]+t} = \frac{\theta_{[x]+t}}{E^{C}_{[x]+t}}$$

che fornisce una stima di $m_{[x+f]+t}$

Poiché l'effetto della selezione si esaurisce entro un certo numero t' di anni

$$q_{[x]} < q_{[x-1]+1} < q_{[x-2]+2} < \cdots < q_{[x-t']+t'} = q_{[x-t'-1]+t'+1} = q_{[x-t'-2]+t'+2} = \cdots = q_{[a]+x-a}$$

si definiscono le tavole selezionate ridotte

$$\begin{array}{cccccc}
l_{[a]} & l_{[a]+1} & l_{[a]+2} & \cdots & l_{[a]+t'-1} & l_{(a+t')} \\
l_{[a+1]} & l_{[a+1]+1} & l_{[a+1]+2} & \cdots & l_{[a+1]+t'-1} & l_{(a+t'+1)} \\
\vdots & & & & & \vdots \\
l_{[x]} & l_{[x]+1} & l_{[x]+2} & \cdots & l_{[x]+t'-1} & l_{(x+t')} \\
\vdots & & & & & \vdots
\end{array}$$

dove $l_{[a]}$ è la radice della tavola e $l_{[x]}$ è tale che

$$l_{[x]} \cdot S(t';x) = l_{(x+t')} \qquad x = a+1, a+2, \ldots, \omega - 1$$

Indichiamo con

$$q(x) = q_{[x-t']+t'} = q_{[x-t'-1]+t'+1} = \cdots = q_{[a]+x-a} \qquad \text{con } x = a+t \quad \text{e} \quad t = t', t'+1, \ldots$$

Per stimare

$$q(x) = q_{[x-t']+t'} = q_{[x-t'-1]+t'+1} = \cdots = q_{[a]+x-a} \qquad \text{con } x = a+t \quad \text{e} \quad t = t', t'+1, \ldots$$

si continua a prendere come riferimento l'anno di polizza e si considerano le frequenze di decesso

$$\overset{o}{q}_{(x)} = \frac{\theta_{(x)}}{E_{(x)}}$$

essendo

$$\theta(x) = \theta_{[x-t']+t'} + \theta_{[x-t'-1]+t'+1} + \cdots + \theta_{[a]+x-a}$$

$$E(x) = E_{[x-t']+t'} + E_{[x-t'-1]+t'+1} + \cdots + E_{[a]+x-a}$$

oppure le frequenze centrali di decesso

$$\overset{o}{m}_{(x)} = \frac{\theta_{(x)}}{E^{C}_{(x)}}$$

essendo

$$E^{C}(x) = E^{C}{}_{[x-t']+t'} + E^{C}{}_{[x-t'-1]+t'+1} + \cdots + E^{C}{}_{[a]+x-a}$$