
Laurea magistrale
in Ingegneria Clinica

**Valutazione delle Strutture e dei Servizi
(base)**

Lorenzo Castelli

Università degli Studi di Trieste

Motivazioni

Lettera della BCE al Governo Italiano, Agosto 2011

*Negli organismi pubblici dovrebbe diventare sistematico l'uso di **indicatori di performance** (soprattutto nei sistemi **sanitario**, giudiziario e dell'istruzione).*

Testi di riferimento

- *Chp1: Efficiency and Productivity* in *The measurement of Productive Efficiency and Productive Growth*, eds H.O. Fried, C.A. Knox Lovell, S.S Schmidt (eds), Oxford University Press, 2008
- *Chp1: General Discussion* in *Data Envelopment Analysis*, W.W. Cooper, L. M. Seiford, K. Tone, Kluwer Academic Publishers, 2000,
- J. A. Chilingerian & H. D. Sherman (2011) *Health-Care Applications: From Hospitals to Physicians, from Productive Efficiency to Quality Frontiers* in *Handbook on Data Envelopment Analysis*, W.W. Cooper et al. (eds), International Series in Operations Research & Management Science, 164, 445-493

Sommario della lezione

- Produttività ed Efficienza
- Data Envelopment Analysis (DEA)
- DEA per l'assistenza sanitaria (Health-Care)

Ipotesi

- Se si parla di ‘**misurare la performance**’ di un sistema sanitario, quest’ ultimo può essere considerato come un’ entità che utilizza degli input che poi trasforma in output, o detto altrimenti, un **produttore**.
- La performance di un produttore può essere espressa in termini di
 - Produttività
 - Efficienza

Produttività

- Rapporto tra due scalari: output e input

$$\text{Produttività} = \text{OUTPUT/INPUT}$$

- Indicatore facile da calcolare se il produttore utilizza un solo output ed un solo input
- Se invece vi sono più output e/o più input è necessaria una qualche forma di aggregazione
 - Così l'indicatore rimane un rapporto tra due scalari
- Variazione di produttività (ex nel tempo).
 - NON ne parleremo

Efficienza

- Confronto tra i valori osservati di input e output e quelli ‘ottimi’
 - Efficienza tecnica
 - Dato un certo input, confronto tra l’ output osservato e il massimo output ottenibile da quell’ input
 - Dato un certo output, confronto tra l’ input osservato e il minimo input necessario per ottenere quell’ output
 - Efficienza economica
 - Se vengono presi in considerazione: prezzi, costi, ricavi, profitti, ecc.
 - Tipicamente ci sono vincoli aggiuntivi su disponibilità di risorse

Tre punti chiave

1. Quali input e output considerare?
2. Come pesare (aggregare) se vi sono più input e/o più output?
3. Come determinare il potenziale tecnico o economico del produttore?

Scelta Input & Output (I)

- Se si considerano tutti gli input e output possibili, poiché né la materia né l'energia possono essere create o distrutte, tutti i produttori dovrebbero avere l'indicatore di produttività pari a 1 (Knight, 1933/1965)
- Knight propone di ridefinire la produttività come il rapporto tra gli output e gli input 'utili'

Scelta Input & Output (II)

- In pratica, il problema è come procedere quando non vengono inclusi nel confronto abbastanza I/O
- Alla fine si considerano tutti gli I/O che si ritengono importanti, o al limite, quelli che si hanno a disposizione

Assegnazione dei pesi (I)

- Una volta definiti I/O, cosa fare nel caso di più input e/o output?
- Tipicamente si esegue una somma pesata degli input e degli output, così da ottenere uno scalare a numeratore e denominatore

$$P = \frac{\beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2 + \dots + \beta_n Y_n}{\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_m X_m}$$

- m Input: x_1, \dots, x_m ; n Output: y_1, \dots, y_m
- $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ pesi degli input; β_1, \dots, β_n pesi degli input

Assegnazione dei pesi (II)

- Determinazione dei pesi
 - Prezzi di mercato delle risorse (a quanto si acquista un' unità di risorsa) e dei prodotti finiti (a quanto si vende un' unità di prodotto)
- Prezzi di mercato. Due problematiche:
 - Se esistono, possono variare nel tempo o essere diversi per diversi produttori (ex, carburante per compagnie aeree) o imposti dal monopolista
 - Possono non esistere
 - Impatto ambientale, erogazione di servizi pubblici

Potenziale del produttore

- Non sappiamo, e non possiamo sapere, quanto più velocemente possibile un uomo può correre i 100 metri
- Però si possono osservare le ‘best practices’ e come queste si evolvono nel tempo o tra i diversi corridori
- Ci si può quindi rapportare con quanto di meglio è stato osservato

Riassumendo

- Le misure di efficienza e produttività sono delle indicatori di successo o di prestazione (performance metrics) e permettono di valutare i produttori
- E' necessario decidere
 - Quali grandezze (I/O) considerare
 - Come pesarle
 - Come definire il potenziale

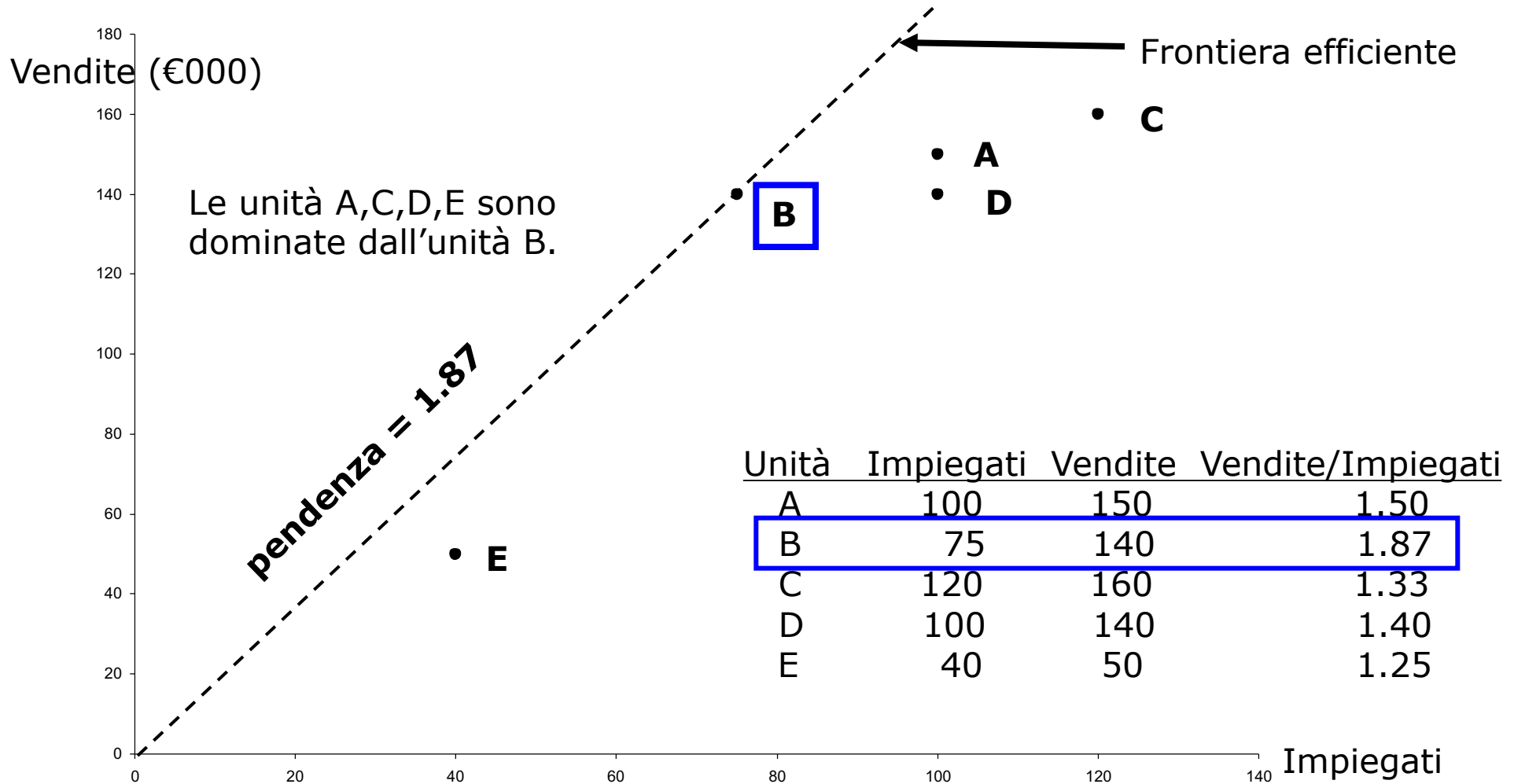
Produttività (o Efficienza assoluta)

La produttività (o efficienza assoluta) stabilisce una relazione tra:

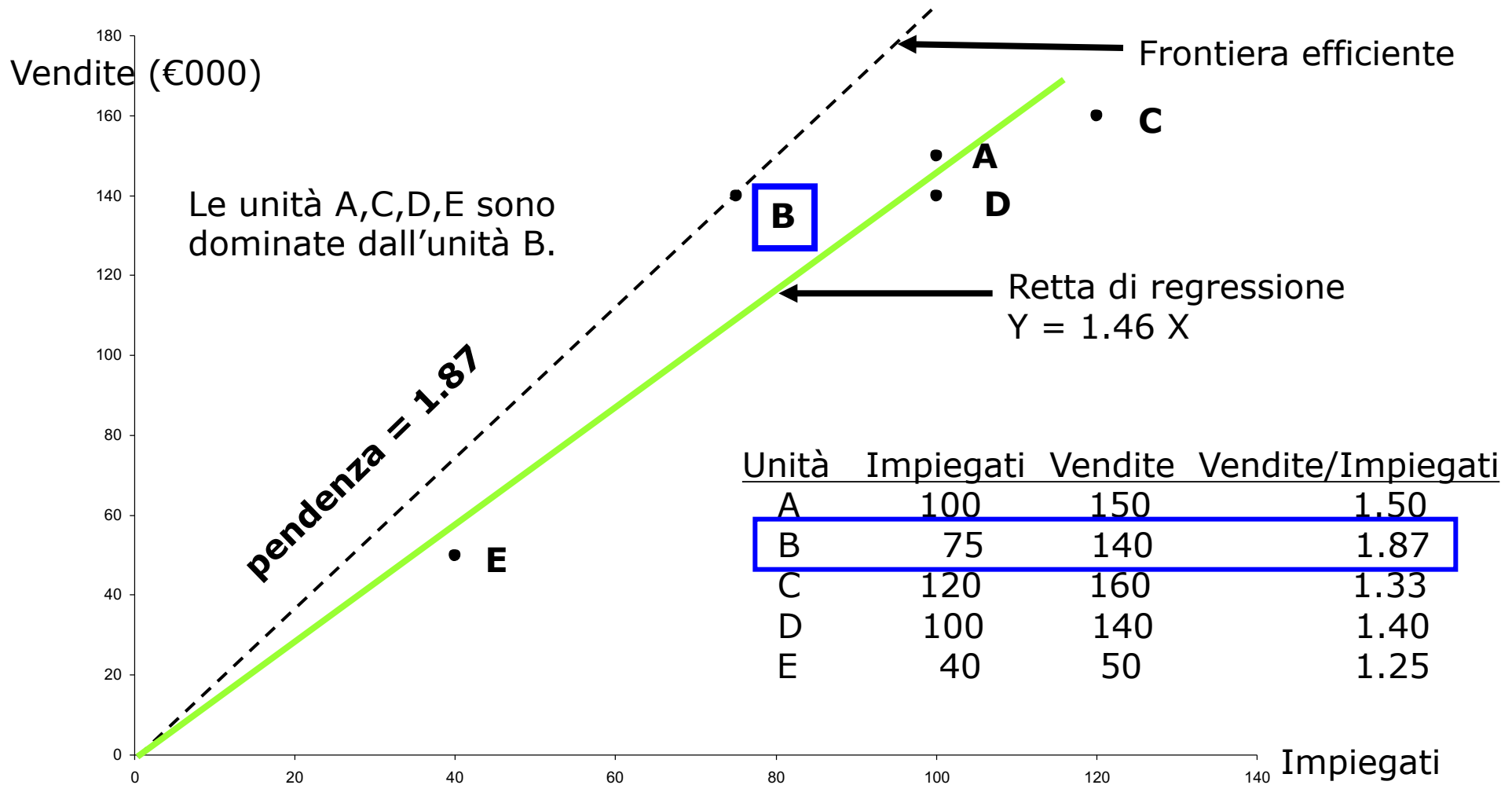
- output (o risultati): prodotti, benefici, servizi, etc.;
- input (o risorse): impiegate per produrli.

$$P = \frac{\textit{output (o risultati)}}{\textit{input (o risorse)}}$$

1 input – 1 output



1 input – 1 output



Regressione vs Frontiera Efficiente

- La retta di regressione descrive un comportamento 'medio'
- La frontiera efficiente indica
 - la migliore prestazione osservata
 - permette di misurare l'efficienza rispetto ad essa

Efficienza relativa (I)

Unità	I	O	O/I	(O/I) / 1.87
A	100	150	1.50	0.80
B	75	140	1.87	1.00
C	120	160	1.33	0.71
D	100	140	1.40	0.75
E	40	50	1.25	0.67

Efficienza relativa (II)

- Sia P^* il valore di produttività massima (o massima efficienza assoluta)

$$P^* = \max_i P_i = \max_i \frac{O_i}{I_i}$$

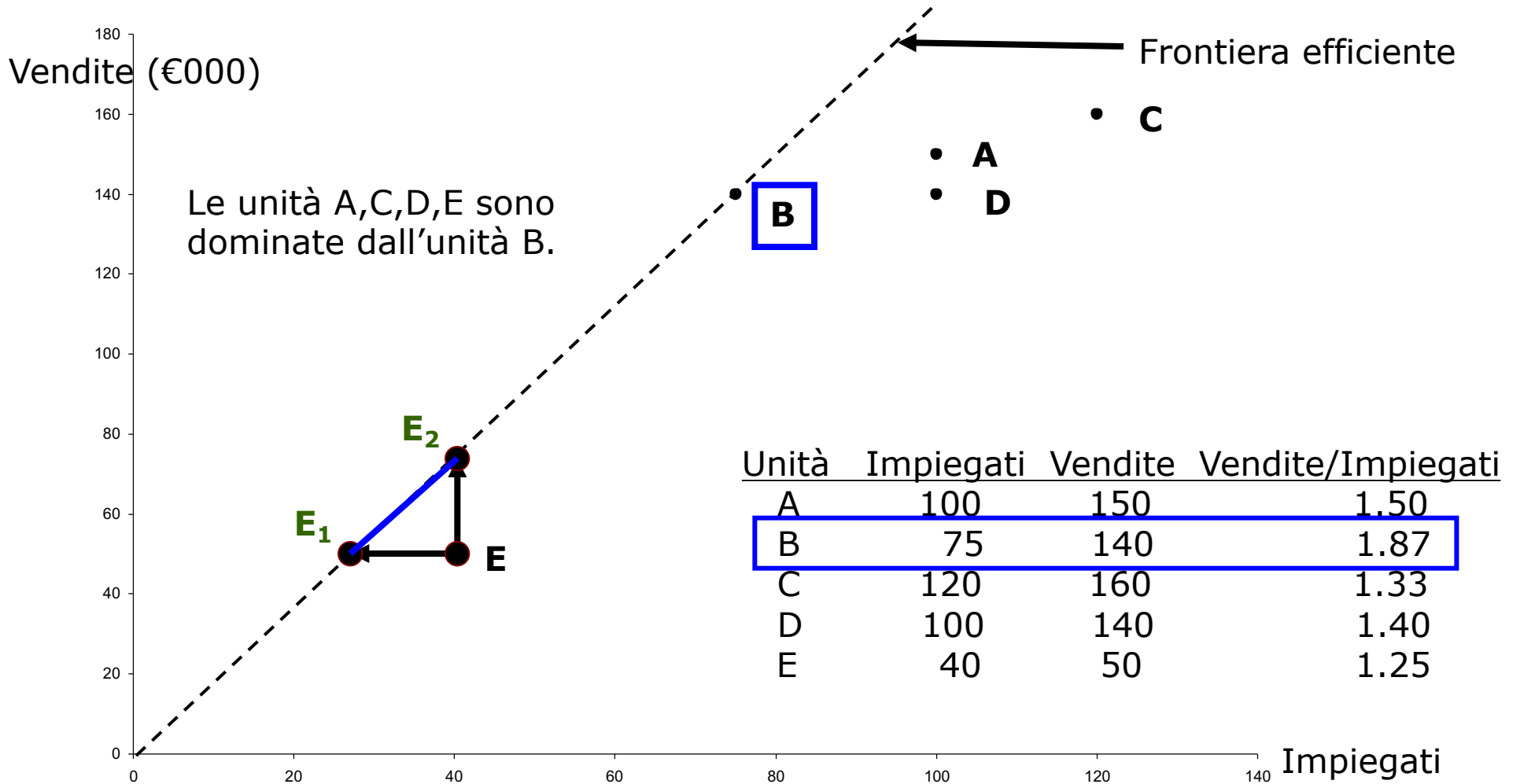
- Sia E_i l'efficienza relativa dell'unità i -esima rispetto a quella di efficienza assoluta massima, cioè

$$E_i = \frac{P_i}{P^*} = \frac{\frac{O_i}{I_i}}{\max_i \frac{O_i}{I_i}}$$

Efficienza relativa (III)

- E_i è sempre tale che $0 \leq E_i \leq 1$
- Certamente esiste almeno un'unità per cui $E_i = 1$
- Il valore di E_i non dipende dall'unità di misura (*units invariance*)

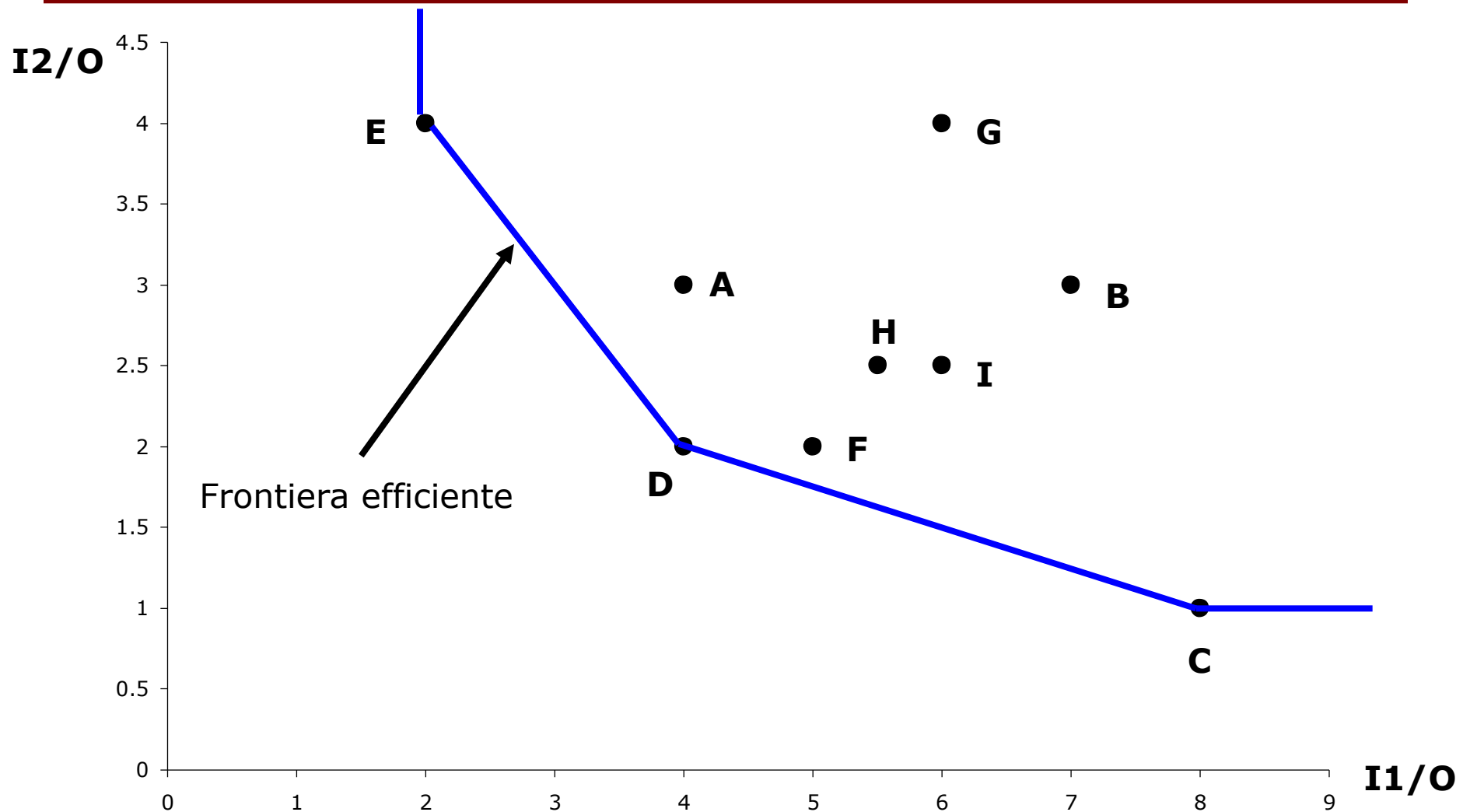
Rendere efficiente un'unità inefficiente



2 Input – 1 Output (I)

Unità	Impiegati (I1/0)	Area (I2/0)	Vendite (O)
A	4	3	1
B	7	3	1
C	8	1	1
D	4	2	1
E	2	4	1
F	5	2	1
G	6	2	1
H	5,5	2,5	1
I	6	2,5	1

2 Input - 1 Output (II)



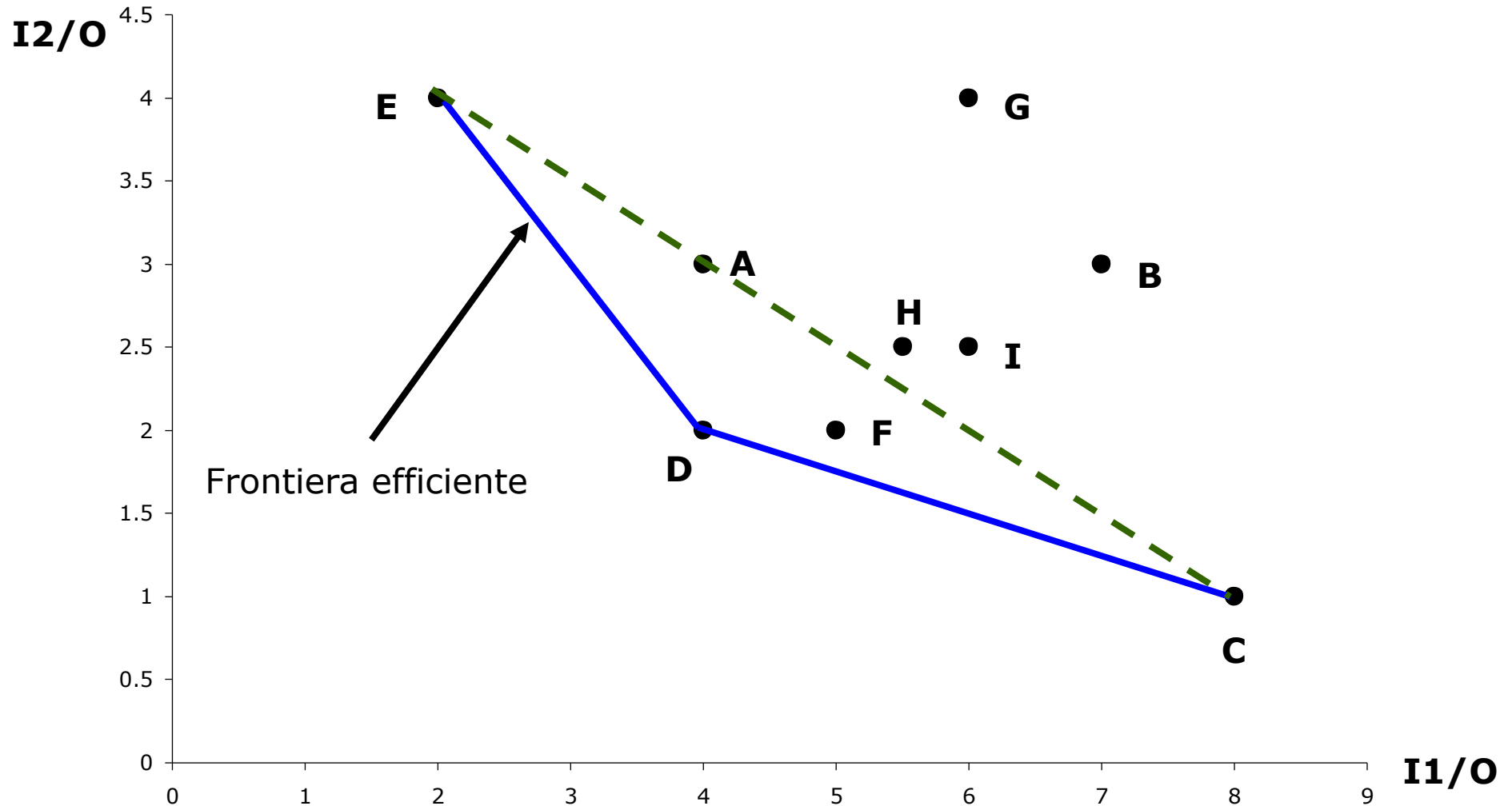
2 Input – 1 Output (III)

- Qualora si riportino su due assi cartesiani i due ingressi scalati per l' unica uscita, le unità che stanno in basso a sinistra consumano meno risorse di quelle che stanno in alto a destra, a parità di risultati prodotti.
- Per questo le prime saranno sicuramente più efficienti delle ultime.
- Le unità che si trovano a sinistra nel grafico consumano poco della prima risorsa, quelle che stanno in basso consumano poco della seconda

2 Input – 1 Output (IV)

- Le unità E e C si trovano allora in posizione di dominanza rispetto a tutte le altre, in quanto sono quelle che consumano di meno a parità di risultati (l'una per quanto riguarda il primo ingresso, l'altra per il secondo).
- Determinate queste due unità che “dominano” le altre per quanto riguarda il consumo di una delle due risorse, pensiamo di unire con un segmento di retta i punti rappresentanti le due unità (punti E e C).
- I punti di questo segmento rappresentano un insieme di infinite ipotetiche unità, derivanti dalla combinazione delle prime due. Tali unità fittizie consumano di più di E per quanto riguarda l'ingresso $I1$, ma di meno di E per quanto riguarda l'ingresso $I2$ (normalizzati).

2 Input – 1 Output (V)



2 Input – 1 Output (VI)

- Discorso analogo se le confrontiamo con C .
- Trovandosi poi su un segmento di retta, tali unità riducono il consumo di un ingresso tanto quanto aumentano il consumo dell'altro, e per questo si trovano in condizioni di parità rispetto ad E e C
- Nel nostro caso:
$$I_2 / O = -\frac{1}{2}(I_1 / O) + 5$$
- Il punto $A = (4,3)$ si trova su questa retta

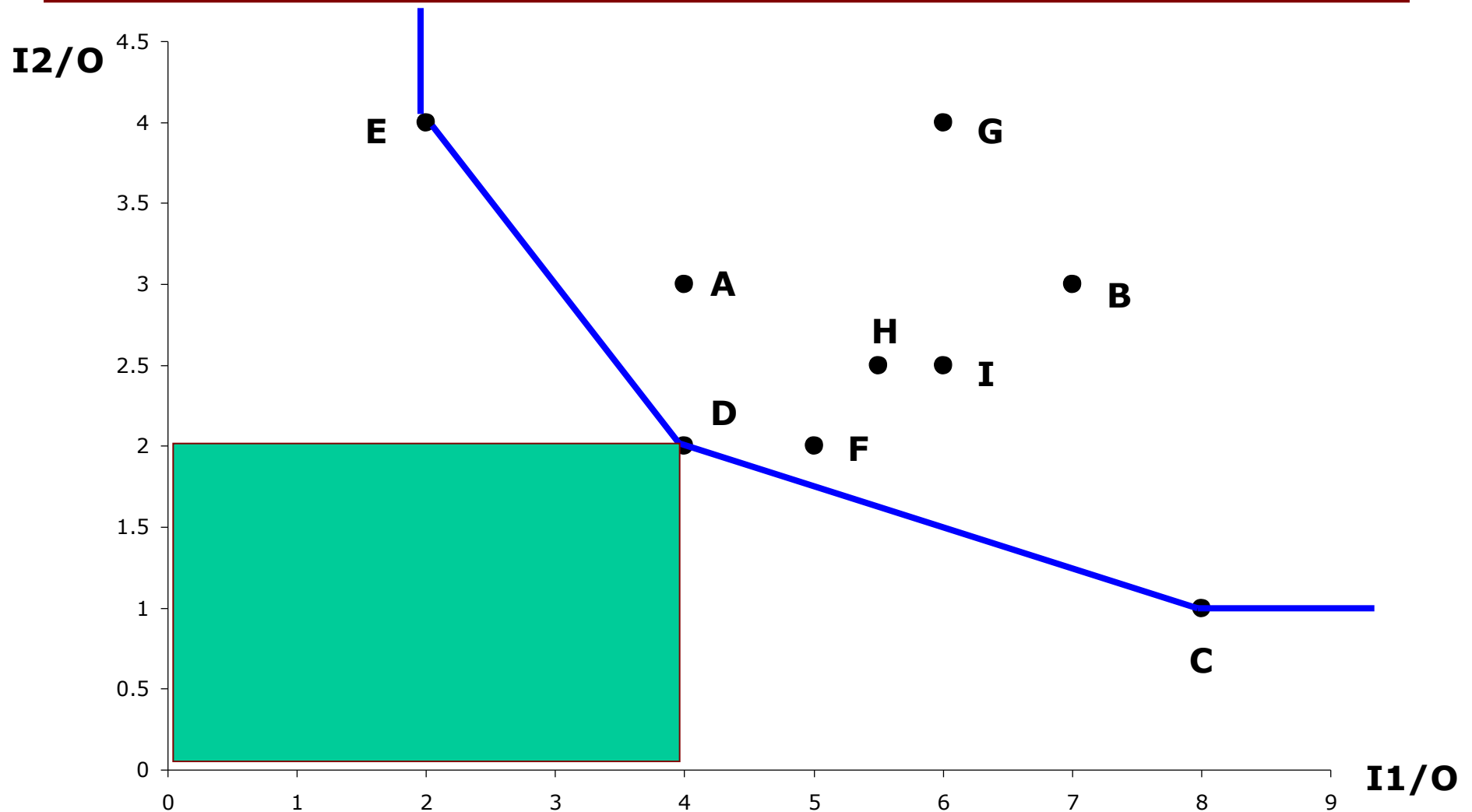
2 Input – 1 Output (VII)

- Le unità che si trovano “al di sotto” di tale segmento sono ancora da considerarsi efficienti, in quanto utilizzano un mix di risorse più omogeneo rispetto ad E e C , consumando nel contempo meno di un’ipotetica combinazione delle due.
- Nell’esempio riportato, in tali condizioni si trovano le unità D e F .
- Però D utilizza un mix di risorse migliore (preferibile) di F
- Tutte le altre unità sono allora dominate da C , D e E , e a differenza di queste saranno chiamate **inefficienti**.

2 Input – 1 Output (VIII)

- La spezzata che unisce l'insieme delle unità efficienti viene chiamata “frontiera di efficienza”.
- Per tali unità si assume un valore di efficienza pari al 100%.
- Le unità efficienti sono Pareto-efficienti o non dominate
 - non esiste nessun'altra unità che abbia un insieme di input (I_1, I_2) preferibile

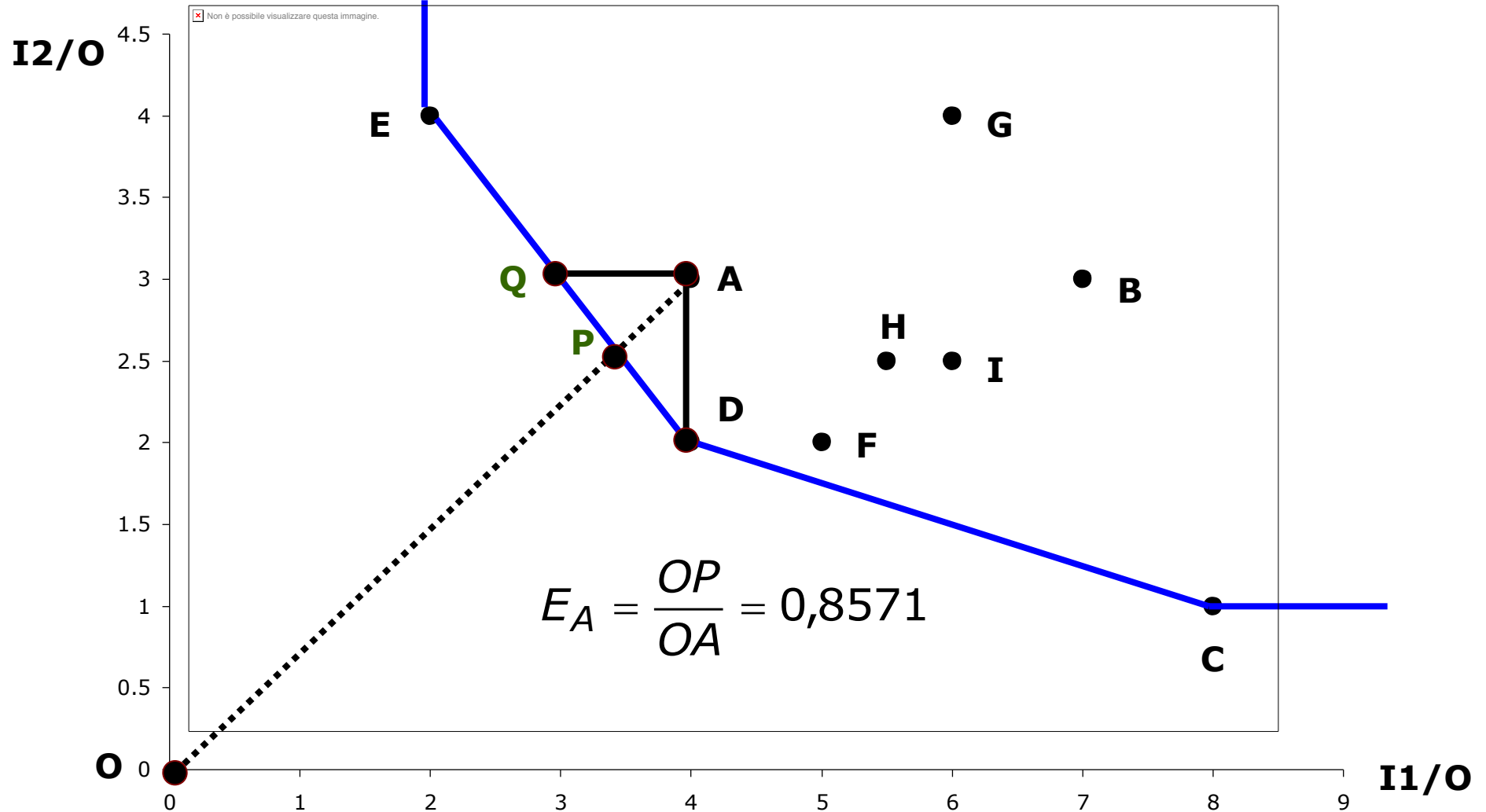
2 Input – 1 Output (IX)



Misurare l'efficienza (I)

- La misura dell'efficienza per le unità inefficienti viene valutata nel seguente modo.
- Si consideri l'unità inefficiente A .
- Il punto P ne rappresenta la proiezione radiale sulla frontiera.
- L'efficienza dell'unità A , indicata con E_A , viene quantificata rapportando la lunghezza del segmento (OP) a quella del segmento (OA) .
- L'unità A può diventare efficiente raggiungendo un qualunque punto della frontiera di efficienza.

Misurare l'efficienza (II)



Misurare l'efficienza (III)

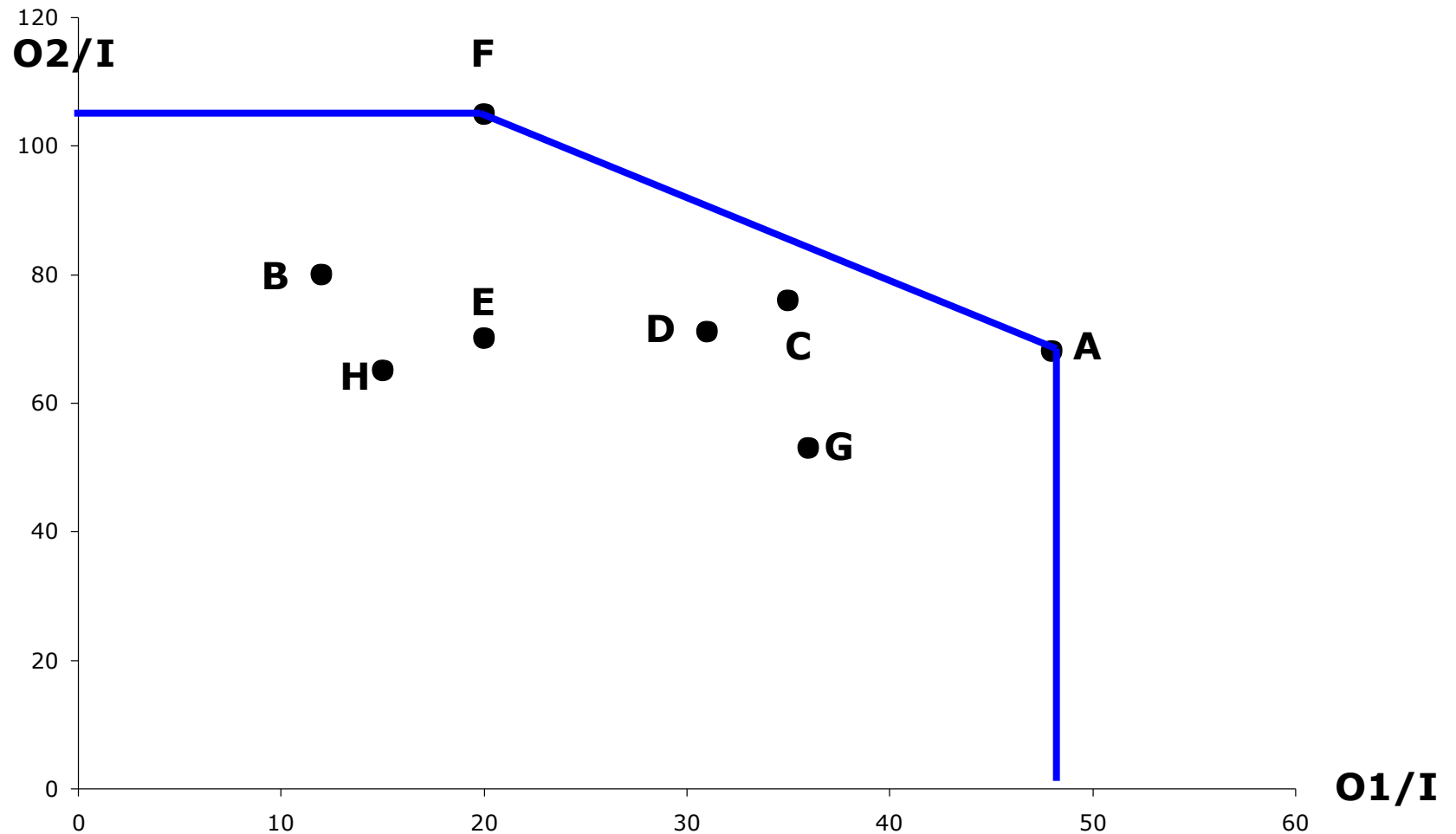
- L'indicazione che viene solitamente fornita è quella di ridurre in modo il più equilibrato possibile gli ingressi, ovvero di raggiungere i valori dei flussi di ingresso (**target**) tali da rendere l'unità efficiente spostandosi radialmente verso l'origine. Nella fattispecie si consiglia allora di raggiungere il punto P .
- Con una terminologia che si riprenderà ampiamente in seguito, l'insieme delle unità che dominano l'unità A rendendola inefficiente costituisce il **reference set** di A . Esso è costituito dalle unità E e D , che saranno chiamate **peers** di A .

1 Input – 2 Output (I)

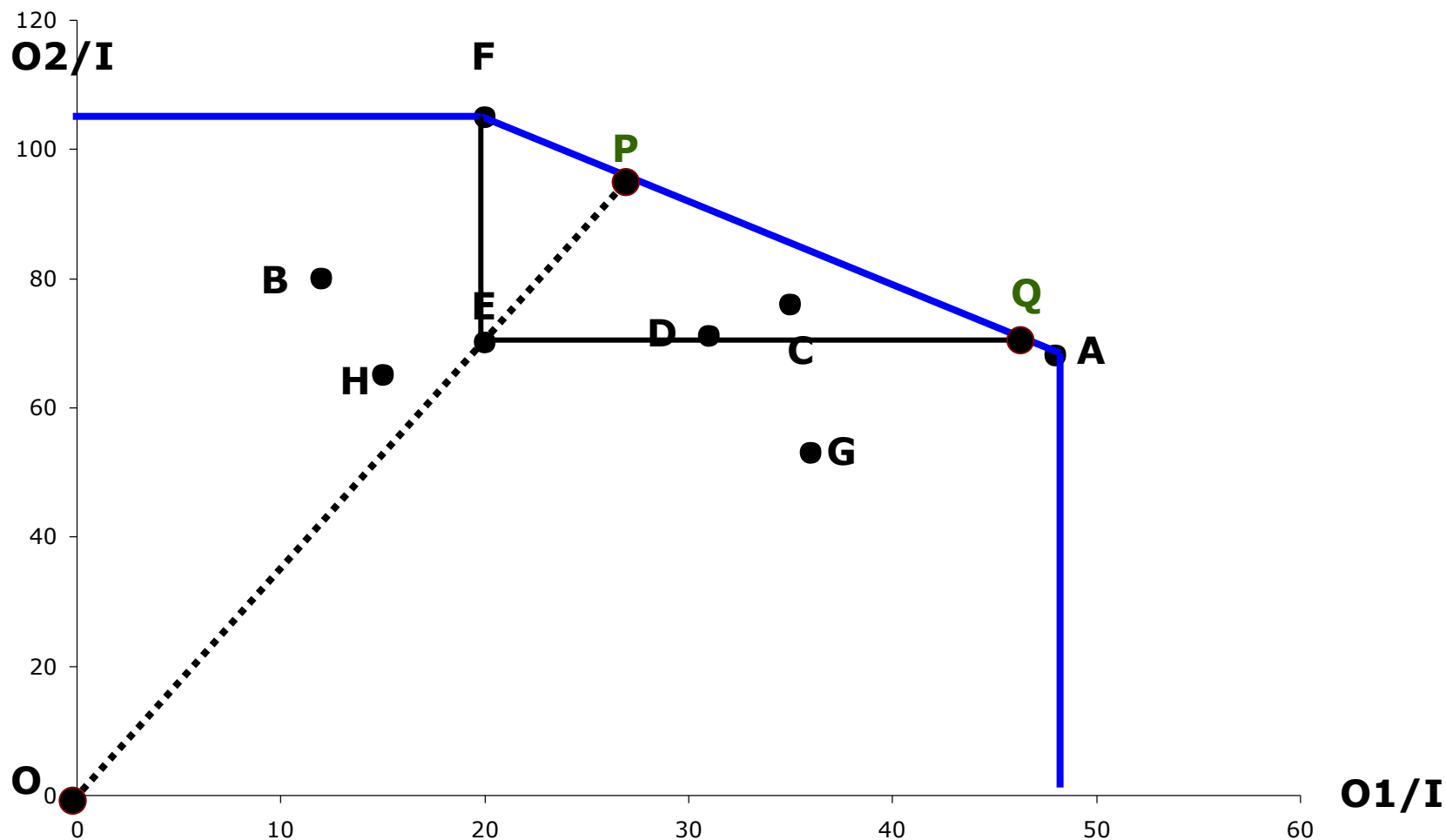
Esempio: 8 reparti di un ospedale eseguono un certo numero di esami ed operazioni nello stesso mese. Chi è più produttivo?

Reparto	Input (I)	Esami (O1/I)	Operazioni (O2/I)
A	1	48	68
B	1	12	80
C	1	35	76
D	1	31	71
E	1	20	70
F	1	20	105
G	1	36	53
H	1	15	65

1 Input - 2 Output (II)



Inefficienza di un reparto (I)



Inefficienza di un reparto (II)

- Il valore dell'efficienza di E è pari a

$$OE/OP = 0,734$$

- Il punto P è il target di E se si utilizza una misura radiale dell'efficienza
- I peers di E sono i punti A ed F

Più input e più output (I)

- Essendo risorse e risultati non necessariamente omogenei, sia la loro aggregazione che il loro rapporto richiede una preventiva operazione di omogeneizzazione.

$$\frac{\text{Prodotto}_1 + \text{Prodotto}_2 + \dots + \text{Prodotto}_m}{\text{Risorsa}_1 + \text{Risorsa}_2 + \dots + \text{Risorsa}_n}$$

- In altri termini, tutti i flussi devono essere misurati secondo una stessa unità di misura (ad esempio monetizzati).

Più input e più output (II)

- Ciò pone il problema di determinare dei rapporti di equivalenza tra i flussi: quante unità di un dato flusso si possono considerare equivalenti, ai fini della valutazione, ad un' unità di un altro flusso?
- Definire il peso di ciascun flusso, che rappresenta il valore di un flusso unitario in un' opportuna unità di misura, la stessa per tutti i flussi.

Più input e più output (III)

- Si usano dei **pesi** p e q per rendere omogenei i flussi:

$$p1 \cdot \text{Prodotto1} + p2 \cdot \text{Prodotto2} + \dots + pm \cdot \text{Prodottom}$$

$$q1 \cdot \text{Risorsa1} + q2 \cdot \text{Risorsa2} + \dots + qn \cdot \text{Risorsan}$$

Difficoltà (I)

- I valori dei pesi esprimono inevitabilmente l'importanza relativa dei flussi.
- Per di più i valori dei pesi condizionano il valore del risultato, cioè la produttività e l'efficienza dell'unità in esame.

**In sostanza sappiamo calcolare
l'efficienza di un'unità purché
qualcuno ci dica quali pesi usare.**

Difficoltà (II)

- Pesi diversi daranno luogo a diverse valutazioni di efficienza, che potranno porre in diversa luce le varie unità, rendendole più o meno efficienti.
- Ciascuna unità è interessata ad adoperare pesi che possano fornire una migliore valutazione della propria efficienza.

Misurare l'efficienza (relativa)

Valutazione comparativa di efficienza tra le unità

1. supponiamo di avere pesi assegnati per tutti i flussi;
2. calcoliamo l'efficienza di ciascuna unità (in funzione dei pesi assegnati)
3. troviamo qual è l'unità più efficiente;
4. calcoliamo i rapporti tra l'efficienza di ciascuna unità e quella più efficiente.

Ovviamente cambiando i pesi si ottengono risultati diversi

2 Input – 2 Output

- Valutazione dell'efficienza di 12 ospedali
- 2 Input
 - Numero di Medici
 - Numero d'Infermieri
- 2 Output
 - Pazienti ambulatoriali al mese (x 100)
 - Degenti ricoverati al mese (x 100)

2 Input – 2 Output

	Medici	Infermieri	Ambulatoriali	Degenti	P1	E1	P2	E2
A	20	151	100	90	1.474	1.00	0.503	0.68
B	19	131	150	50	1.327	0.90	0.742	1.00
C	25	160	160	55	1.140	0.77	0.648	0.87
D	27	168	180	72	1.307	0.89	0.706	0.95
E	22	158	94	66	1.090	0.74	0.429	0.58
F	55	255	230	90	0.943	0.64	0.586	0.79
G	33	235	220	88	1.210	0.82	0.619	0.83
H	31	206	152	80	1.086	0.74	0.505	0.68
I	30	244	190	100	1.244	0.84	0.536	0.72
J	50	268	250	100	1.062	0.72	0.612	0.82
K	53	306	260	147	1.228	0.83	0.586	0.79
L	38	284	250	120	1.287	0.87	0.597	0.80
W1	5	1	1	3	1.474	MAX		
W2	1	5	3	1	0.742	MAX		

Esempio & Esercizio

- Esempio

- Pesi fissati dal MIUR per la determinazione del FFO 2011
- [allegato_1.pdf](#)

- Esercizio

- Il manager dell'ospedale B vi chiede di determinare un insieme di pesi che portino B ad avere la stessa produttività di A

Data Envelopment Analysis (DEA)

- La DEA assume come valutazione di efficienza (relativa) di ciascuna unità
- il rapporto tra la valutazione di efficienza assoluta (produttività) dell'unità stessa e quella dell'unità più efficiente, **quando queste valutazioni sono ottenute adoperando i pesi più convenienti per l'unità in questione**, cioè quelli che ne rendono più elevata l'efficienza relativa.

DEA (I)

- A ciascuna unità viene concessa la libertà di scegliersi i pesi che la mettono nella luce migliore, purché naturalmente gli stessi pesi vengano adoperati per valutare anche tutte le altre unità ai fini della determinazione della sua efficienza relativa.
- Ne consegue che la determinazione dell'efficienza relativa di unità diverse è riferita a pesi in generale diversi.

DEA (II)

- Con qualche approssimazione (e imprecisione) lo spirito della DEA è dunque il seguente: lasciamo ad ogni unità la massima libertà nella scelta dei pesi, in modo da mettersi nella luce migliore, e vediamo se in queste condizioni così favorevoli il valore di efficienza relativa raggiunge il massimo (100%).
- Se non raggiunge il massimo, ciò avviene perché per qualunque scelta dei pesi c'è sempre (almeno) un'altra unità che riesce a produrre di più a parità di risorse, o a consumare meno risorse a parità di risultati.

DEA (III)

- La determinazione di tali pesi, per ciascuna unità da valutare, può essere effettuata in modo oggettivo risolvendo un facile problema di programmazione lineare.

DEA – Riassunto (I)

- ciascuna unità fa la propria valutazione;
- usando i pesi più convenienti dal suo punto di vista, che cioè rendono massima la propria efficienza relativa;
- prendiamo come misura di efficienza di ciascuna unità il rapporto che essa ha determinato per sé.

DEA – Riassunto (II)

- facile e flessibile, concettualmente e operativamente
- si basa su concetti e tecniche di Ricerca Operativa
 - Programmazione Lineare
- esiste una vastissima letteratura
 - valutazione di servizi
 - <http://www.scopus.com>
- Primo articolo: Charnes, Cooper and Rhodes, 1978

Modello CCR

Charnes, Cooper, Rhodes (1978)

- L'efficienza assoluta della generica DMU viene valutata come rapporto tra combinazioni lineari dei risultati e delle risorse:

$$P_k = \frac{u_1 \cdot O_{1k} + u_2 \cdot O_{2k} + \dots + u_M \cdot O_{Mk}}{v_1 \cdot I_{1k} + v_2 \cdot I_{2k} + \dots + v_N \cdot I_{Nk}}$$

- Le variabili sono i pesi;
- Le unità decisionali possono scegliere i vettori di pesi che meglio le mettono in luce rispetto alle altre.

Modello CCR – Formulazione LP (I)

Dati	K	# unità decisionali (UD) $k = 1, \dots, K$
	N	# input $i = 1, \dots, N$
	M	# output $j = 1, \dots, M$
	O_{jk}	livello osservato di output j dall'UD k
	I_{ik}	livello osservato di input i dall'UD k

Variabili decisionali

$v_i \geq 0$ peso dell'input i

$u_j \geq 0$ peso dell'output j

P_k efficienza assoluta della DMU k

$$P_k = \frac{\sum_{j=1}^M u_j O_{jk}}{\sum_{i=1}^N v_i I_{ik}}$$

Modello CCR – Formulazione LP (II)

- Sia $P^* = \max_k P_k$

e $E_k = \frac{P_k}{P^*} \quad \forall k$

- Si vogliono determinare i valori dei pesi u e v che rendono E_k massima
- Per definizione di E_k si ha che $0 \leq E_k \leq 1$

Modello CCR – Formulazione LP (III)

- Per l'unità 0 si vogliono quindi determinare i pesi u e v soluzioni del seguente problema **PR1**

$$\begin{array}{llll} \max & E_0 & & \\ & u, v & & \\ \text{s.t.} & E_k & \leq & 1 \quad \forall k \\ & u & \geq & 0 \\ & v & \geq & 0 \end{array}$$

Modello CCR – Formulazione LP (IV)

- PR1 non è semplice da risolvere. Fortemente non lineare

$$\begin{array}{ll}
 \max_{u,v} & P_0 \\
 & \max_k P_k \\
 \text{s.t.} & P_k \leq 1 \quad \forall k \\
 & \max_k P_k \\
 & u \geq 0 \\
 & v \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \max_{u,v} & \frac{\sum_{j=1}^M u_j O_{j0}}{\sum_{i=1}^N v_i I_{i0}} \\
 & \max_k \frac{\sum_{j=1}^M u_j O_{jk}}{\sum_{i=1}^N v_i I_{ik}} \\
 \text{s.t.} & \frac{\sum_{j=1}^M u_j O_{jk}}{\sum_{i=1}^N v_i I_{ik}} \leq 1 \quad \forall k \\
 & \max_k \frac{\sum_{j=1}^M u_j O_{jk}}{\sum_{i=1}^N v_i I_{ik}} \\
 & u \geq 0 \\
 & v \geq 0
 \end{array}$$

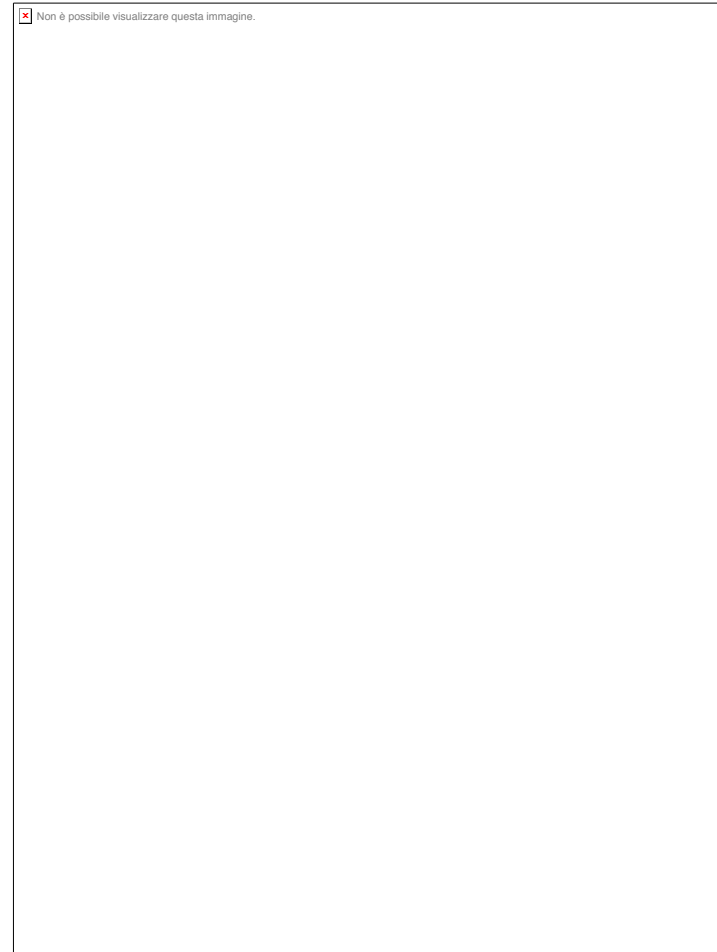
Modello CCR – Formulazione LP (V)

- Se però esistono dei pesi u e v tali che $P^* = 1$ allora **PR1** si riduce a **PR2**

$$\begin{array}{ll} \max_{u,v} & P_0 \\ \text{s.t.} & P_k \leq 1 \quad \forall k \\ & u \geq 0 \\ & v \geq 0 \end{array}$$

Modello CCR – Formulazione LP (VI)

$$\begin{array}{ll} \max & P_0 \\ & u, v \\ \text{s.t.} & P_k \leq 1 \quad \forall k \\ & u \geq 0 \\ & v \geq 0 \end{array}$$



Modello CCR – Formulazione LP (VII)

Funzione obiettivo:
$$\max_{u,v} P_0 = \frac{u_1 \cdot O_{10} + u_2 \cdot O_{20} + \dots + u_M \cdot O_{M0}}{v_1 \cdot I_{10} + v_2 \cdot I_{20} + \dots + v_N \cdot I_{N0}}$$

Vincoli:
$$\frac{u_1 \cdot O_{1k} + u_2 \cdot O_{2k} + \dots + u_M \cdot O_{Mk}}{v_1 \cdot I_{1k} + v_2 \cdot I_{2k} + \dots + v_N \cdot I_{Nk}} \leq 1 \quad \forall k \in [1..K]$$

$$v_1, v_2, \dots, v_N \geq 0$$

$$u_1, u_2, \dots, u_M \geq 0$$

Modello CCR – Formulazione LP (VIII)

- Non si perde in generalità se si normalizza a 1 la somma pesata degli input dell'unità in esame:
 - NB Non tutti i v_i possono essere nulli
- Poiché entrambi i termini sono non negativi, PR2 può essere formulato come un problema di programmazione lineare continua

$$\sum_{i=1}^N v_i I_{i0} = 1$$

$$\sum_{i=1}^N v_i I_{ik} \quad \sum_{j=1}^M u_j O_{jk}$$

Modello CCR – Formulazione LP (IX)

$$\max \sum_{j=1}^M u_j O_{j0}$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^N v_i I_{i0} = 1$$

$$\sum_{j=1}^M u_j O_{jk} \leq \sum_{i=1}^N v_i I_{ik}, \quad k = 1, \dots, K$$

$$u_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, M$$

$$v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N$$

Risoluzione CCR

- CCR può essere risolto con un qualunque risolutore di programmazione lineare continua
 - Cplex, XPress-MP, Gurobi
 - <https://community.fico.com/download.jspa>
- C' è il package 'benchmarking' in R
 - <http://www.r-project.org/>

DEA CCR con 2 Input e 2 Output

	I1	I2	O1	O2	E1	E2	CCR
A	20	151	100	90	1.00	0.68	1.00
B	19	131	150	50	0.90	1.00	1.00
C	25	160	160	55	0.77	0.87	0.88
D	27	168	180	72	0.89	0.95	1.00
E	22	158	94	66	0.74	0.58	0.76
F	55	255	230	90	0.64	0.79	0.84
G	33	235	220	88	0.82	0.83	0.90
H	31	206	152	80	0.74	0.68	0.80
I	30	244	190	100	0.84	0.72	0.96
J	50	268	250	100	0.72	0.82	0.87
K	53	306	260	147	0.83	0.79	0.96
L	38	284	250	120	0.87	0.80	0.96

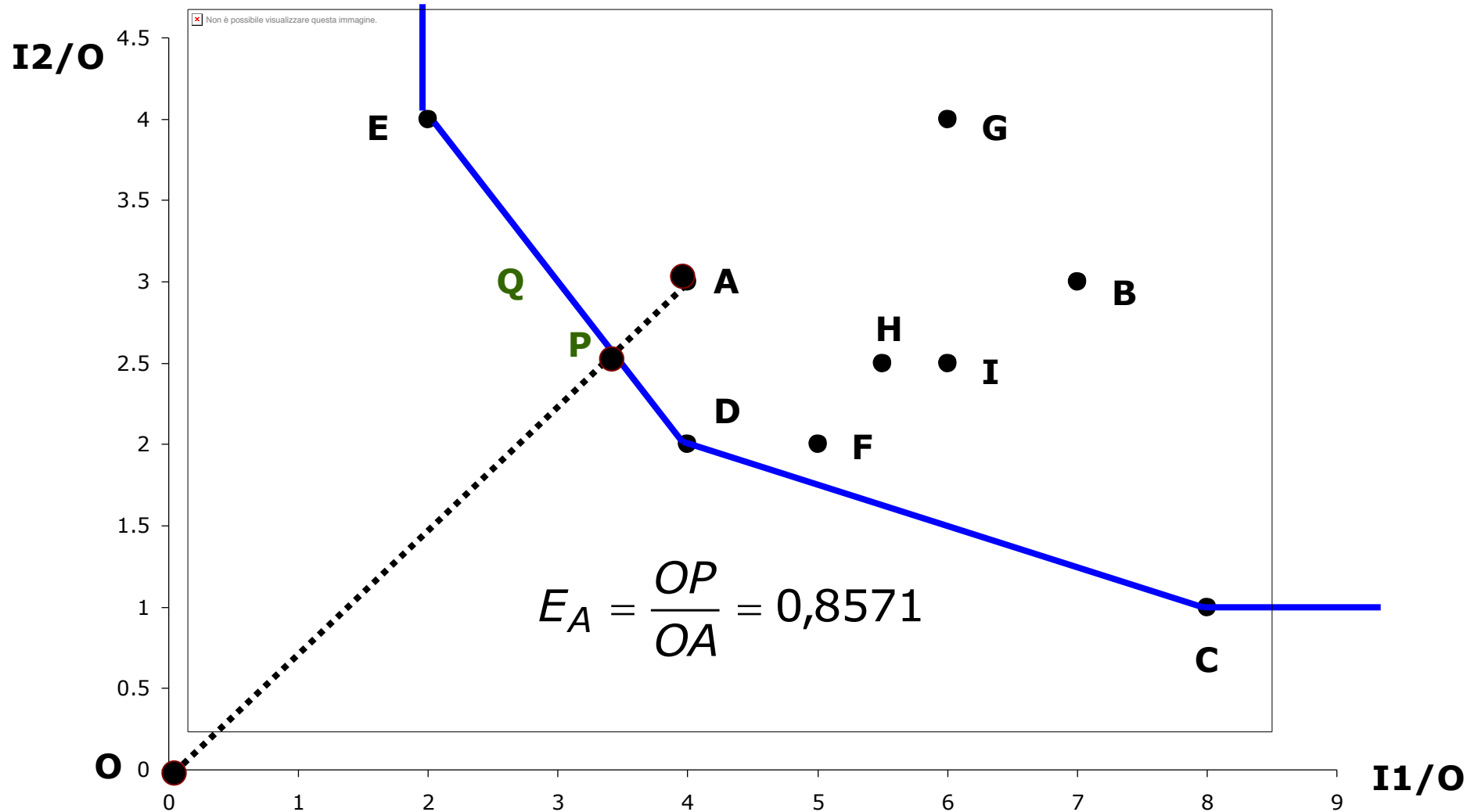
DEA CCR con 2 Input e 2 Output

	I1	I2	O1	O2	CCR	Peers	v1	v2	u1	u2
A	20	151	100	90	1.00	A	0.0059	0.0058	0.0034	0.0073
B	19	131	150	50	1.00	B	0.0000	0.0076	0.0067	0.0000
C	25	160	160	55	0.88	B;D	0.0000	0.0063	0.0036	0.0056
D	27	168	180	72	1.00	D	0.0000	0.0060	0.0034	0.0054
E	22	158	94	66	0.76	A;B;D	0.0056	0.0055	0.0032	0.0070
F	55	255	230	90	0.84	B;D	0.0000	0.0039	0.0022	0.0035
G	33	235	220	88	0.90	A;B	0.0303	0.0000	0.0025	0.0039
H	31	206	152	80	0.80	A;B;D	0.0043	0.0042	0.0025	0.0053
I	30	244	190	100	0.96	A;B	0.0333	0.0000	0.0028	0.0043
J	50	268	250	100	0.87	D	0.0000	0.0037	0.0021	0.0034
K	53	306	260	147	0.96	A;D	0.0000	0.0033	0.0015	0.0038
L	38	284	250	120	0.96	A;B	0.0263	0.0000	0.0022	0.0034

DEA CCR - 2 Input – 1 Output (I)

Unità	Impiegati (I1)	Area (I2)	Vendite (O)
A	4	3	1
B	7	3	1
C	8	1	1
D	4	2	1
E	2	4	1
F	5	2	1
G	6	2	1
H	5,5	2,5	1
I	6	2,5	1

DEA CCR – 2 Input e 1 Output (II)



DEA CCR – 2 Input e 1 Output (III)

	I1	I2	O	CCR	v1	v2	u	Peers	L_C	L_D	L_E
A	4	3	1	0.8571	0.1429	0.1429	0.8571	D, E	0.000	0.714	0.286
B	7	3	1	0.6316	0.0526	0.2105	0.6316	C, D	0.105	0.895	0.000
C	8	1	1	1.0000	0.0833	0.3333	1.0000	C	1.000	0.000	0.000
D	4	2	1	1.0000	0.0833	0.3333	1.0000	D	0.000	1.000	0.000
E	2	4	1	1.0000	0.1667	0.1667	1.0000	E	0.000	0.000	1.000
F	5	2	1	0.9231	0.0769	0.3077	0.9231	C, D	0.154	0.846	0.000
G	6	4	1	0.6000	0.1000	0.1000	0.6000	C, D	0.000	0.800	0.200
H	5.5	2.5	1	0.7742	0.0645	0.2581	0.7742	D, E	0.065	0.935	0.000
I	6	2.5	1	0.7500	0.0625	0.2500	0.7500	C, D	0.125	0.875	0.000

DEA CCR - Duale

Primale

$$\max_{u,v} \sum_{j=1}^M u_j O_{j0}$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^N v_i I_{i0} = 1$$

$$\sum_{j=1}^M u_j O_{jk} \leq \sum_{i=1}^N v_i I_{ik}, \quad k = 1, \dots, K$$

$$u_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, M$$

$$v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N$$

Duale

$$\min_{\lambda} \Phi_0$$

s.t.

$$\sum_{k=1}^K \lambda_k I_{ik} \leq \Phi_0 I_{i0} \quad i = 1, \dots, N$$

$$\sum_{k=1}^K \lambda_k O_{jk} \geq O_{j0} \quad j = 1, \dots, M$$

$$\lambda_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, K$$

$$\Phi_0 \text{ libera}$$

Analisi post-ottimalità

- λ_k è la variabile duale associata all'unità k
- $\lambda_k > 0$ implica che l'unità k è nell'insieme di riferimento (è un *peer*) per l'unità in esame O .
- Le variabili duali possono essere utilizzate per costruire un'unità efficiente e non osservata: la proiezione sulla frontiera efficiente di un'unità inefficiente

Esercizi

- Si determinino l'efficienza, i pesi ottimi, i peers e i coefficienti lambda per ogni unità, nei due casi

Unità	I	O
A	2	1
B	3	3
C	3	2
D	4	3
E	5	4
F	5	2
G	6	3
H	8	5

Unità	I1	I2	O
A	4	3	1
B	7	3	1
C	8	1	1
D	4	2	1
E	2	4	1
F	10	1	1

DEA – Overview

- Complesso di metodologie atte a valutare comparativamente quelle che vengono chiamate “unità decisionali”
- Ciascuna unità decisionale è descritta come una “scatola nera”, che assorbe risorse (*input*) e produce risultati (o prodotti, benefici, *output*)
- Le unità decisionali vengono chiamate Decision Making Units (DMU)
- I processi produttivi non vengono rappresentati
 - in prima approssimazione
 - diversi modelli tengono conto della struttura interna delle unità decisionali

Unità decisionali (1)



Analisi “dall’ esterno”, a “scatola nera”:

- ingressi: risorse;
- uscite: risultati, prodotti;
- genericamente: flussi.

Unità decisionali (2)

- Le DMU sono viste come entità che assorbono risorse per produrre risultati.
- È l'unità che decide (almeno in parte) come usare le sue risorse per produrre i suoi risultati (tecnologia).

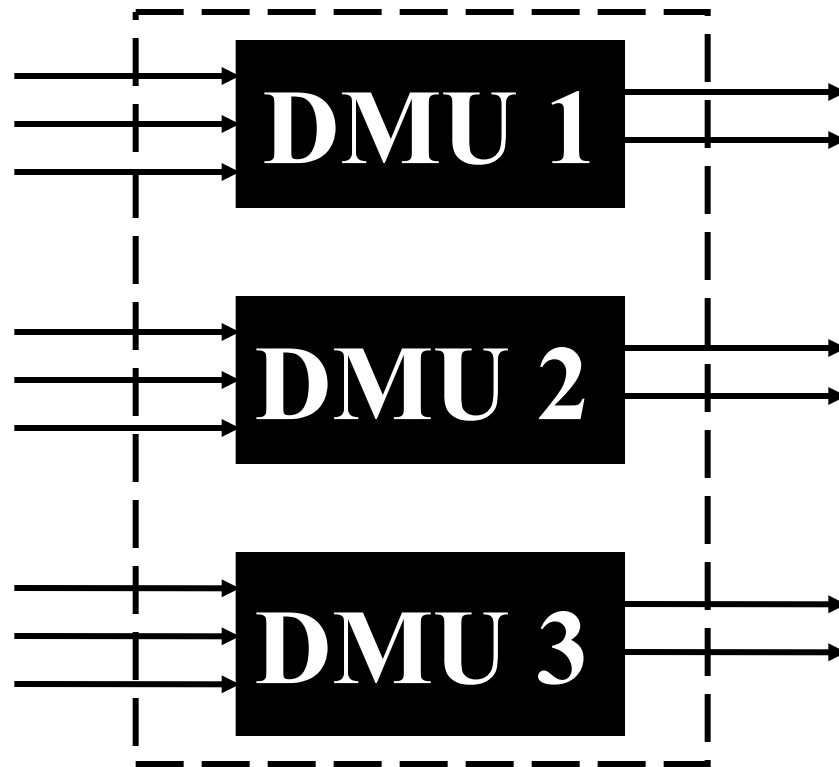
Caratteristiche delle DMU

- Le unità decisionali devono essere:
 - **omogenee**: usare gli stessi tipi di risorse per produrre gli stessi tipi di risultati (eventualmente in quantità nulla), in quantità che invece possono cambiare da unità a unità;
 - **indipendenti**: i flussi (risorse e prodotti) relativi a unità diverse sono completamente distinti, cosicché le unità lavorano “in parallelo”, e non è ammessa la possibilità che una ne alimenti un’altra
 - **autonome**: ciascuna unità ha la capacità di decidere autonomamente come impiegare le proprie risorse per produrre i propri risultati.

Indipendenza

Non ci sono flussi che passano da un' unità ad un' altra.

Modelli più avanzati permettono il passaggio di flussi da un' unità ad un' altra



Frontiera efficiente

- DEA usa la frontiera efficiente per definire la produttività di DMU con I/O multipli
- La frontiera definisce i trade-off efficienti (osservati) tra input and output all'interno di un insieme di DMU.
- La distanza della DMU rispetto alla distanza della frontiera definisce l'efficienza
- La proiezione sulla frontiera rappresenta una DMU efficiente di confronto (ipotetica)
- Differenze in input ed output tra DMU osservate e la loro proiezione sulla frontiera efficiente definiscono il “gap” produttivo (miglioramento potenziale)

Scelte iniziali

- Determinazione delle tipologie di flussi da considerare (quali I/O considerare)
- Ma ancora prima
 - determinazione delle unità da valutare
 - determinazione del tipo di modello da usare

Criteri di scelta

- In primo luogo è opportuno che le caratteristiche di omogeneità, indipendenza ed autonomia delle unità soggette a valutazione siano rispettate per quanto possibile.
- Anche se in alcune situazioni queste ipotesi possono essere soddisfatte solo in misura limitata, esse forniscono degli indirizzi di carattere generale per l'individuazione di unità e flussi.

Trade-off DMU

- Se da un lato avere unità molto disaggregate ne aumenta il numero, il che aumenta anche il potere discriminante del metodo a parità di flussi considerati dato che ciascuna unità subisce più confronti, d'altro lato avere molte unità di piccole dimensioni spesso riduce anche i valori dei flussi relativi a ciascuna, il che può produrre fenomeni di instabilità nel caso siano misurati da valori discreti.

The rule of thumb - DMU

- Al fine di ottenere un buon livello di discriminazione nel risultato di efficienza tra le unità, è buona norma avere un numero di unità decisionali da valutare pari ad almeno il doppio del prodotto tra numero di input e di output.
- È da tener presente che anche se, in generale, flussi altamente correlati sono ridondanti, introdurre un nuovo flusso può servire per mettere in risalto la specificità di qualche unità.

Risultati DEA (1)

Molteplicità delle informazioni che i modelli DEA sono in grado di fornire per ogni unità decisionale da valutare:

- **l'efficienza relativa**, che misura la capacità dell'unità di usare le risorse per produrre i risultati, in termini comparativi rispetto alle altre unità;
 - **i pesi** che l'unità attribuisce ai flussi in modo da rendere massima la propria efficienza relativa; essi indicano quali sono i punti di forza (con pesi elevati) e di debolezza (con pesi ridotti) dell'unità in esame; in altri termini, indicano le specialità di ciascuna unità rispetto alle altre;
-

Risultati DEA (2)

- per ogni unità non efficiente vengono individuate le unità che la dominano (i cosiddetti “**peers**”), che cioè sono migliori di essa, e la rendono non efficiente; queste unità dominanti possono costituire dei modelli di riferimento (**benchmark**) per migliorare le prestazioni delle unità non efficienti;
- sempre per ogni unità non efficiente, vengono anche indicati i livelli dei flussi che, se raggiunti, la renderebbero efficiente; questi livelli costituiscono gli obiettivi (**target**) che l’unità in esame dovrebbe porsi, in termini di riduzione delle risorse consumate a parità di risultati, o di aumento dei risultati a parità di risorse assorbite, per risultare efficiente quanto la più efficiente delle unità considerate.

Risultati DEA (3)

Riassumendo, per ciascuna unità:

- misura di efficienza relativa (es. %);
- pesi (virtuali = peso \times flusso): misurano l'importanza di ciascun flusso nella determinazione dell'efficienza;
- pari (*peers*): sono le unità che “dominano” (sono migliori di) l'unità in esame;
- obiettivi (*targets*): indicano i livelli dei flussi che renderebbero efficiente l'unità in esame.

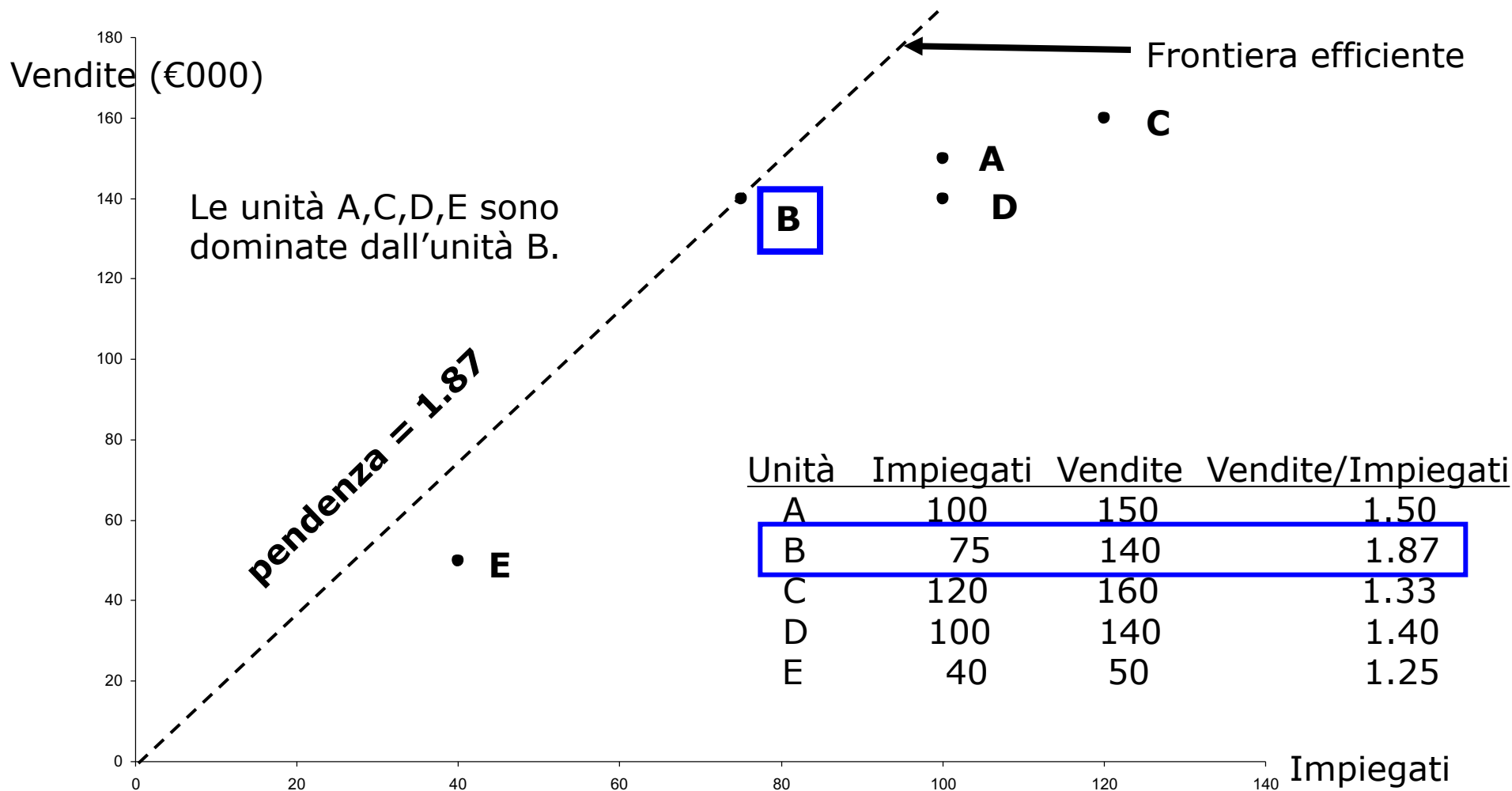
Progettazione analisi DEA

- #Input / #Output $K > 2(N+M)$
- “Ambivalenza” input e output – tutti dovrebbero essere relativamente importanti
- DMU simili in termini di obiettivi e tecnologie
- Fornisce informazioni esclusivamente sull’efficienza relativa
 - La scelta delle DMU influisce sul risultato
 - L’inclusione di un “global leader” è desiderabile
- Analisi con diverse combinazioni di I/O può essere necessario

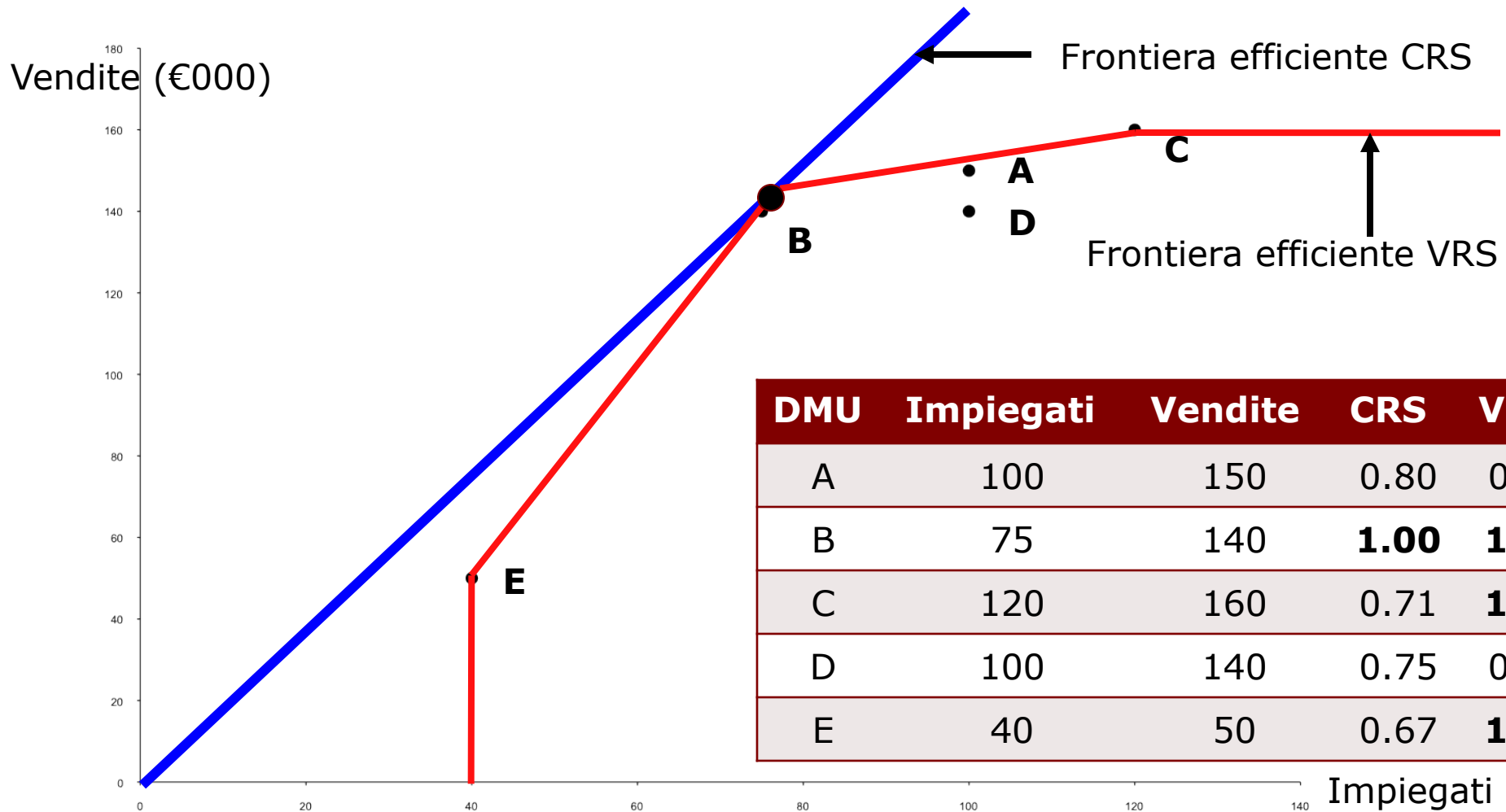
Tipi di modello

- Dei modelli DEA esistono diverse versioni, che si differenziano per specifiche caratteristiche quali, ad esempio, la possibilità di tener conto di economie o diseconomie di scala.
- È tuttavia da sottolineare che le diverse tipologie di modelli sono piuttosto complementari che alternative, e che quindi uno studio esauriente potrà convenientemente contemplarne diverse.
- È infine da tener presente che i modelli DEA ben si prestano anche a valutare l'evoluzione dinamica delle prestazioni

Constant Returns to Scale (CRS)



Variable Returns to Scale (VRS)



DEA VRS - Duale

Primale

$$\max_{u,v} \sum_{j=1}^M u_j O_{j0} + \omega_0$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^N v_i I_{i0} = 1$$

$$\sum_{j=1}^M u_j O_{jk} \leq \sum_{i=1}^N v_i I_{ik} - \omega_0, \quad k = 1, \dots, K$$

$$u_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, M$$

$$v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N$$

ω_0 libera

Duale

$$\min_{\lambda} \Phi_0$$

s.t.

$$\sum_{k=1}^K \lambda_k I_{ik} \leq \Phi_0 I_{i0} \quad i = 1, \dots, N$$

$$\sum_{k=1}^K \lambda_k O_{jk} \geq O_{j0} \quad j = 1, \dots, M$$

$$\sum_{k=1}^K \lambda_k = 1$$

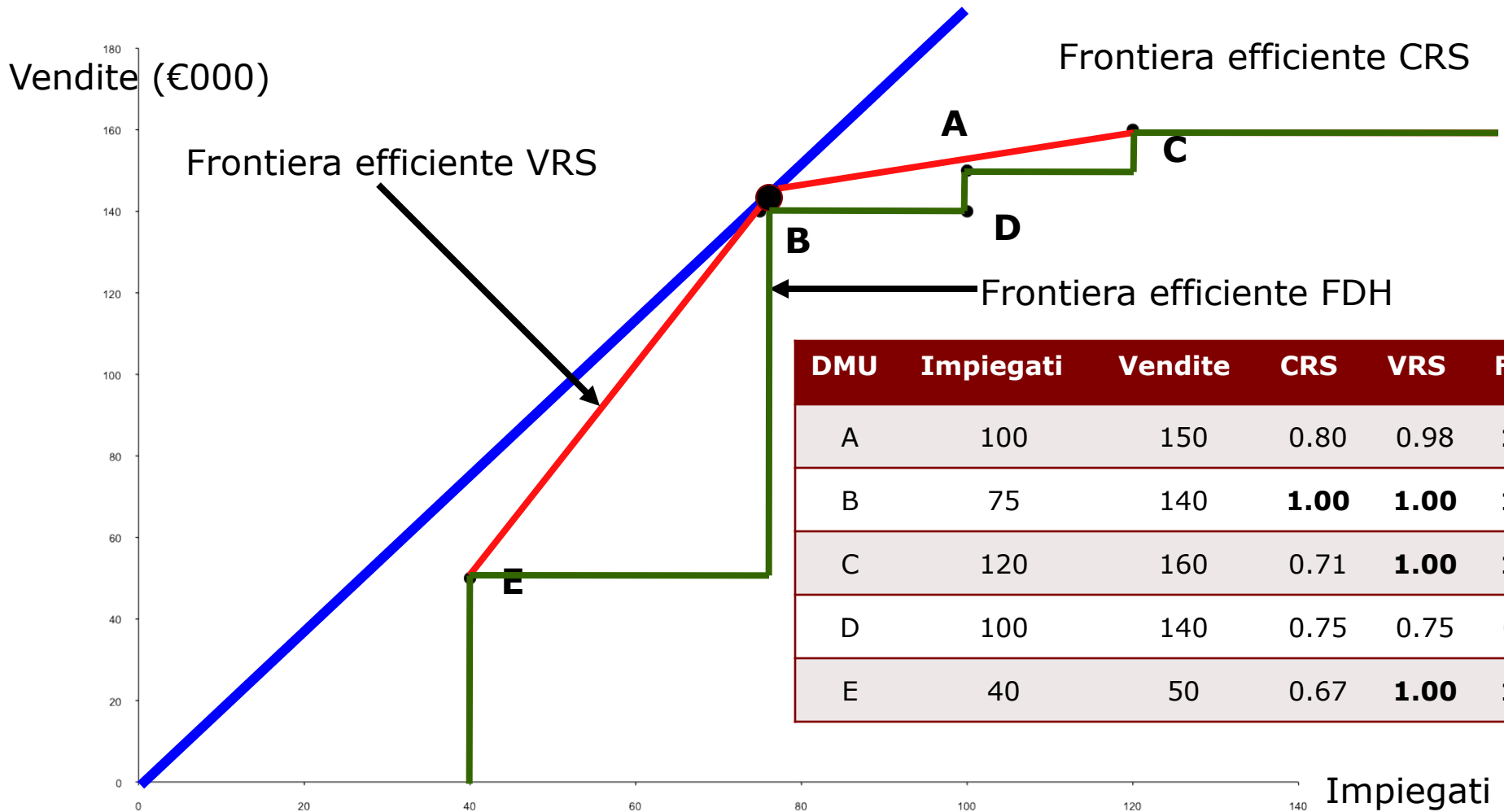
$$\lambda_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, K$$

Φ_0 libera

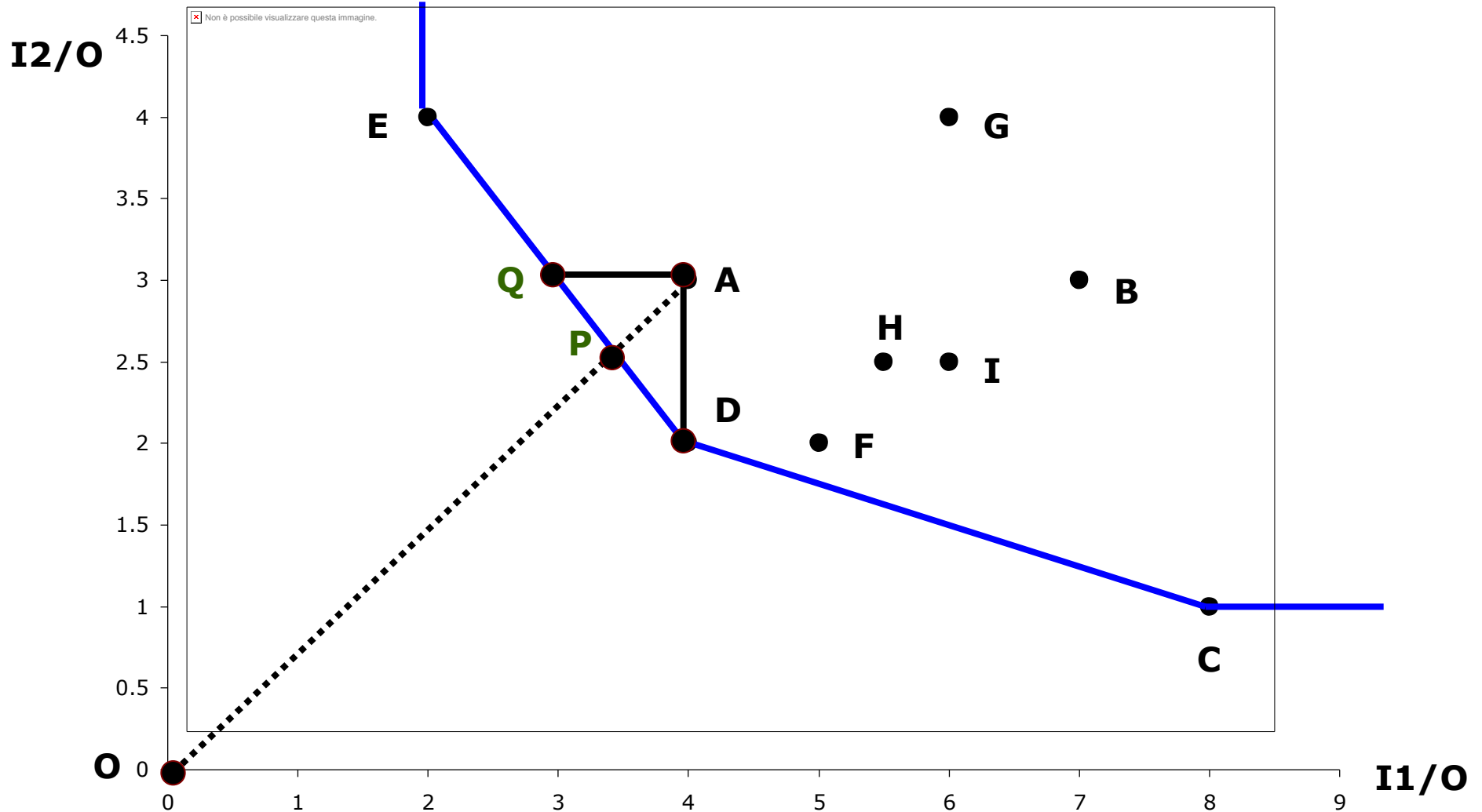
Rendimenti di scala - Terminologia

- Rendimenti di Scala Costanti
 - Constant Returns to Scale (CRS)
 - Modello di Charnes, Cooper & Rhodes (CCR)
- Rendimenti di Scala Variabili
 - Variable Returns to Scale (VRS)
 - Modello di Banker, Charnes & Cooper (BCC)

Free Disposal Hull (FDH)



Misure non radiali dell'efficienza



Estensioni

- Input e/o Output indesiderati
- Input e/o Output nulli o negativi
- Input e/o Output non controllabili
- Restrizioni sui pesi

Valutare l'assistenza sanitaria

- Diverse centinaia di studi per valutare l'efficienza produttiva nel campo dell'health-care sono stati effettuati negli ultimi 20 anni
 - Austria, Finlandia, Norvegia, Paesi Bassi, Regno Unito, Spagna, Svezia, USA
- Si è dimostrato che l'inefficienza tecnica è significativa

Metodi di valutazione dell'efficienza

- Stochastic Frontier Analysis (SFA)
- Data Envelopment Analysis (DEA)
- Modelli di Regressione

Vantaggi della DEA

- Modello non parametrico, cioè non si richiede la conoscenza a priori della forma della frontiera efficiente
 - Lineare, non lineare, log-lineare, ecc.
- Non media sulle prestazioni, ma fa riferimento alla best practice
- Si possono considerare simultaneamente più input e più output ed ottenere un unico indicatore numerico per DMU
- E' possibile identificare sotto-gruppi di DMU omogenei
 - Efficienti, non efficienti, più simili ad un certo peer, ecc.

Applicazioni

- Ospedali (Acute General Hospitals)
- Case di cura (Nursing Homes)
- Reparti o piccoli gruppi
 - Department-level o Team-level
- Medici (Pyhsician-Level)

Ospedali (I)

- Confronti non semplici
- Si confrontino gli ospedali A e B. A ottiene un punteggio DEA inferiore a B, ma:
- Ospedale A
 - accoglie più febbri di origine ignota
 - Effettua più trapianti, sostituzioni d'anca, bypass coronarici
- Ospedale B
 - Effettua più estrazioni di denti, parti senza complicanze, circoncisioni
- Il confronto è impari (sleale)

Ospedali (II)

- Analisi più accurate se si tiene conto della struttura interna della DMU (ospedale)
- Diversi studi DEA hanno considerato
 - Associazione tra la proprietà dell'ospedale (pubblico/privato) e l'efficienza
 - Variazioni di efficienza legate alla regione
 - Chiusura di ospedali rurali
 - Chiusura di ospedali in aree urbane
 - Aggregazioni di ospedali

Case di cura

- 195 case di cura (profit e no-profit), USA
 - 4 input: # ore per cura, servizi sociali, terapeuta, altro
 - 5 output: pazienti anziani non autosufficienti, pazienti che necessitano di un diverso grado di assistenza (limitata, intermedia, ecc.)
- 296 case di cura (1 input, 11 output), USA
- 292 case di cura (6 input, 4 output), NL
 - Physically disabled patients, psychogeriatrically disabled patients, full care patients, day care patients
- 461 case di cura (5 input, 2 output)

Reparti

- Unità di Ostetricia
- Farmacie
- Unità di cura intensiva
- Programmi per il prelievo di organi da trapiantare
 - 64 organizzazioni: 4 input, 2 output (# reni, #organi extra-rene)
- Centri per la dialisi
 - 791 centri negli USA: 4 input, 3 output

Medici

- Efficienza ‘clinica’ di 36 medici: 12 chirurghi e 24 internisti, tutti ospedalieri
 - 2 output
 - casi soddisfacenti (pazienti dimessi vivi e senza morbidità)
 - casi non soddisfacenti (pazienti deceduti in ospedale o con alta morbidità)
 - 2 input
 - Durata della degenza
 - Servizi ausiliari
 - 13 efficienti, i giovani sotto i 40 più efficienti
- 36 medici (1995); 326 medici: 8 input, 7 output (1997); 160 medici: 5 input, 3 output (1998)

Limiti della DEA

- La DEA non prevede errori random o fluttuazioni casuali, o ambigue delle misure
- Studi diversi utilizzano diversi insiemi di I/O
- Mancanza di stabilità nei risultati

Cause di inefficienza

- Una volta che i pazienti sono ammessi ad una struttura sanitaria, sono individuabili 3 processi principali
 - Visita/Diagnosi
 - Trattamento/Terapia
 - Guarigione/Convalescenza
- Capacità inutilizzata
 - Letti vuoti, personale di assistenza non utilizzata
- Sovrautilizzo
 - Esami non necessari, Raggi X, prolungamento degenza

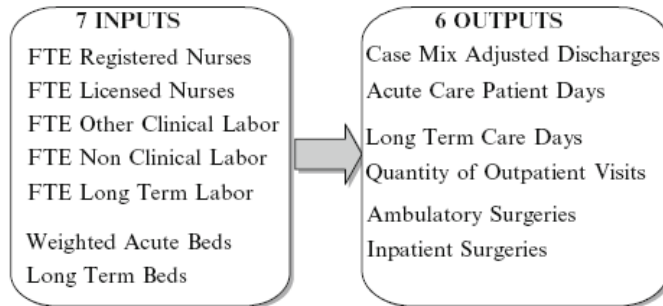
Efficienze in Health-Care

- Managerial Efficiency
 - Ottenere il massimo output dalle risorse allocate ad ogni servizio/reparto, date le tecnologie cliniche
- Clinical Efficiency
 - Decisioni del medico che utilizza la minima quantità di risorse per ottenere da pazienti con simili quadri diagnostici risultati di qualità simile

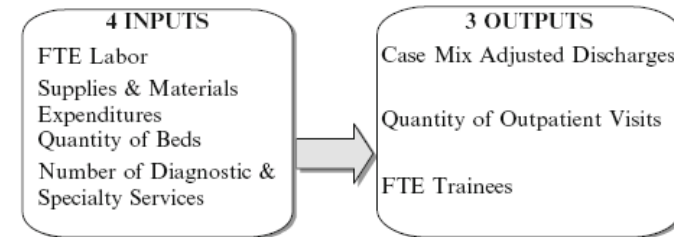
Managerial Efficiency (I)

- Produzione di servizi diagnostici e terapeutici, programmi di cura di qualità soddisfacente utilizzando la quantità minima di risorse
 - Decidere quanto personale avere per far fronte alle fluttuazioni dei ricoveri, sia giornalieri che stagionali
- Mettere a disposizione ciò di cui i medici hanno bisogno

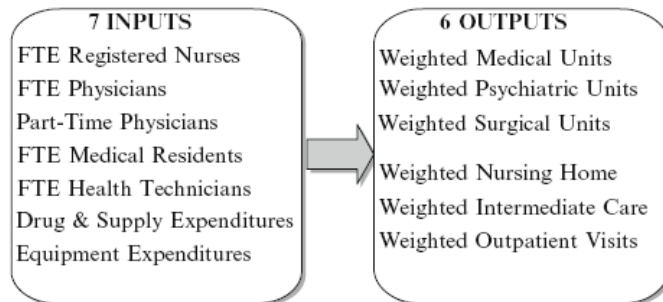
Managerial Efficiency (II)



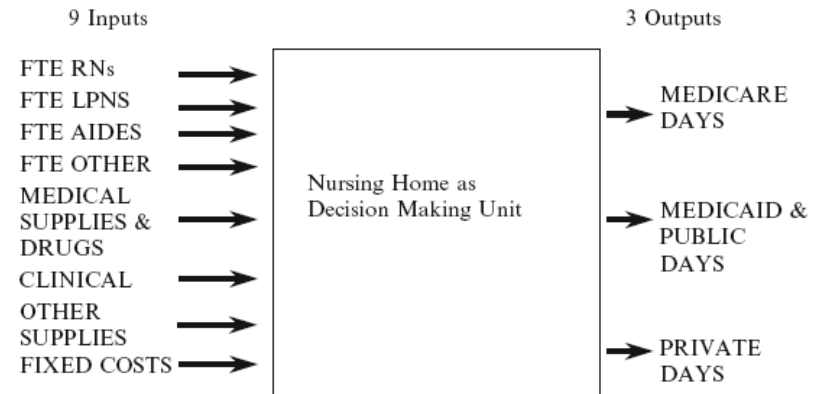
Variables in general acute hospital model (Burgess et al. 1998)



Variables in urban hospital model (Ozcan and Luke 1992)



Variables in a medical center study (Sexton et al. 1989)



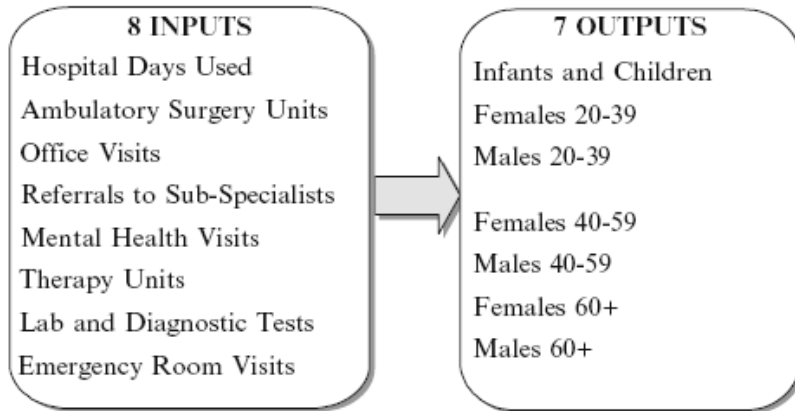
Chilingerian 2000

FTE: Full Time Equivalent

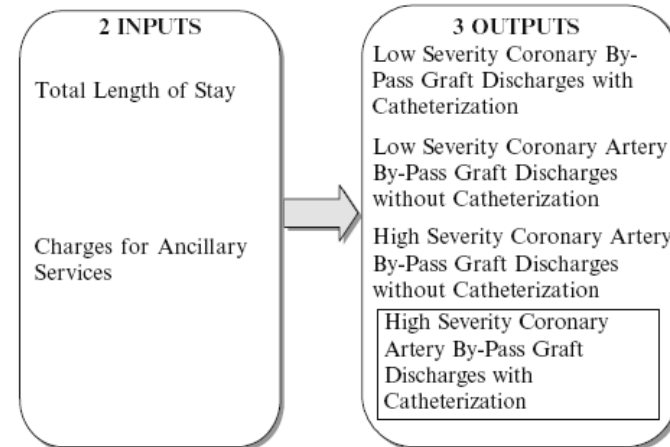
Clinical Efficiency (I)

- Il comportamento del medico è molto importante
 - 80-90% delle spese sono il risultato di decisioni dei medici
- Un medico è inefficiente se utilizza un quantità eccessiva di risorse in confronto a quanto fanno i suoi colleghi che hanno un numero simile di pazienti per numero e tipologia

Clinical Efficiency (II)



Variables in a primary care physician study (Chilingirian and Sherman 1997)



Variables in a cardiac surgeon model of DRG 106 and 107 (Chilingirian et al. 2002)

8 passi per costruire un modello DEA

1. Identificazione del problema e obiettivi della ricerca
 - Non studiare solo ciò di cui si hanno i dati
2. Modello concettuale del processo di produzione di assistenza sanitaria
 - Quale modello DEA utilizzare (CRS, VRS, ecc.)
3. Identificazione dei fattori che influenzano il processo di produzione di assistenza sanitaria
4. Selezione dei fattori
 - Raccolta dei dati

8 passi per costruire un modello DEA

5. Analisi dei fattori usando metodi statistici

- Correlazione tra input o tra output

6. Utilizzare diversi modelli DEA

- Diverse configurazioni I/O

7. Analizzare le efficienze DEA con metodi statistici

8. Discutere i risultati con i medici/direttori sanitari

In Italia (I)

- Ippoliti, R., Falavigna, G. [Efficiency of the medical care industry: Evidence from the Italian regional system](#) (2012) European Journal of Operational Research, 217 (3), pp. 643-652.
- Nuti, S., Daraio, C., Speroni, C., Vainieri, M. [Relationships between technical efficiency and the quality and costs of health care in Italy](#) (2011) International Journal for Quality in Health Care, 23 (3), pp. 324-330.
- Garavaglia, G., Lettieri, E., Agasisti, T., Lopez, S. [Efficiency and quality of care in nursing homes: An Italian case study](#) (2011) Health Care Management Science, 14 (1), pp. 22-35.
- Barbetta, G. P., Turati, G. and Zago, A. M. [Behavioral differences between public and private not-for-profit hospitals in the Italian national health service](#) (2007), Health Economics, 16: 75–96.

In Italia (II)

- Rebba V., Rizzi D., [Measuring Hospital Efficiency through Data Envelopment Analysis when Policy-makers' Preferences Matter. An Application to a Sample of Italian NHS Hospitals](#) (2007), *Politica Economica*, 3, pp. 233-258
- Cellini, R., Pignataro, G., Rizzo, I., [Competition and Efficiency in Health Care: An Analysis of the Italian Case](#) (2000), *International Tax and Public Finance*, 7(4), pp. 503-519.