da: Mauro Nacinovich
Elementi di geometria analitica

Introduzione

La geometria è stata forse il primo settore delle conoscenze umane che si sia organizzato come scienza nell'accezione che diamo oggi a questa parola. Fin dall'antichità essa ha costituito il modello ispiratore delle grandi sintesi scientifiche e filosofiche che si proponessero una spiegazione razionale dell'universo e del nostro posto al suo interno.

Anche per questo la geometria è stata partecipe dell'evoluzione del nostro pensiero e la sua storia può essere letta in rapporto dialettico essenziale con la cultura del mondo occidentale.

Fino all'avvento del pensiero critico di Kant, la geometria è considerata un capitolo della fisica: la descrizione dello spazio in cui si svolgono i fenomeni e le interazioni tra gli oggetti materiali. Nella Critica della Ragion Pura, lo spazio di Euclide diviene il *presupposto* di ogni conoscenza fisica. Anche se nella coscienza dei contemporanei non era scalfita l'idea che le verità della geometria fossero assolute e valide per la comprensione del mondo circostante, vi sono in questa nuova impostazione i semi di uno sviluppo che rivoluzionerà completamente la matematica nel periodo successivo. Il XIX secolo assiste alla nascita della geometria proiettiva e allo sviluppo delle geometrie non-Euclidee. La loro possibilità mette in discussione la matematica stessa come scienza, cioè come descrizione esatta del mondo fisico. L'esigenza realistica di intendere la matematica come descrizione del mondo in cui viviamo, è ben esemplificata dalle misure effettuate da Karl Friedrich Gauss (1777-1855) per stabilire quale delle possibili geometrie fosse quella *vera*. Felix Klein (1849-1925), nella sua celebre prolusione del 1872 ("*Una sintesi comparativa di recenti ricerche in geometria*"), nota come *Programma di Erlangen*, rende esplicita una nuova concezione della geometria, che influenzerà profondamente i contenuti e gli sviluppi di questa scienza e di tutta la matematica. In Klein le preoccupazioni realistiche di fissare un ambiente in cui si possa dare una geometria, convive con l'intuizione nuova che sposta l'indagine dagli *oggetti in sé* alle *relazioni* tra di essi. L'oggetto fondamentale della geometria diviene lo spazio proiettivo, dentro il quale una scelta del gruppo di trasformazioni che definisce la congruenza tra gli enti geometrici permette di ritrovare le diverse geometrie di Euclide, di Lobačewskij, di Riemann. Questa impostazione mette esplicitamente al centro il concetto di *gruppo di trasformazioni*. La rivoluzione di Herman Weyl (1885-1955), intorno alla metà del secolo XX, porterà queste intuizioni alle loro estreme conseguenze, scegliendo come punto di partenza il concetto di gruppo e creando lo spazio attraverso le sue *rappresentazioni*. Tale impostazione è resa possibile dalle indagini di Sophus Lie (1842-99) sui gruppi continui e dallo sviluppo della geometria differenziale, il cui studio, iniziato da Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-66) e proseguito tra gli altri da Luigi Bianchi (1856-1928) e da Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925), trova una mirabile sintesi nell'opera di Élie Cartan (1869-1951). In filosofia la rivoluzione di Weyl ha un parallelo nella fenomenologia di Husserl ed in fisica nello sviluppo della meccanica quantistica e della teoria della relatività generale: ciò che la nostra esperienza può cogliere non è l'essere in sé, ma le simmetrie della natura che si svelano nelle interazioni tra i diversi oggetti. Al termine di questo processo, la crisi della certezza e del realismo è superata dalla capacità della geometria di comprendere come i diversi oggetti della fisica, per le loro proprietà, che si offrono all'osservatore come una rete di simmetrie e interazioni, abbiano in sé, come elemento costitutivo, una loro propria geometria, che ne svela la fenomenologia intrinseca. I nuovi rapporti tra settori della geometria e della fisica portano quasi a un rovesciamento della prospettiva realistica iniziale, per cui ora la fisica potrebbe essere considerata un capitolo della geometria. Naturalmente, la storia non è finita e la scienza, pur coi suoi successi, partecipa della frammentazione del sapere e della coscienza che sono caratteristiche di questo momento in cui si consuma la nostra esperienza umana. Le ricerche che hanno occupato Albert Einstein (1879-1955) negli ultimi anni della sua vita indicano l'esigenza di una nuova grande sintesi, che per ora appare soltanto come un obiettivo cui tendere ed ispirarsi e che ancora una volta possiamo comprendere solo nelle sue relazioni con la cultura e la società cui apparteniamo sia noi che il nostro lavoro di matematici.

Lo studio della geometria nelle scuole italiane si basa sugli Elementi di Euclide (300 a.C.): sistema assiomatico-deduttivo basato su enti primitivi: punto, retta, piano, appartenenza ... Fu poi riformulata da David Hilbert (fine '800). In tale ambito si può introdurre la nozione di vettore: applicato o libero. Questo ha portato alla nozione di spazio vettoriale astratto e all'algebra lineare: nata nel '900, sta alla base di tutta la matematica.

<u>Vettori dello spazio ordinario.</u>

a) <u>Vettore applicato</u> è un segmento orientato, ha punto iniziale, o di applicazione, e punto finale; può essere pensato come coppia ordinata di punti del piano o dello spazio: (A,B)

Ha una lunghezza, se è stata fissata un'unità di misura, e se la lunghezza è $\neq 0$ ha direzione e verso.

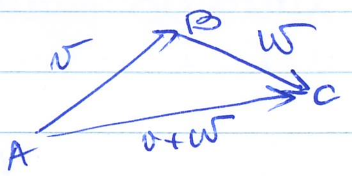
b) <u>Vettore libero</u> è una classe di equivalenza di vettori applicati per la relazione di equipollenza secondo cui 2 vettori sono equipollenti se hanno la stessa direzione, lunghezza, verso (~~muovendo~~ stanno su rette parallele e muovendo la retta dell'uno parallelamente a se stessa è possibile sovrapporlo all'altro). Un vettore libero individuato dalla coppia (A,B) si denota $\overrightarrow{AB}$ o $B-A$.

Vettore libero = vettore geometrico = vettore

Ogni vettore ha uno e un solo rappresentante applicato in A, punto fissato. Esiste il vettore nullo $\overrightarrow{AA}$ $(= A - A)$ $\forall A$.

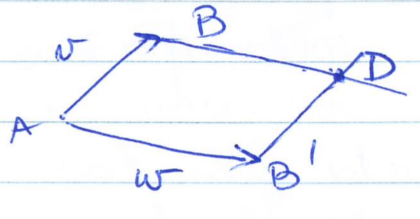
Si può def. la <u>somma</u> di 2 vettori:

se $v = \overrightarrow{AB}$, $w = \overrightarrow{BC}$, si pone $v + w = \overrightarrow{AC}$.

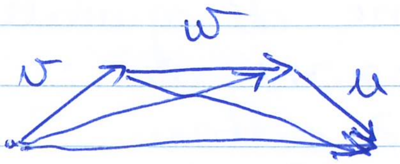


Se $v = \overrightarrow{AB}$ e $w = \overrightarrow{AB'}$, allora $v + w = \overrightarrow{AD}$

dove D è il 4° vertice del parallelogramma di lati AB e AB':



La somma di vettori (liberi) verifica la proprietà associativa: $(v+w)+u = v+(w+u)$:



Verifico anche la prop commutativa: immediato se si usa la regola del parallelogramma.

Si può def. ~~[illegible]~~ il prodotto di un numero reale $\lambda \in \mathbb{R}$ per un vettore v: λv: ha la direzione di v, lunghezza pari a $|\lambda|$ (lunghezza di v), verso concorde o discorde con v a seconda che $\lambda > 0$ o $\lambda < 0$.

L'insieme dei vettori liberi con queste due operazioni ha struttura di spazio vettoriale reale (vettori del piano o dello spazio).

L'algebra lineare nasce da questo esempio e dallo studio dei sistemi di equazioni lineari.

Successivamente la geometria è stata rifondata, a partire dalla nozione di vettore, facendo uso dell'algebra lineare, in dimensione qualunque su un campo qualunque.

Acquisita l'algebra lineare, si costruisce la geometria affine, termine introdotto da Eulero (1748). Non ci sono nozioni di tipo metrico quali distanze e angoli, ma parallelismo. Successivamente si introducono le nozioni di tipo metrico, a partire da uno spazio vettoriale reale con un prodotto scalare sp. vett. eucl. $\Rightarrow$ spazi euclidei.

Si può lavorare anche su $\mathbb{C}$, con prodotto scalare (hermitiano), sp. vett. unitario

Altri tipi di geometria: topologia, geometria proiettiva, geometrie non euclidee.