Spazi affini.

È la prima nozione che generalizza quella di spazio ordinario (di Euclide). Lo spazio affine può essere considerato come l'oggetto geometrico corrispondente allo spazio vettoriale. Se si identificano i vettori con i punti di un insieme, il vettore nullo è un punto speciale. In uno spazio affine invece tutti i punti sono equivalenti.

Primo esempio di sp. affine: soluzioni di un sistema lineare.

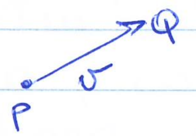
Def. Dato V, K-spazio vettoriale con K campo qualunque, di dimensione qualunque, uno spazio affine su V è un insieme $\neq \emptyset$ A, i cui elementi sono detti punti, con una fissata applicazione

$$A \times A \longrightarrow V$$
$$(P,Q) \longrightarrow \overrightarrow{PQ} = Q - P$$

vettore di punto iniziale P e punto finale Q

in modo che siano soddisfatti i 2 assiomi:

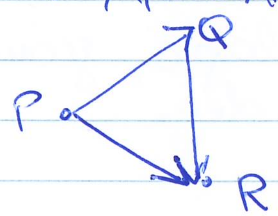
SA1: $\forall P \in A, \forall v \in V \ \exists! \, Q \in A$ t.c. $v = \overrightarrow{PQ}$



(il vettore v può essere applicato in ogni punto P; l'appl.
$$A \longrightarrow V$$
$$Q \longrightarrow \overrightarrow{PQ}$$
fissato P è biettiva)

SA2: relazione di Chasles

$\forall P,Q,R \in A$ si ha $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ (ovvia $(Q-P)+(R-Q) = R-P$)



L'insieme A acquista struttura di sp. affine assegnando l'applicazione.
Lo sp. aff. si dice reale se $K = \mathbb{R}$, complesso se $K = \mathbb{C}$.

Oss. 1) SA2 implica $\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP}$, prendendo $P = Q = R$. Quindi il vettore $v = \overrightarrow{PP}$ verifica la relazione $v + v = v$, da cui segue $v = 0$; quindi $\forall P \in A$ $\overrightarrow{PP}$ è il vettore nullo.

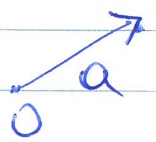
2) SA2 implica anche $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = 0$, prendendo $R = P$. Dunque $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$.

3) Su uno stesso insieme posso avere diverse strutture di spazio affine.

Dimensione

Supp. d'ora in poi $\dim V = n$ finita. Si pone $\dim A = \dim V$. Si parla di retta affine se $\dim A = 1$, piano affine se $\dim A = 2$.

Esempi 1) Piano e spazio "ordinario".
2) $A = V$, V sp. vett. qualunque.
Presi $a, b \in V = A$, def $\overrightarrow{ab} = b - a$.
Dunque SA1 dice: $\forall a \in V$ $\forall v \in V$ $\exists!\, b \in V$ t.c. $\overrightarrow{ab} = b - a = v$. Infatti $b = v + a$.
SA2: $(b - a) + (c - b) = c - a$ per le prop. assoc. e commutativa in V.
Gli elem. di V sono visti sia come vettori sia come punti. Es. in $\mathbb{R}^2$:



Questo sp. affine naturale

su V si denota $A(V)$ o V_a.
In particolare $A(K^n) = A^n(K) = A^n_K$ sp. affine numerico su K di dim. n. I suoi punti sono n-uple di elem. di K.
Su $\mathbb{R}$: $A^2(\mathbb{R}), A^3(\mathbb{R})$ ...

$(0, \dots, 0)$ → vettore nullo, → punto origine

Prop. 1 Sia A uno sp. aff. su V. Allora A come insieme è in biezione con V.
Dim. è la traduzione di SA 1, $\forall$ $P \in A$ ho la biezione

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow V \\ Q &\longrightarrow \overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

~~In parti~~ C'è una biezione $\forall$ P fissato, pensato come punto di applicazione dei vettori: non è canonica.

Traslazioni

I vettori di V possono essere interpretati come traslazioni di A. Se A è sp. aff. su V, def.

$t: A \times V \longrightarrow A$

$(P, v) \longrightarrow P + v = t(P,v)$: unico punto Q t.c. $v = \overrightarrow{PQ}$

$P + v = Q \iff v = Q - P$

t è ben def. per SA 1. $t(P,v)$ è il punto finale di v applicato in P. $P+v$ è solo una scrittura.
t è l'azione di V su A per traslazione.

Da SA1 e SA2 seguono le seg. prop. di t:
T1) $(P+v)+w = P+(v+w)$, $P+0 = P$;
T2) $\forall P, Q \in A$ $\exists ! v$ t.c. $Q = P + v$.
Infatti:

1) se $P+v=Q$, $\overset{(P+v)+w)}{Q}+w=R \implies v=\overrightarrow{PQ}$, $w=\overrightarrow{QR}$
e allora per Chasles $v+w=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$ e
quindi $R=P+(v+w)$. Inoltre $\overrightarrow{PP}=0$ $\forall P$.

2) Fissato P $\begin{aligned} A &\longrightarrow V \\ Q &\longrightarrow \overrightarrow{PQ} \end{aligned}$ è biettiva, dunque esiste l'appl. inversa: $\forall v$, $\exists!\, Q$ t.c. $v=\overrightarrow{PQ}$
ovvia $Q=P+v$.

L'applicazione t è un primo esempio di azione del gruppo additivo di V su A.
In gen. azione di un gruppo G su un insieme A è un'operaz. esterna in A con operatori in G

$$\rho: G\times A \longrightarrow A \quad \text{t.c.}$$
$$(g,a) \longrightarrow ga$$

1) $1_G a = a$ $\forall a\in A$
2) $\forall g,h\in G$, $\forall a\in A$ $(gh)a=g(ha)$. } sono la T1)

L'az. di V su A è fedele e transitiva: T2).
Dare l'azione ρ equivale a dare un omom. di gruppi $\sigma: G \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,A)$ biezioni di A in A

$$g \longrightarrow \sigma(g): A \longrightarrow A$$
$$a \longrightarrow ga$$

Ogni vettore $v\in V$ definisce la <u>traslazione di vettore v</u> $t_v: A \longrightarrow A$

$$P \longrightarrow P+v=Q \quad \text{t.c. } \overrightarrow{PQ}=v.$$

Si ha ~~siccome~~ $\overrightarrow{QP}=-\overrightarrow{PQ}=-v \implies$ l'appl.
$t_{-v}: A \longrightarrow A$ è l'inversa di t_v:

$$Q \longrightarrow Q-v$$

$$t_{-v}(t_v(P)) = (P+v)-v = P+(v-v) = P+0 = P$$

Si può def. lo sp. affine a partire da t_v da σ.

$t_{v+w}=t_v\circ t_w=t_w\circ t_v$; $t_0=id_A$

Per fare i conti in uno spazio affine, ossia per fare geometria analitica, si introduce un sistema di coordinate.

Analogam.: $t_P : V \to A$ $v \to P+v$; la inversa $\vec{t_P} : A \to V$ di SA1
$Q \to \vec{PQ}$

Sistema di riferimento affine.

È dato da un punto $O \in A$ (origine del riferimento) e da una base di V: $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$.
$(O, e_1, \dots, e_n)$.

Dato $P \in A$, per associargli le sue coordinate in questo riferimento affine si considera il vettore $\vec{OP}$ e lo si scrive come comb. lin. dei vettori di $\mathcal{B}$ $\vec{OP} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.
Le coord. di P sono le coord. di $\vec{OP}$ nella base $\mathcal{B}$, $P(x_1, \dots, x_n)$.

Se $A(a_1, \dots, a_n)$, $B(b_1, \dots, b_n)$ allora $\vec{AB} = B - A$

$\vec{AO} + \vec{OB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ e perciò il vettore $\vec{AB}$ ha
$\overset{\shortparallel}{\vec{AB}}$
coordinate $(b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)$, com'è ragionevole che sia.

In $A^n(K)$ c'è il riferimento affine standard, in cui l'origine è $O = (0, \dots, 0)$ e $\mathcal{B}$ = base canonica. $P(x_1, \dots, x_n) \iff \vec{OP}(x_1, \dots, x_n)$.

Fissando un rif. affine in A su V, con $\dim A = n$, si ottiene una biezione

$$A \longleftrightarrow A^n(K)$$
$$P(x_1, \dots, x_n) \longleftrightarrow (x_1, \dots, x_n).$$

Sottospazi affini

$\mathbb{A}$ sp. affine su V
Siano dati $Q \in \mathbb{A}$, e $W \subseteq V$ sottosp. vettoriale.
Def. sottospazio affine di $\mathbb{A}$ passante per Q di giacitura o direzione W (o parallelo a W) è l'insieme $S = Q + W = \{ Q + w = t_w(Q) \mid w \in W \}$.
Osserviamo che $Q = Q + 0 \in S$.

Per es. se $W = (0)$, $Q + (0) = \{Q\}$: ogni punto è un sottospazio affine.
Proprietà
1) Al posto di Q, si può mettere qualunque punto di S, ossia se $Q' \in S$ allora $S = Q + W = Q' + W$.
Infatti se $Q' \in S$ $\exists\, w'$ t.c. $Q' = Q + w'$; allora $\overrightarrow{QQ'} = w' \in W$ e $\overrightarrow{Q'Q} = -w' \in W$ e $Q = Q' - w'$.
Prendo un qualunque punto di S:
$$Q + w = (Q' - w') + w \underset{(1)}{=} Q' + (w - w') \in Q' + W$$

Vicev. $Q' + w = (Q + w') + w = Q + (w' + w) \in Q + W = S$.
Ho fatto vedere la doppia inclusione.

2) Se $S = Q + W$, il sottosp. W è univocam. determinato.
Dim. Se $S = Q + W = Q + W'$,
se $w \in W \Rightarrow P = Q + w \in Q + W' \Rightarrow \exists\, w' \in W'$ t.c.
$P = Q + w = Q + w'$ ossia $\overrightarrow{QP} = w = w' \in W'$.
Oss. $W = \{ \overrightarrow{PQ} \mid P, Q \in S \}$

Analogam. l'inclusione opposta.

Allora si def. $\dim S = \dim W$, dimensione della sua giacitura.

- $\dim S = 0$ $\quad S = Q + (0) = \{Q\}$ punto
- $\dim S = 1$ $\quad S = Q + \langle w \rangle$ retta affine

  w si chiama vettore di direzione di S, è det. a meno di un fattore di prop. non nullo

  $P \in S \iff \exists\, \lambda \in K$ t.c. $P = Q + \lambda w$.
- $\dim S = 2$ $\quad$ piano affine
- $\dim S = n-1$ $\quad$ iperpiano affine, W iperp. vettor.
- $\dim S = n = \dim A \Rightarrow \dim W = \dim V \Rightarrow$

  $W = V \Rightarrow S = A$ (verificare!) $\quad P \in A \Rightarrow P = Q + \overrightarrow{QP}$

Esercizi 1) $S = P + W$ è sp. affine su W.

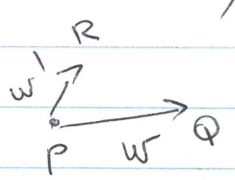
Basta verif. che è ben def. $\quad S \times S \longrightarrow W$

$(Q, R) \longrightarrow \overrightarrow{QR}$

(vedi oss. pag. preced.)

$Q = P + w, \quad R = P + w'$

$w = \overrightarrow{PQ}, \quad w' = \overrightarrow{PR}$



$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ} = w' - w \in W$

2) $A = A(V)$ sp. aff. su V con struttura naturale

Sia $S = a + W \subset V$.

Allora S è sottosp. vett. $\iff S = W \iff 0 \in S$.

Dim. se $0 \in S \Rightarrow S = 0 + W = W$ è vett.

Vicev. se S è sop. vett. $\Rightarrow 0 \in S \Rightarrow S = 0 + W = W$.

S è "W traslato": $S = t(Q, -)(W) = $ notaz. $= t_Q(W)$

Esempio

Dato un sist. lin. di m eq. in n incognite su K

$Ax = b$ $\quad A \quad m \times n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

È compatibile $\Leftrightarrow$ $rg A = rg(A \mid b) = r$.

Supposto che ciò sia verificato, l'ins. delle soluz. è $S = \bar{x} + W$, dove $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ è una soluz. qualunque, e $W = \{$ soluz. del sist. omog. $Ax = 0 \} = \ker L_A$

$L_A : K^n \xrightarrow{A} K^m$ rapp. da A risp. alle basi canoniche

Teor. della dimensione:

$\dim \ker L_A = n - r = \dim W = \dim S$.

sottosp. affine di K^n di giacitura W, di dim $n - r$.

Intersezione ~~Equazioni~~ di sottospazi affini.

Consideriamo una famiglia di sottospazi affini di A: $\{S_i\}_{i \in I}$, $S_i = Q_i + W_i$.

Prop. 2 Sia $S = \bigcap S_i$. Allora ci sono 2 casi:

$$S = \begin{cases} \emptyset & \text{es. rette parallele} \\ \text{sottosp. af. di giacitura } \bigcap_{i \in I} W_i \end{cases}$$

Dim. Se $S \neq \emptyset$, sia $Q \in \bigcap S_i$, dunque $S_i = Q + W_i, \forall i$.

$$S = \bigcap_{i \in I} (Q + W_i) = \bigcap t_Q(W_i) \underset{\substack{\downarrow \\ t_Q \text{ iniettiva}}}{=} t_Q\left(\bigcap W_i\right) = Q + \left(\bigcap W_i\right)$$

$\blacksquare$

Se ho 2 sottospazi:

$S = Q + W$

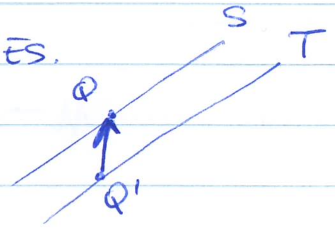
$T = Q' + W'$

$S \cap T =$ $\emptyset$ / sottosp. di giacitura $W \cap W'$

Quando posso essere sicuro che $S \cap T \neq \emptyset$?

Prop. 3 $S \cap T \neq \emptyset \iff Q - Q' \in W + W'$

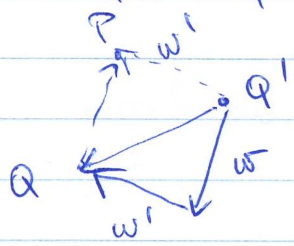
Es.



$W = W' \neq W + W'$ $\qquad$ $Q - Q'$ esce da W

Dim: Se $Q - Q' \in W + W' \Rightarrow \exists\, w \in W, w' \in W'$ t.c.

$\overrightarrow{Q'Q} = Q - Q' = w + w' \Rightarrow Q' + w' = Q - w \in S \cap T$.



(da verif.: sia $P = Q - w$, è l'unico punto t.c. $\overrightarrow{QP} = -w$ ossia $\overrightarrow{PQ} = w$, ma $\underset{w+w'}{\overrightarrow{Q'Q}} \underset{\text{Charles}}{=} \overrightarrow{Q'P} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{Q'P} + w$

e perciò $\overrightarrow{Q'P} = w'$ cioè $Q' + w' = P$)

Viceversa se $\exists\, P = Q + w = Q' + w'$ con $w \in W, w' \in W'$, allora $P - Q = w$, $P - Q' = w'$ e

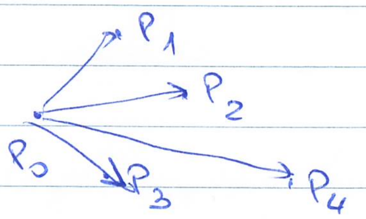
$Q - Q' \underset{\text{Charles}}{=} (Q - P) + (P - Q') = -w + w' \in W + W'$. ∎

Cor. Se $W+W'=V$, certamente $S\cap T\neq\emptyset$.

Sottospazio generato

Dato un sottoinsieme $T\subseteq A$, $[T]$ è l'$\cap$ dei sottospazi affini contenenti T.
Per es. $[P_0,P_1,\dots,P_m]$ o $\overline{P_0P_1\dots P_m}$.

Prop. 4. $[P_0,\dots,P_m] = P_0 + \underbrace{\langle \overrightarrow{P_0P_1},\dots,\overrightarrow{P_0P_m}\rangle}_{\text{giacitura}}$



Dim. Il sottosp. $P_0+\langle \overrightarrow{P_0P_1},\dots,\overrightarrow{P_0P_m}\rangle$ contiene tutti i punti $P_0,\dots,P_m$.

Viceversa se $S=Q+W\supseteq\{P_0,\dots,P_m\}$ si ha anche

$S=P_0+W$ e perciò $\forall j\neq 0$ $P_j=P_0+w_j$, con $w_j\in W$ opportuno vettore.

Ma allora $\overrightarrow{P_0P_j}=w_j$ e quindi $\langle \overrightarrow{P_0P_1},\dots,\overrightarrow{P_0P_m}\rangle\subseteq W$ e si ha l'inclusione opposta $P_0+\langle \overrightarrow{P_0P_1},\dots,\overrightarrow{P_0P_m}\rangle\subseteq S$.

Cor. $\dim \overline{P_0\dots P_m}\le m$.
Se vale l'uguaglianza $P_0\dots P_m$ sono detti <u>affinemente indipendenti</u>.

Per es. 2 punti sono affinem. indip. se $\overline{P_0P_1}$ ha dim 1 $\iff P_0\neq P_1$.

3 punti se dim$[P_0, P_1, P_2] = 2$; altrim. allineati, ecc.

Equazioni param. di sottospazi affini.

Se $S = Q + W$, con dim S = dim $W = s$, fissata una base di W: $w_1, \dots, w_s$, si ha:
$P \in S \iff \exists t_1, \dots, t_s \in K$ t.c. $P = Q + t_1 w_1 + \dots + t_s w_s$.
Si ottengono tutti i punti di S al variare degli parametri $t_1, \dots, t_s$.
Supp. fissato un rif. affine $(O, e_1, \dots, e_n)$, t.c. $Q(q_1, \dots, q_n)$, $w_i = w_{i1} e_1 + \dots + w_{in} e_n$, allora

$$P(x_1 \dots x_n) \in S \iff (x_1, \dots, x_n) - (q_1, \dots, q_n) = t_1(w_{11}, \dots, w_{1n}) + \dots + t_s(w_{s1}, \dots, w_{sn})$$

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + \dots + t_s w_{s1} \\ x_2 = q_2 + t_1 w_{12} + \dots + t_s w_{s2} \\ \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{1n} + \dots + t_s w_{sn} \end{cases}$$

0) equaz. param. di $\overline{P_0 \dots P_r}$

ES. 1) equaz. param. di una retta dato un punto e vettore di direzione, che genera la giacitura;
2) retta per 2 punti A, B $\quad L = A + \langle B - A \rangle$
$\overrightarrow{AB}$ ~~gen~~ è vettore di direzione.
3) piano per 3 punti A, B, C $\quad L = A + \langle B - A, C - A \rangle$

Equazioni cartesiane dei sottospazi vettoriali.
~~Fissato rif. affine $(O, e_1, \dots, e_n)$~~, $B(e_1 \dots e_n)$ base di V. Dato un sistema lineare omogeneo, in n incognite di rg r, le sue soluzioni

rappresentano un sottospazio $W \subseteq V$ di dim $n-r$.
Viceversa, se $W \subseteq V$ è un sottosp. di dim $n-r$, posso costruire un sist. lineare di rango r (non unico) il cui spazio di soluzioni sia W. Metodo pratico:
1) se W ha dim $n-1$, $W = \langle w_1, \dots, w_{n-1} \rangle$, osserviamo che $v \in W \iff w_1, \dots, w_{n-1}, v$ sono linearmente dipendenti $\iff$ la matrice $n \times n$ delle coordinate di $w_1, \dots, w_{n-1}, v$ ha det nullo. o V di dim 3 fissata una base
Es. $V = \mathbb{R}^3$, $W = \langle (1,2,3), (-4,0,5) \rangle$

$$v(x,y,z) \in W \iff \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$10x - 17y + 8z = 0$$

W è def. da una sola equazione.
2) se W ha dim s, $W = \langle w_1, \dots, w_s \rangle$ posso procedere in 2 modi:
a) completo $w_1, \dots, w_s$ a una base di V: $w_1, \dots, w_s v_{s+1} \dots v_n$ e ottengo W come intersezione di $n-s$ iperpiani:
$\langle w_1 \dots w_s, v_{s+1}, \dots, v_{n-1} \rangle$
$\langle \dots \dots v_{s+1} \dots v_{n-2}, v_n \rangle$
$\vdots$
$\langle \dots \dots, v_{s+2}, \dots, v_n \rangle$
Es. $V = \mathbb{R}^4$, $W = \langle \overset{w_1}{(1,3,-1,4)}, \overset{w_2}{(2,3,0,1)} \rangle$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

aggiungo e_1, e_2; e interseco i 2 iperpiani $\langle w_1, w_2, e_1 \rangle$
$\langle w_1, w_2, e_2 \rangle$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x_2 - 9x_3 - 3x_4 = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -x_1 + 7x_3 + 2x_4 = 0$$

b) Ovvero che $v \in W \iff$ la matrice ~~...~~ delle coord. di $w_1, \dots, w_s, v$ ha rango $< s+1$.

$$rg \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} < 3$$

Ottengo 4 equaz. lineari, ne bastano 2 lin. indip.

$$\begin{cases} +3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -9x_1 + 7x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Ogni equaz. equivale ad annullare una forma lineare su V $f: V \to K$, cioè descrive $\ker f$.

Equazioni cartesiane dei sottospazi affini.
Fissato un rif. affine $(O, e_1, \dots, e_n)$, un sist. lin. $Ax = b$ di rango r, A $m \times n$, rappres. il sottosp. affine $S = Q + W$, dove le coord. di Q sono una soluz. partic. del

sistema e W è il sottosp. dei vettori le cui coord. sono le soluz. del sist. omogeneo $Ax=0$.

Viceversa, dato $S = Q + W$, di dim s, posso costruire un sistema lineare di rg $n-s$, omogeneo, che rappresenta W; $Ax=0$ poi osservo che $P(x_1 \dots x_n) \in S \iff P-Q(x_1-q_1, \dots, x_n-q_n) \in W$

$\iff (x_1-q_1, \dots, x_n-q_n)$ è una soluz. del sist. omog., ossia $A\begin{pmatrix} x_1-q_1 \\ \vdots \\ x_n-q_n \end{pmatrix} = 0$

$Ax - Aq = 0$

<u>Es</u> a) In A^3 L passante per $(1,5,2)$ avente $w(2,-1,4)$ come vettore di direzione.

Equazioni di W in $\mathbb{R}^3$: $rg\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} < 2$

$W \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$

$L \begin{cases} (x_1-1) + 2(x_2-5) = 0 \\ 2(x_1-1) - (x_3-2) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 11 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$ intersez. di 2 piani

b) in A^3: piano π per 3 punti $P_0(1,2,-1)$, $P_1(4,0,1)$, $P_2(0,3,4)$. W è generato da $\overrightarrow{P_0P_1}(3,-2,2)$, $\overrightarrow{P_0P_2}(-1,1,5)$

$P(x_1,x_2,x_3) \in \pi \iff \overrightarrow{P_0P} \in \langle \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2} \rangle \iff$

$$\begin{vmatrix} x_1-1 & x_2-2 & x_3+1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Sottospazi paralleli

Dati 2 sottospazi affini di A, S, T di dimensione ≥ 1, di giaciture W, U, S, T si dicono <u>paralleli</u> se $W \subseteq U$ opp. $U \subseteq W$.
Se hanno la stessa dimensione ciò equivale a $W = U$.
In particolare può essere $S = T$ opp. $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$.
Es. 2 rette sono parallele se i loro vettori di direz. sono proporzionali.
<u>Oss.</u> La relaz. di parallelismo tra sottospazi non è transitiva per sottospazi di dimensione diverse: es. 2 rette parallele a uno stesso piano.

<u>Prop. 5</u> Supp. $S \parallel T$ e $\dim S \leq \dim T$.
Se $S \cap T \neq \emptyset \Rightarrow S \subseteq T$. Se inoltre $\dim S = \dim T$, allora $S = T$.
<u>Dim.</u> $S \cap T \neq \emptyset \Rightarrow S \cap T$ è un sottosp. aff. di giacitura $W \cap U$ (Prop. 2), ma $W \subseteq U$ e dunque $W \cap U = W$. Allora $S \cap T$ ha la stessa giacitura di S. Se $P \in S \cap T$:
$S \cap T = P + W = S$.

<u>Cor.</u> Dati un sottosp. affine $S \subseteq A$ e $P \in A$:
$\exists!$ sottosp. affine passante per P, parallelo e

della stessa dim di S. Se ce ne fossero 2 coinciderebbero (avrebbero stessa giacitura e un punto comune).

In partic. in A di dim 2 abbiamo l'esistenza e unicità della retta parallela a una retta data per un punto fissato: assioma di Playfair, equivalente al $\underline{V}$ postulato di Euclide.

$\underline{\text{Oss.}}$ Sia $A = A(V)$. Dato un sottospazio vettoriale $W \subseteq V$, consideriamo V/W: gli elementi sono i laterali di W in V; sono proprio i sottospazi affini di giacitura W di $A(V)$.

$\underline{\text{Def.}}$ due sottospazi S, T di dim ≥ 1 sono $\underline{\text{sghembi}}$ se $\underline{\text{non}}$ sono paralleli e ~~dim~~ $S \cap T = \emptyset$.
Dove esistono sottospazi sghembi e di che tipo?

Se $S \cap T \neq \emptyset$ $\dim S\cap T = \dim W \cap W' = \dim W + \dim W' - \dim(W+W') \geq$
Grassmann

$\geq \dim W + \dim W' - n$.
Inoltre $S \cap T \neq \emptyset \iff S = Q + W, T = Q' + W'$ e $\overrightarrow{QQ'} \in W + W'$.
In particolare se $W + W' = V$, allora $S \cap T \neq \emptyset$ di dim $\dim S + \dim T - n$
Per es., se H è un iperp. affine, e S non è

parallelo ad H, allora $W^{\perp}+W'=V$ e $H\cap S\neq\emptyset$.

Allora se dim $A=2$, 2 rette distinte o sono parallele o si incontrano in un punto.

Se dim $A=3$; piano π e L retta
- paralleli
  - $\pi\supseteq L$
  - $\pi\cap L=\emptyset$
- incidenti in un punto

; 2 piani π,π'
- paralleli
  - $\pi=\pi'$
  - $\pi\cap\pi'=\emptyset$
- $\pi\cap\pi'=$ retta

: 2 rette L,L'
- parallele
  - $L=L'$
  - $L\cap L'=\emptyset$
- non parallele
  - $L\cap L'=P$, $[L\cup L']=$ piano
  - $L\cap L'=\emptyset$ sghembe