Posizioni reciproche di sottospazi affini.

In un piano affino, due rette possono essere:

- parallele se hanno la stessa giacitura (direzione) $<$ coincidenti / disgiunte
- incidenti in un punto se hanno giaciture diverse.

Se le 2 rette hanno equazioni cartesiane:

$r: ax+by+c=0$

$r': a'x+b'y+c'=0$

$$r \parallel r' \iff \begin{matrix} ax+by=0 \\ a'x+b'y=0 \end{matrix}$$ sono equazioni proporzionali.

$$\iff \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0 \text{ ossia } rg\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} < 2.$$

Si ha poi $r=r'$ se anche $rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} < 2.$

Se $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$, si trova $r \cap r'$ risolvendo il sistema di Cramer:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}.$$

La ~~tua~~ soluzione è data da :

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} , \quad y = -\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} .$$

Se r, r' sono date mediante equazioni parametriche:

$$r \begin{cases} x = a_1 + t l \\ y = a_2 + t m \end{cases} \qquad r' \begin{cases} x = c_1 + t l' \\ y = c_2 + t m' \end{cases}$$

$v_r(l,m)$ vettore di direzione di r , $v_{r'}(l',m')$ vett. di dir. di r'

$r // r' \iff (l, m)$ è proporzionale a (l', m').

Il punto $r \cap r'$, se non sono parallele, si trova cercando le soluzioni t, t' del sistema:

$$\begin{cases} a_1 + t l = c_1 + t' l' \\ a_2 + t m = c_2 + t' m' \end{cases}$$

Fasci di rette.

In un piano affine si definisce:

a) fascio proprio di rette di sostegno o centro un punto Q l'insieme delle rette passanti per Q: Φ_Q;

b) fascio improprio di rette l'insieme di tutte le rette aventi una fissata direzione.

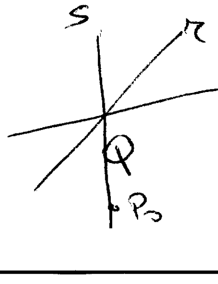
a) Date r, r' 2 rette incidenti in $Q(x_0, y_0)$, supponiamo abbiano equazioni:

$r: ax+by+c=0$

$r': a'x+b'y+c'=0$.

Allora $\forall (\lambda, \mu) \in K^2 \setminus \{(0,0)\}$, la retta di equazione $\lambda(ax+by+c)+\mu(a'x+b'y+c')=0$ passa per Q e quindi appartiene al fascio ϕ_Q.

Viceversa, se $s \in \phi_Q$, $\exists\, (\bar\lambda, \bar\mu) \neq (0,0)$ t.c. s ha equazione $\bar\lambda(ax+by+c)+\bar\mu(a'x+b'y+c')=0$.



Infatti, sia $P_0 \in s$, $P_0 \neq Q$.

Supponiamo P_0 abbia coordinate (x_0, y_0).

Consideriamo l'equazione in λ, μ:

$$\lambda(ax_0+by_0+c) + \mu(a'x_0+b'y_0+c') = 0.$$

essendo $P_0 \neq Q$ i coefficienti di λ, μ non sono entrambi nulli, quindi esiste una soluzione det. a meno di un fattore di proporzionalità non nullo: $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$.

La retta ottenuta per questa scelta di parametri passa per P_0 e per Q, quindi è la retta s.

Abbiamo così dimostrato che una retta

$$\boxed{s \in \Phi_Q \iff s \text{ ha equazione } \lambda r + \mu r' = 0,}$$

dove si è indicato con r l'espressione $ax+by+c$ e con r' $a'x+b'y+c'$.

Oss. Φ_Q contiene le rette $x - x_Q = 0$ e $y - y_Q = 0$ e quindi la generica retta passante per Q ha equazione

$$a(x - x_Q) + b(y - y_Q) = 0$$

(abbiamo scritto a, b al posto di λ, μ)

b) Le rette aventi giacitura di equazione $ax+by=0$ sono tutte e solo quelle di equazione $ax+by+t=0$, al variare di t in K. Questa equazione si può anche interpretare come combinazione lineare delle equazioni di 2 rette particolari del fascio improprio.

In generale: 3 rette appartengono a un fascio se e solo se una ha equazione combinazione lineare delle altre 2.

$r: ax+by+c=0$

$r': a'x+b'y+c'=0$ appartengono a

$r'': a''x+b''y+c''=0$ un fascio se e solo se

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0 .$$

In uno spazio affine $\overset{A}{\vee}$ di dimensione n si possono fare analoghe considerazioni per i fasci di iperpiani:

a) fascio proprio di sostegno un sottospazio di codimensione 2 in A, S, che può essere rappresentato come intersezione di 2 iperpiani che lo contengono;

b) fascio improprio di data giacitura.

Condizione perché 3 iperpiani appartengano a un fascio:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & - & - & a_n & b \\ a_1' & a_2' & - & - & a_n' & b' \\ a_1' & a_2'' & - & - & a_n'' & b'' \end{pmatrix} < 3 .$$

In uno spazio affine di dimensione 3, un piano π ed una retta r possono essere:

- paralleli $\begin{cases} r \subseteq \pi \\ r \cap \pi = \emptyset \end{cases}$
- incidenti in un punto.

Se $\pi : ax+by+cz+d=0$, di giacitura W, se r ha direzione $\langle v_r \rangle$, $v_r = (l, m, n)$, si ha $r // \pi \iff v_r \in W \iff$ $al+bm+cn=0$.

Posizione reciproca di 2 rette in uno spazio affine di dimensione n.

Sia $r = P + \langle v \rangle$, $v = (l, m, n)$

$s = Q + \langle w \rangle$, $w = (l', m', n')$

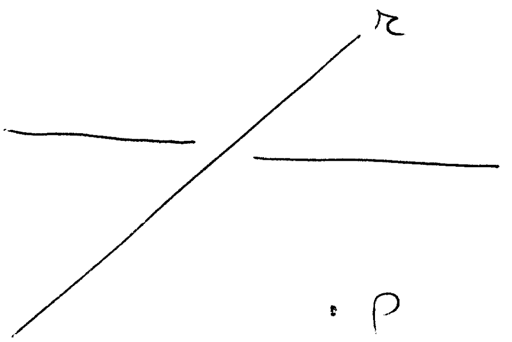
$r \| s \iff \langle v \rangle = \langle w \rangle \iff rg\begin{pmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} < 2$.

Sono non parallele $\iff rg\begin{pmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = 2$: in tal caso possono essere:

- incidenti in un punto $\iff$ sono complanari
- sghembe.

Se r e s sono non parallele, determinano una giacitura $W = \langle v, w \rangle$, cui entrambe sono parallele.

Date r, s sghembe e $P \notin r \cup s$, per P passa uno e un solo ~~retta~~ piano avente giacitura W, ossia parallelo a r e s.



Se invece si considerano i piani: $\pi = [P, r]$ e $\pi' = [P, s]$, questi sono distinti (perché r, s sono sghembe) e $\pi \cap \pi' = l$, retta passante per P, complanare con r e s.

l incontra almeno una tra r e s.

Posizione reciproca di 3 piani in uno spazio affine di dimensione 3.

$\pi : ax + by + \text{—} = 0$

$\pi_1 : a_1 x + b_1 y + \text{- -} = 0$

$\pi_2 : a_2 x + b_2 y + \text{—} = 0$

Consideriamo il sistema delle 3 equazioni e le matrici associate: A, incompleta 3×3, e A', completa 3×4.

$$A' = \left(\begin{array}{ccc:c} \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\begin{matrix} a & b & c \\ a_1^* & b_1^* & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}}_{A}} & \begin{matrix} d \\ d_1 \\ d_2 \end{matrix} \end{array} \right)$$

I ranghi possibili sono

	A	A'	
①	3	3	3 piani lin. indipendenti
②	2	3	
③	2	2	3 piani di un fascio
④	1	2	
⑤	1	1	3 piani coincidenti

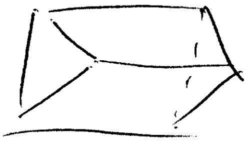
Considerando il rango per colonne, otteniamo che i 2 ranghi possono differire al più di 1.

Nei casi:

① il sistema ha 1! soluzione: $\pi \cap \pi_1 \cap \pi_2 = \{P_0\}$: stella propria di piani generata da π, π_1, π_2

② il sistema non ha soluzioni

$rg A = 2 \Rightarrow$ le 3 giaciture si incontrano in una retta a cui tutti e 3 i piani sono paralleli, ma i 3 piani non sono tutti paralleli fra loro. Se si suppone π, π_1 non paralleli, $\pi \cap \pi_1 = r$: la giacitura di r è quella comune ai 3 piani: stella impropria di piani.



③ $\pi \cap \pi_1 \cap \pi_2$ è una retta: i 3 piani appartengono a un fascio proprio

④ $\pi \cap \pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$: 3 piani di un fascio improprio di data giacitura.

Stella propria di piani: Σ_P, è l'insieme dei piani contenenti un punto fissato P.

Se π, π_1, π_2 sono piani linearmente indipendenti passanti per P, un piano $\alpha \in \Sigma_P$ se e solo se ha equazione

$\lambda \pi + \mu \pi_1 + \nu \pi_2 = 0$ per $(\lambda, \mu, \nu) \in K^3$ opportuni.

Se $P(x_0 y_0 z_0)$, i piani di Σ_P hanno equazione $a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$.