

# *Metodi multicriterio*

- Esistono diverse categorie di metodi che intendono tenere conto di *criteri di valutazione differenti* e non tutti monetizzabili:
  - *metodi non compensatori*
  - *metodi compensatori*, che cercano di sintetizzare le diverse misure in un'unica misura sintetica;
  - *metodi parzialmente compensatori*, che ammettono la non comparabilità tra certe alternative;
  - *metodi che utilizzano il concetto di ideale.*

- Metodi non compensatori
- Metodi compensatori
  - Metodi basati sul concetto di *utilità* o di *valore*.
  - Metodo AHP
- Metodi parzialmente compensatori
  - Metodi basati sul concetto di *surclassamento* (ELECTRE)
- Metodi basati sul concetto di soluzione ideale
  - Metodo TOPSIS

## Riprendiamo l'Esempio 1

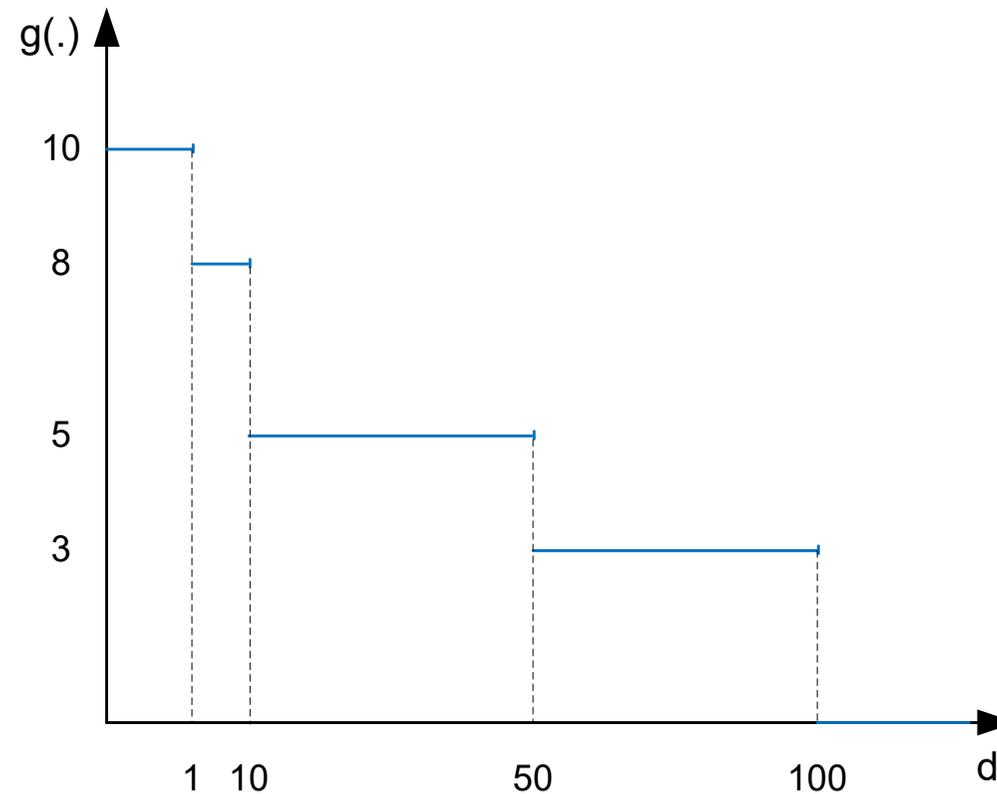
- Le tre alternative saranno confrontate solo secondo i criteri Cr1 e Cr2.

	Cr1 (km)	Cr2 (%)
Alt A	1,5	15
Alt B	11,0	18
Alt C	52,0	50

- Intervistando il decisore si sono costruite delle *funzioni di preferenza*  $g(\cdot)$  a punteggio da 0 a 10.

Cr1	$d > 100$	$50 < d \leq 100$	$10 < d \leq 50$	$1 < d \leq 10$	$d < 1$
g1	0	3	5	8	10
Cr2	$A < 10\%$	$10\% < A < 20\%$	$20\% < A < 50\%$	$50\% < A < 100\%$	
g2	0	4	8	10	

Tale assegnazione corrisponde ad una funzione del tipo seguente (caso di Cr1):



- Questo consente di assegnare un punteggio a ogni alternativa secondo ciascun criterio:

	$g_1$	$g_2$
Alternativa A	8	4
Alternativa B	5	4
Alternativa C	3	8

- Chiameremo l'insieme dei valori relativi a un'alternativa (riga) *profilo dell'alternativa* secondo i criteri scelti.
- Più in generale:

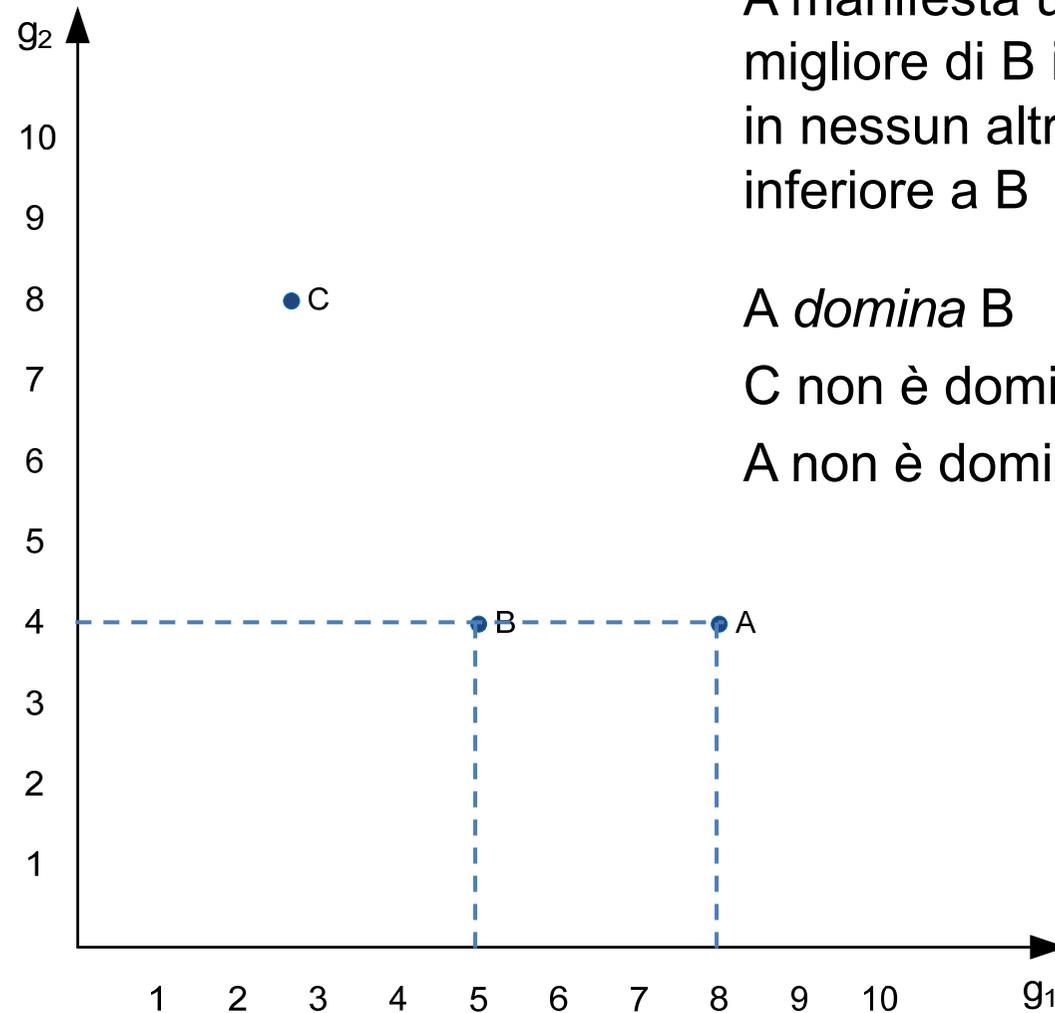
	$g_1$	...	$g_k$	...	$g_m$
$a_i$	$g_1(a_i)$	...	$g_k(a_i)$	...	$g_m(a_i)$

- I risultati che si ottengono per le alternative sono:

	$g_1$	$g_2$
Alternativa A	8	4
Alternativa B	5	4
Alternativa C	3	8

- Non c'è nessuna alternativa che presenta un punteggio più alto delle altre in entrambi i criteri:  
tuttavia osserviamo A e B...

## Graficamente:



A manifesta una prestazione migliore di B in un criterio e in nessun altro criterio è inferiore a B

*A domina B*

C non è dominata

A non è dominata

## *Generalizzazione dei concetti*

- Dato un insieme di alternative  $A=\{a_i, i=1, \dots, n\}$  e un insieme di criteri  $G=\{g_k, k=1, \dots, m\}$
- ogni alternativa avrà una prestazione (conseguenze o *outcome*) rispetto al set  $G$ :  $[g_k(a_i), k=1, \dots, m]$ .
- Formalmente,  $G(a_i)$  è l'*immagine* di  $a_i$  nello spazio delle conseguenze.

- **Definizione:**

$a_i$  è “dominata” se esiste (nell’insieme  $A$ ) almeno un’altra alternativa  $a_j$  che dà una prestazione migliore di  $a_i$  in almeno un criterio e prestazioni non peggiori di  $a_i$  nei criteri rimanenti.

- **Formalmente:**

$a_i$  *domina*  $a_j$  se e solo se

$$g_k(a_i) \geq g_k(a_j) \text{ per } k=1, \dots, m$$

e

$$g_k(a_i) > g_k(a_j) \text{ per almeno un } k=1, \dots, m$$

- Questi concetti possono essere applicati quando  $g_k(a)$  è riferibile almeno ad una *scala ordinale*.

- Dato un insieme di alternative, l'identificazione di alternative dominate non richiede che il decisore esprima un giudizio di importanza dei diversi criteri.
- Un decisore razionale non sceglierà un'alternativa dominata: tali alternative possono quindi essere rimosse dall'insieme delle alternative inizialmente disponibili.
- Si può costruire un grafo di dominanza in cui si rilevano le alternative dominate.

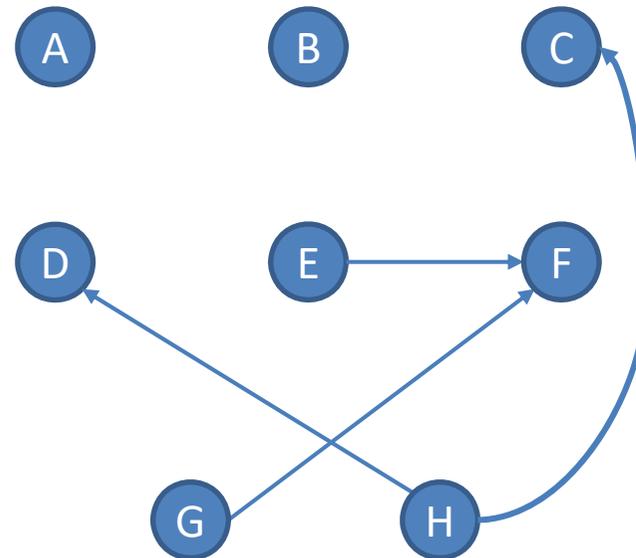
- Esempio
- Si abbiano i seguenti potenziali fornitori di materiali di consumo valutati su tre criteri (C, costo annuale fisso di fornitura; T, tempi medi di consegna; QS, qualità della assistenza fornita al cliente):

	C (k€)	T (giorni)	QS (A,B,O*)
A	65	3	A
B	58	4	A
C	85	3	B
D	80	4	O
E	65	5	B
F	72	5	B
G	70	4	B
H	80	3	O

(\*A: accettabile; B: buono; O: ottimo)

- Si ottiene il grafo di dominanza seguente:

	C (k€)	T (giorni)	QS (A,B,O*)
A	65	3	A
B	58	4	A
C	85	3	B
D	80	4	O
E	65	5	B
F	72	5	B
G	70	4	B
H	80	3	O



- Le alternative C, D, F possono essere rimosse dalla valutazione.
- L'insieme {A,B,E,G,H} è costituito da alternative non dominate (ND-A).

- L'immagine dell'insieme delle ND-A nello spazio delle conseguenze è denominato *frontiera efficiente* o *Pareto ottimale*.
- Se si aggiungesse una nuova alternativa, l'insieme delle ND-A potrebbe cambiare.
- Tuttavia, un'alternativa dominata non può diventare non-dominata in seguito all'aggiunta di una nuova alternativa.

# *Metodi non compensatori*

- I metodi non compensatori non consentono che le prestazioni positive di un criterio compensino le prestazioni negative di un altro.
- Ogni criterio è preso in considerazione isolatamente.
- Anche nell'analisi di dominanza le alternative sono state confrontate a coppie rispetto a ciascun criterio.

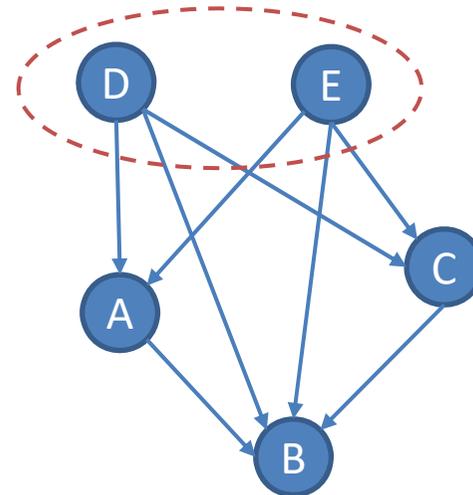
- Si supponga che quattro alternative siano valutate rispetto a cinque criteri tutti espressi con una scala a dieci punti (dove 10 è il punteggio maggiore).

	C1	C2	C3	C4	C5
Alternativa A	8	6	7	9	7
Alternativa B	7	6	6	8	7
Alternativa C	4	7	3	5	4
Alternativa D	6	5	6	6	6

- L'alternativa A domina B e D; C non è dominata. Tuttavia le prestazioni di C sono nel complesso peggiori di quelle di B, eccettuato il punteggio nel criterio C2.

- Esempio: si intende affittare uno strumento di test di cui sono valutate affidabilità dei risultati (Aff), impatto sul livello di servizio (ILS) e costo annuale (CA); ci sono cinque alternative.

	Aff	ILS	CA
Alternativa A	Discreta	Medio	25
Alternativa B	Discreta	Elevato	27
Alternativa C	Buona	Medio	27
Alternativa D	Ottima	Basso	24
Alternativa E	Buona	Medio	22

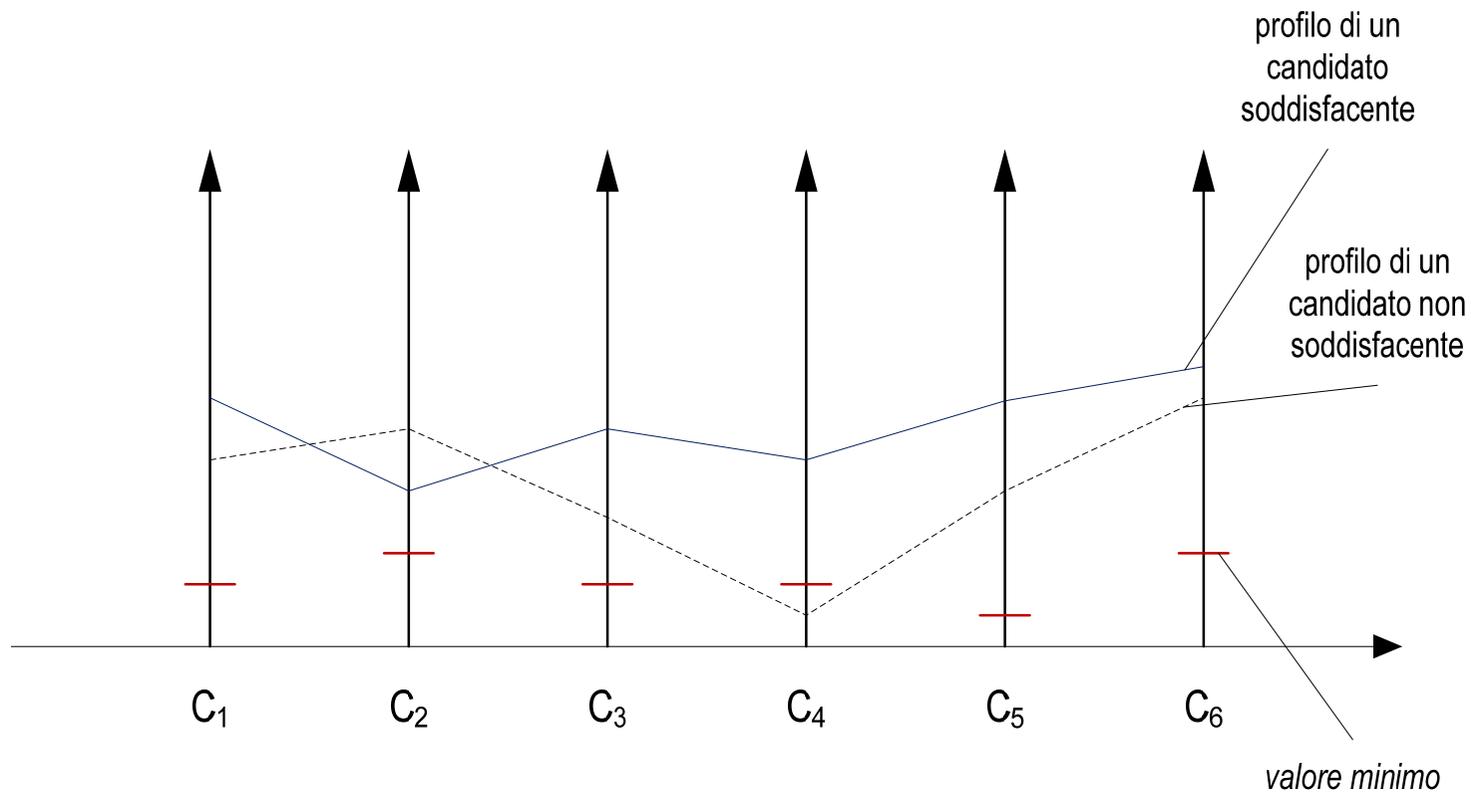


- In questo caso, sarebbe opportuno quindi analizzare ulteriormente le due alternative D ed E.

- Alcuni metodi non compensatori sono utilizzati non per individuare un'azione preferibile, ma per identificare un insieme di azioni o candidati che manifestino delle *prestazioni ritenute soddisfacenti* rispetto a *ogni* criterio.
- Nel *metodo congiuntivo* si fissano dei *valori minimi* per ogni criterio (sia  $J$  l'insieme di tutti gli attributi considerati):  
un'azione sarà considerata soddisfacente se le sue prestazioni sono superiori al valore minimo per *tutti* gli attributi considerati.

- Dato il valore minimo del criterio generico  $j \in J$  ( $x_j^0$ ), un'alternativa  $a_i$  sarà soddisfacente se

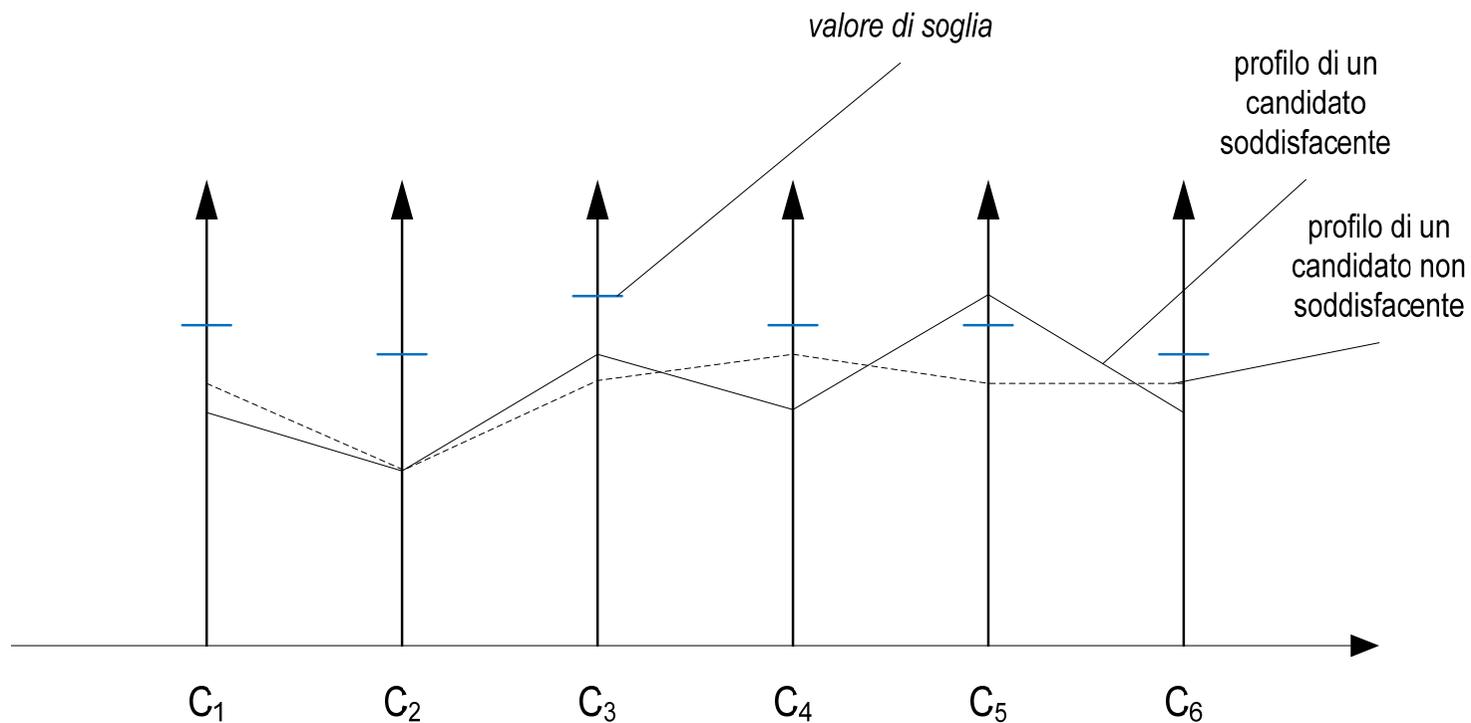
$$x_{ij} \geq x_j^0 \quad \forall j, j \in J$$



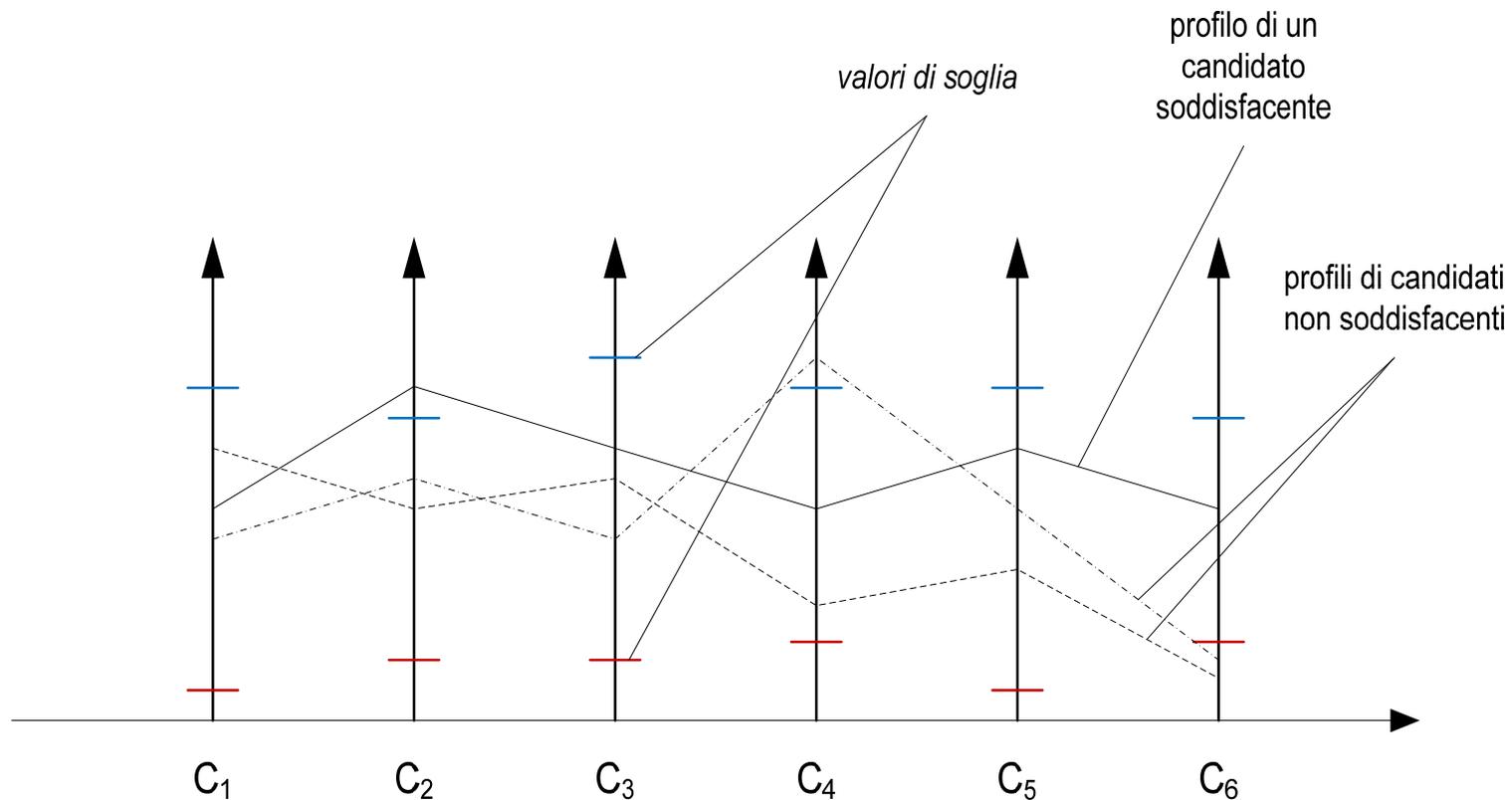
- Il *metodo disgiuntivo* valorizza la possibilità che un candidato offra una prestazione particolarmente buona *in almeno un criterio*.
- Questo approccio enfatizza l'eccellenza che un candidato può manifestare anche in un solo criterio.
- (Il metodo congiuntivo richiedeva valori di prestazione non inferiori ai limiti minimi per *tutto* l'insieme di criteri.)

- Dato il valore soglia dell'attributo generico  $j \in J$  ( $x_j^S$ ), un'alternativa  $a_i$  sarà soddisfacente se

$$\exists j, j \in J : x_{ij} \geq x_j^S$$



- È possibile utilizzare insieme i due metodi per definire in modo più fine le condizioni che i candidati devono garantire per essere considerati soddisfacenti.



# *Domanda*

- È possibile pensare a un metodo non compensatorio che consenta di identificare l'alternativa (o le alternative) *più promettenti*?
- Potremmo ad esempio valutare le alternative criterio per criterio a partire da quelli che il decisore giudica «più importanti».

- Il *metodo Lessicografico* presuppone che l'importanza dei criteri per un decisore sia differente: può ad esempio esistere un criterio ritenuto fondamentale o critico per la decisione.
- Se esistono più alternative che soddisfano tale criterio, si potrà identificare un secondo criterio, meno importante del primo ma che il decisore reputa più importante degli altri ecc.

	I	II	III
	Aff	ILS	C
Alternativa A	Buona	Medio	25,0
Alternativa B	Discreta	Elevato	27,0
Alternativa C	Buona	Medio	27,0
Alternativa D	Ottima	Basso	24,0
Alternativa E	Buona	Medio	22,0
Alternativa F	Ottima	Basso	25,0
Alternativa G	Ottima	Medio	22,0
Alternativa H	Buona	Basso	24,0

- In sintesi:
  - DM ordina per importanza i diversi criteri
  - le alternative sono ordinate secondo il primo criterio
  - se più alternative hanno la massima prestazione su tale criterio, si analizza la loro prestazione rispetto al secondo criterio
  - si ripete questa logica fino ad ottenere l'alternativa preferibile (unica\*).

(\*il caso contrario implica che due alternative siano indistinguibili)

- Applicando direttamente questo metodo, si può ottenere che un'alternativa non dominata abbia una posizione in graduatoria più bassa di una dominata.
- Si noti che ci possono essere situazioni che il metodo non riesce a gestire efficacemente.
  
- **Esempio**
- Consideriamo i seguenti fornitori in cui:
  - C è il costo annuale del contratto
  - T è il tempo medio di consegna dopo l'ordine
  - SC è lo sconto massimo applicato ad un ordine.

	C	T	SC
	(k€)	(giorni)	(%)
A	125	6	3%
B	110	7	3%
C	165	5	5%
D	150	4	4%
E	125	5	4%
F	145	4	4%

- A è dominata da E e D è dominata da F.
- Tuttavia se l'ordinamento dei criteri è  $[T > SC > C]$  D ha una posizione in graduatoria più elevata di E (non dom.)
- Inoltre, si noti che a fronte di un giorno in più per la consegna, E consente un risparmio di 20k€ all'anno rispetto a F.
- La scelta di F è coerente con le preferenze del decisore?

# Osservazioni

- I criteri possono rilevare prestazioni *conflittuali* nelle alternative.
- Un modo per ottenere una prestazione «complessiva» (o «di sintesi») è *aggregare* i punteggi dei criteri.
- Il modo più semplice consiste nel sommare i punteggi, il che implica dare eguale importanza ai due criteri:

	$g_1$	$g_2$	
Alternativa A	8	4	12
Alternativa B	5	4	9
Alternativa C	3	8	11

## Esempio

- Il risultato è che ora una delle alternative appare meno soddisfacente delle altre e ce n'è una preferibile.
- Se il decisore ritiene però di pesare diversamente i due criteri si possono ottenere risultati ancora diversi.
- Ad esempio:

	$g_1$	$g_2$	
Alternativa A	0,4	0,6	
Alternativa B	3,2	2,4	5,6
Alternativa C	2	2,4	4,4
	1,2	4,8	6

# Osservazioni

- Si noti che l'aggregazione in forma di somma consente di *compensare* le prestazioni dei criteri:  
l'alternativa C che presenta un basso punteggio nel criterio 1 compensa la sua *prestazione complessiva* grazie al punteggio relativo al criterio 2.
- I pesi relativi ai criteri determinano l'incidenza dei criteri sulla prestazione complessiva.
- Così, l'alternativa C che presenta 5 punti in meno della A nel criterio 1 ( $5 \times 0,4 = 2$ ) recupera in prestazione totale grazie ai 4 punti in più nel criterio 2 ( $4 \times 0,6 = 2,4$ ).

- In altri termini, quando i criteri contribuiscono *tutti allo stesso modo* alla prestazione totale (stessa scala e stessi pesi), si può «cedere» un'unità di un criterio per ottenere un'unità di un altro senza perdere in prestazione totale.
- Nel caso le scale siano diverse o siano diversi i pesi, si dovrà determinare il valore di un'unità del criterio che si decrementa esprimendola nelle unità di quello che si incrementa (*compromesso o trade-off*).
- Tale «fattore di conversione» è solitamente chiamato *tasso di sostituzione*.

- Il tasso di sostituzione tra due criteri  $c_j$  e  $c_h$  nel punto

$$\mathbf{c}^0 = (c_1^0, c_2^0, \dots, c_m^0)$$

- è la variazione  $r_{j,h}$  nel criterio  $c_j$  per cui l'alternativa caratterizzata da  $\mathbf{c}^0$  è indifferente all'alternativa caratterizzata dal vettore

$$(c_1^0, c_2^0, \dots, c_j^0 + r_{j,h}, \dots, c_h^0 - 1, \dots, c_m^0)$$

- Si dimostra che nel caso della somma pesata semplice si ha  $r_{j,h} = w_h/w_j$  dove  $w_i$  sono i pesi dei criteri.
- Infatti la prestazione complessiva di un'alternativa 0  
 $[..., w_j \cdot c_j, ..., w_h \cdot c_h, ...]$   
 è equivalente alla prestazione complessiva di un'alternativa 1  
 $[..., w_j \cdot (c_j + r_{j,h}), ..., w_h \cdot (c_h - 1), ...]$ :

$$w_j \cdot c_j + w_h \cdot c_h = w_j \cdot (c_j + r_{j,h}) + w_h \cdot (c_h - 1)$$

$$0 = w_j \cdot r_{j,h} - w_h$$

$$r_{j,h} = \frac{w_h}{w_j}$$

## *Simbologia utilizzata*

- Si considerino i seguenti elementi:
  - $A: (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n)$   
insieme delle alternative ammissibili
  - $I: (1, 2, \dots, k, \dots, m)$   
insieme degli indici degli  $m$  criteri  $g_k(\cdot)$
  - $W: (w_1, w_2, \dots, w_k, \dots, w_m)$   
insieme dei pesi attribuiti ai criteri
  - $g_k(a_i)$  valutazione di  $a_i$  rispetto a  $g_k$

	$g_1$	...	$g_k$	...	$g_m$
$a_i$	$g_1(a_i)$	...	$g_k(a_i)$	...	$g_m(a_i)$

- Per semplificare i calcoli, si possono assegnare dei pesi che abbiano valori compresi tra 0 e 1 e che rispettino la seguente relazione:

$$\sum_{k=1}^m w_k = 1$$

# *Metodi compensatori*

- I metodi basati su *funzioni di utilità* (o di *valore*) prevedono la costruzione di una funzione di sintesi la cui forma generale è

$$V(a_1, \dots, a_m) = f[v_1(a_1), \dots, v_m(a_m)]$$

- $V(\cdot)$  è chiamata funzione di valore multi-attributo (funzione MAV) e mappa lo spazio delle conseguenze in un intervallo  $\subseteq \mathcal{R}$ .

- $V(\cdot)$  rappresenta la struttura di preferenze, di un decisore specifico, se:

$$g(a_i) \mathbf{I} g(a_j) \Leftrightarrow v(g(a_i)) = v(g(a_j)) \quad \text{e}$$

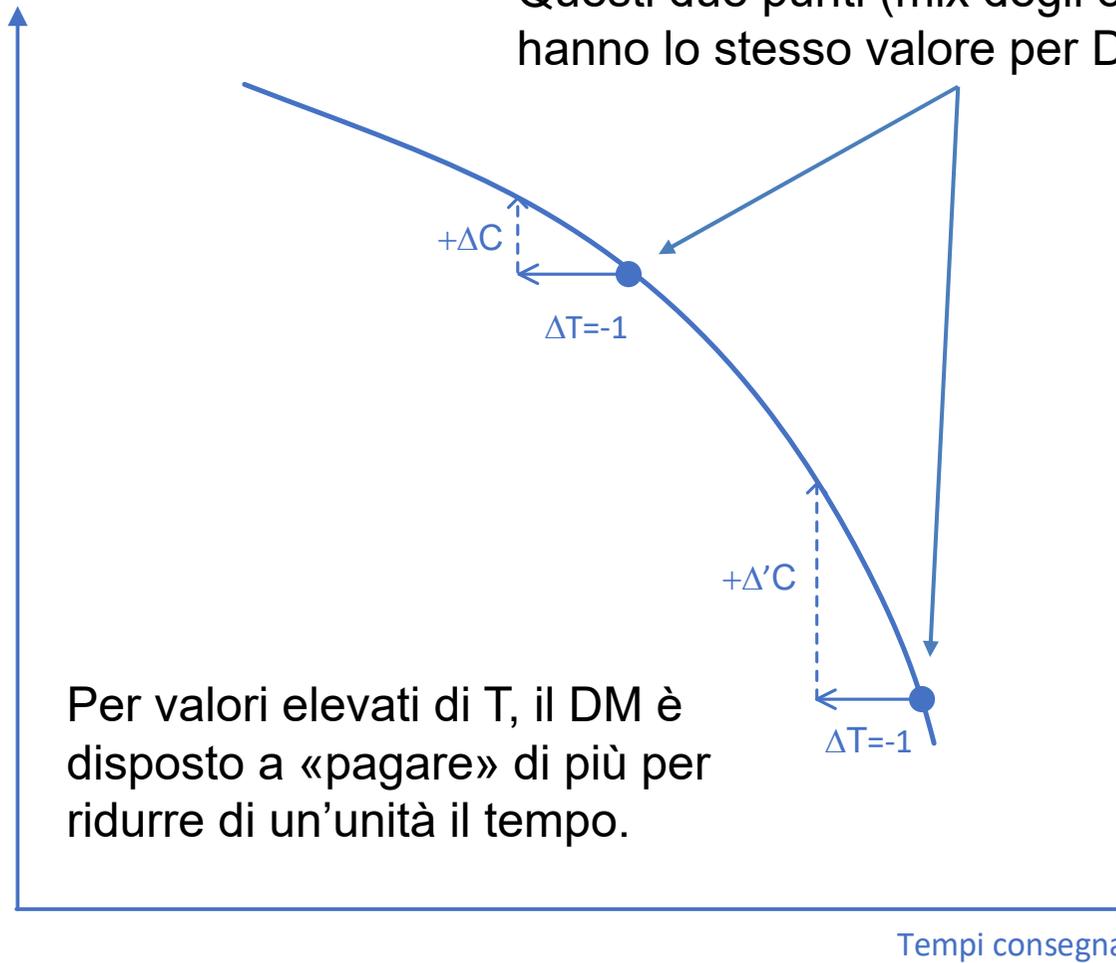
$$g(a_i) \mathbf{P} g(a_j) \Leftrightarrow v(g(a_i)) > v(g(a_j))$$

- dove  $g(a)$  è l'outcome di  $a$  e  $v(\cdot)$  è il valore che la funzione MAV assume per l'outcome  $g(a)$ .
- Un DM sarà quindi indifferente a due outcome solo se i corrispondenti valori  $v(\cdot)$  sono uguali.

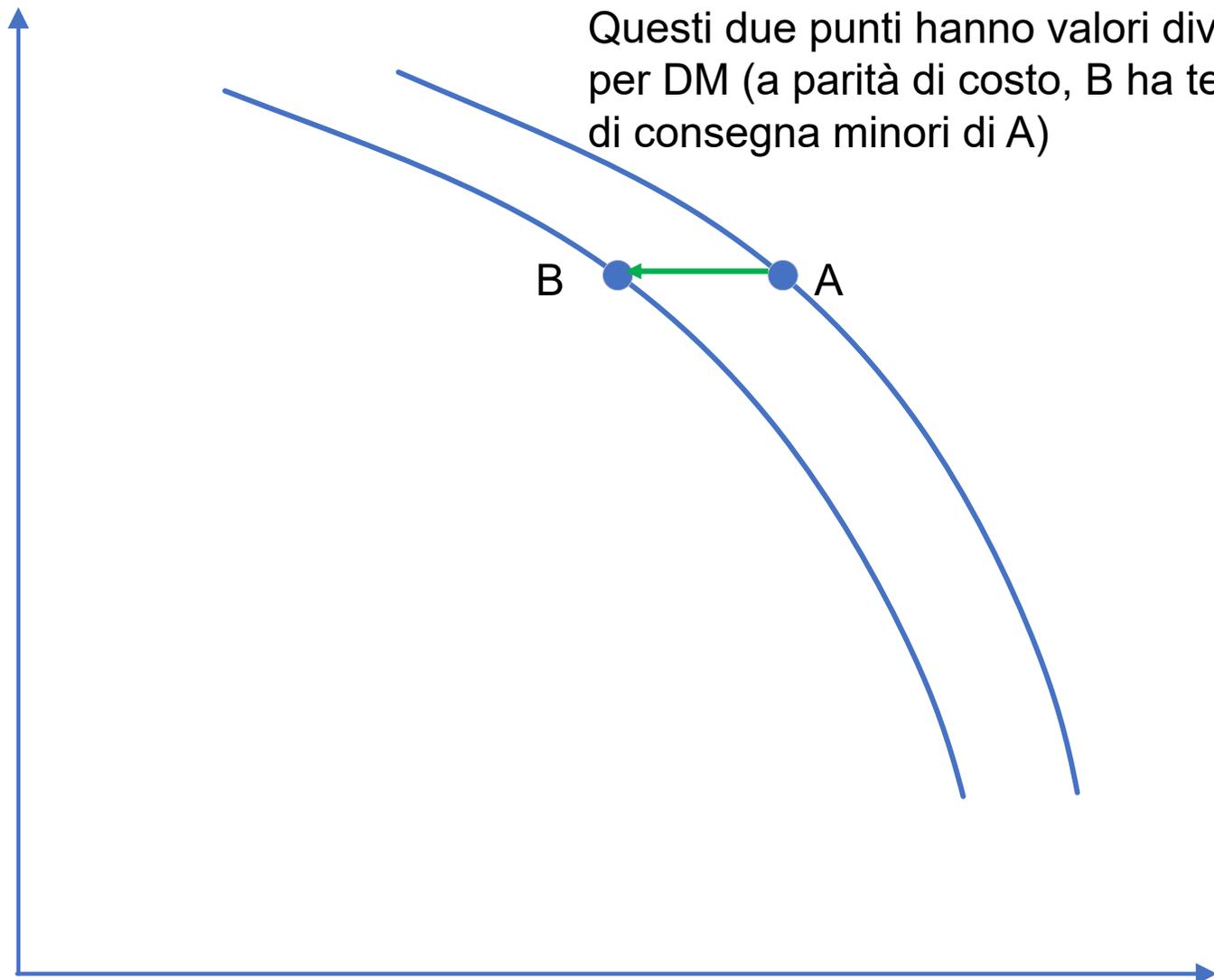
- Nei metodi classici, i  $g_k(a_i)$  sono trasformati in funzioni di valore «locali», relative cioè a ogni singolo attributo  $v_k(a_i)$ .
- La costruzione della funzione MAV avviene attraverso l'esplicitazione dei compromessi accettabili per il decisore.
- Come vedremo, i metodi della somma o del prodotto pesato sono a tutti gli effetti dei casi particolari di funzione MAV.

- Un insieme di funzioni MAV che assicurano lo stesso ordinamento degli outcome sono dette «strategicamente equivalenti».
- Dato un outcome  $g(a_i)$ , si definisce *curva (superficie) di indifferenza* il luogo dei punti nello spazio delle conseguenze tali che il DM è indifferente a  $g(a_i)$  e a tutti gli outcome su quella curva (o superficie).
- La forma della curva di indifferenza indica che il tasso di sostituzione marginale è diverso per punti diversi della curva.

Costi  
annui



Costi  
annui



Questi due punti hanno valori diversi per DM (a parità di costo, B ha tempi di consegna minori di A)

B ← A

Tempi consegna

## *Metodo della somma pesata*

- La somma pesata è un modello additivo nella forma:

$$V(a) = \sum_{k=1}^m w_k \cdot g_k(a)$$

- Si assegna un valore di sintesi all'alternativa  $a$  a partire dal «valore» assegnato ad essa in ogni criterio  $k$ .

## *Esempio 2*

- Quattro fornitori di servizi manutentivi sono stati valutati secondo 4 criteri:
  - $g_1$ : costi fissi annuali di fornitura
  - $g_2$ : affidabilità del servizio (punteggio da 0 a 100)
  - $g_3$ : prestazioni aggiuntive del servizio (punteggio da 0 a 100)
  - $g_4$ : flessibilità del servizio (punteggio da 0 a 100)

- Si sono attribuite le valutazioni:

	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$
	5	3	1	1
$a_1$	-10	30	72	30
$a_2$	-13	58	48	70
$a_3$	-21	70	65	85
$a_4$	-22	80	75	75

# Osservazioni

- Si può trasformare la matrice in una normalizzata con valori in colonna tra 0 e 1.
- Ciò è richiesto se le scale di valutazione sono diverse sostanzialmente (o hanno ordini di grandezza diversi).
- Esempio 2 (criterio 2), se  $g_k'(a_i)$  è il valore normalizzato:

$$g_k'(a_i) = \frac{g_k(a_i) - 30}{80 - 30}$$

- In alternativa si può considerare il rapporto tra  $g_k(a_i)$  e il valore massimo.
- Anche i pesi possono essere normalizzati in modo che la loro somma sia pari a 1.

- Con la normalizzazione, si ottengono i valori seguenti:

	1 c_fissi	2 affidab	3 prestaz	4 flessib	V(a)
	0,5	0,3	0,1	0,1	
a_1	1,00	0,00	0,89	0,00	0,59
a_2	0,75	0,56	0,00	0,73	0,62
a_3	0,08	0,80	0,63	1,00	0,44
a_4	0,00	1,00	1,00	0,82	0,48

- La somma pesata nella forma:  $V(a_i) = \sum_{k=1}^4 w_k \cdot g_k'(a_i)$  individua il seguente ordinamento:

**a\_2** P a\_1 P a\_4 P a\_3

- Sono possibili altre trasformazioni dei valori  $g_k(a_i)$  da valori assoluti a valori relativi.
- Un metodo frequente è l'espressione della misura in termini del suo contributo al valore totale (somma dei valori rispetto a k):

$$g_k^*(a_i) = \frac{g_k(a_i)}{\sum_{j=1}^n g_k(a_j)}$$

- La matrice dei valori relativi è:

	1 c_fissi	2 affidab	3 prestaz	4 flessib	V(a)
	0,5	0,3	0,1	0,1	
a_1	-0,152	0,126	0,277	0,115	0,0013
a_2	-0,197	0,244	0,185	0,269	0,0200
a_3	-0,318	0,294	0,250	0,327	-0,0132
a_4	-0,333	0,336	0,288	0,288	-0,0081

- La somma pesata nella forma:  $V(a_i) = \sum_{k=1}^4 w_k \cdot g_k^*(a_i)$   
individua il seguente ordinamento:

**a\_2** P a\_1 P a\_4 P a\_3

## *Metodi del prodotto pesato*

- I *metodi del prodotto pesato* prevedono diversi modelli.
- Si può adottare un modello basato sul confronto tra due alternative; si può ad esempio usare il prodotto:

$$R(a_i, a_j) = \prod_{k=1}^m \left( \frac{g_k(a_i)}{g_k(a_j)} \right)^{w_k}$$

- Nel caso siano presenti valori di costo (o valutati negativamente), si dovranno usare dei *proxy* che riportino i valori in accordo con le altre scale.
- Ad esempio, si può usare il proxy

$$g_k^\circ(a_i) = \frac{1}{g_k(a_i)}$$

- La matrice dei valori sarà ora:

	1 c_fissi	2 affidab	3 prestaz	4 flessib
	0,5	0,3	0,1	0,1
a_1	0,100	30	72	30
a_2	0,077	58	48	70
a_3	0,048	70	65	85
a_4	0,045	80	75	75

- Considerati i rapporti  $R$ , un valore  $R(a_i, a_j) \geq 1$  indica che  $a_i$  è preferibile a  $a_j$ . La migliore alternativa sarà quella che è migliore o uguale a ogni altra.

- Nel nostro esempio otteniamo:

	1 c_fissi	2 affidab	3 prestaz	4 flessib	
	0,5	0,3	0,1	0,1	
a1,a2	1,30	0,52	1,50	0,43	0,90
a1,a3	2,10	0,43	1,11	0,35	1,02
a1,a4	2,20	0,38	0,96	0,40	1,00
a2,a3	1,62	0,83	0,74	0,82	1,14
a2,a4	1,69	0,73	0,64	0,93	1,12
a3,a4	1,05	0,88	0,87	1,13	0,98

- a2 è sempre superiore, la seconda è a1, a4 è superiore ad a3, a3 è la meno preferibile.

- Il vantaggio di questo modello è che la sua struttura porta direttamente ad un confronto tra grandezze (R) adimensionali.
- Si possono quindi evitare i problemi dovuti a unità di misura diverse (normalizzazione) o a diversi ordini di grandezza per i  $g_k(a)$ .
- Il modello dà lo stesso risultato se applicato ai valori relativi  $g_k^*(a)$ .

- Una forma più semplice (non adimensionale) del metodo utilizza il modello:

$$P(a_i) = \prod_{k=1}^m [g_k(a_i)]^{w_k}$$

- Nel nostro Esempio 2 otteniamo:

a_1	1,891
a_2	2,112
a_3	1,848
a_4	1,882

- Da cui risulta l'ordinamento:

**a\_2** P a\_1 P a\_4 P a\_3