

Metodi basati sul surclassamento

- Ricordiamo il caso d'esempio 2.
- Quattro fornitori di servizi manutentivi sono stati valutati secondo 4 criteri:
 - g1: costi fissi annuali di fornitura
 - g2: affidabilità del servizio (punteggio da 0 a 100)
 - g3: prestazioni aggiuntive del servizio (punteggio da 0 a 100)
 - g4: flessibilità del servizio (punteggio da 0 a 100)

- Le prestazioni ottenute sono le seguenti:

	g_1	g_2	g_3	g_4
a_1	-10	30	72	30
a_2	-13	58	48	70
a_3	-21	70	65	85
a_4	-22	80	75	75

Osservazioni

- Nessuna delle quattro alternative è *dominante*: confrontandole a coppie, nessuna è preferibile alle altre considerati tutti i criteri.
- In altri termini: $\neg \exists a^* \in A : g_k(a^*) \geq g_k(a_i) \quad \forall k \in I$
- Sarà opportuno individuare una relazione binaria diversa da quella di dominanza.
- Si può proporre una relazione di *surclassamento* (*outranking*).

Relazione di surclassamento

- Un'alternativa a_i surclassa a_j :
 - se in base alle informazioni che si possiedono sulle alternative e sulle preferenze dei decisori
 - ci sono elementi sufficienti per affermare che a_i ha prestazioni buone almeno quanto a_j sugli m criteri
 - e non ci sono elementi sufficienti per affermare il contrario.
- Simbolicamente ciò si indica con $a S b$.

- Si dovranno quindi individuare i criteri a supporto di tale affermazione.
- A favore di $a_i \succ a_j$ ci sono i criteri k tali che

$$g_k(a_i) \geq g_k(a_j)$$

- Nell'esempio, per a_1 e a_2 il sottoinsieme I^+ è

$$C(a_1 \succ a_2) = \{1,3\}$$

	g_1	g_2	g_3	g_4
	5	3	1	1
a_1	-10	30	72	30
a_2	-13	58	48	70
a_3	-21	70	65	85
a_4	-22	80	75	75

- Considerando ciascun criterio come un voto, tale situazione vede 2 votanti su 4 a favore dell'affermazione a_1Sa_2 .
- Generalizzando, si può valutare se la “coalizione” $C(a_1Sa_2)$ è sufficientemente *importante* per poter affermare che, nel complesso, a_1Sa_2 (analisi di *concordanza*).
- Si noti che il peso di un criterio ne indica l'importanza all'interno della “coalizione” ma *il concetto di compensazione non è chiamato in causa*.

- Un osservatore potrebbe rilevare che pur essendoci più criteri concordi con l'affermazione a_1Sa_2 , il criterio g_4 è particolarmente a favore di a_2 :

$$g_4(a_2) - g_4(a_1) = 40$$

- Il criterio g_4 è *discordante* con la proposizione a_1Sa_2 .
- Si potrebbe allora valutare se la differenza di prestazione sul criterio g_4 è sufficientemente grande da potere “indebolire” l'affermazione a_1Sa_2 .

Metodi Electre

- Il metodo cerca di costruire sull'insieme A delle alternative una relazione S di *surclassamento* più ricca di una semplice dominanza.
- Il modello di preferenza globale ammette
 - *incomparabilità* tra alternative,
 - *non transitività*.
- L'incomparabilità si ha in situazioni in cui non esistono informazioni sufficienti per stabilire una situazione di chiara preferenza $a_i S a_j$ o $a_j S a_i$.

- Sono stati proposti diversi metodi Electre che dipendono dal problema decisionale da affrontare:
 - selezione alternative preferibili
 - ordinamento delle alternative
 - classificazione delle alternative
- Tuttavia la base comune è la costruzione della relazione di surclassamento a partire dai confronti a coppie.

	a_1	a_i	a_j	a_n
a_1	-			
a_i		-	(a_i, a_j)	
a_j		(a_j, a_i)	-	
a_n				-

- Confrontando una qualsiasi coppia (a_i, a_j) di alternative, si potranno individuare tre tipi di insiemi:

- $I^+(i,j) = \{k \in I : g_k(a_i) > g_k(a_j)\}$

- $I^=(i,j) = \{k \in I : g_k(a_i) = g_k(a_j)\}$

- $I^-(i,j) = \{k \in I : g_k(a_i) < g_k(a_j)\}$

allo stesso modo si individuano:

$$W^+(i, j) = \sum_k w_k, k \in I^+(i, j)$$

$$W^=(i, j) = \sum_k w_k, k \in I^=(i, j)$$

$$W^-(i, j) = \sum_k w_k, k \in I^-(i, j)$$

- Il metodo Electre I segue una serie di passi:
 - costruzione delle relazioni di surclassamento
 - tracciamento di un grafo di surclassamento
 - identificazione di un sottoinsieme delle alternative (N) detto *nucleo (kernel)*.
- Il nucleo ha due proprietà:
 - tutte le a_j che non appartengono a N sono surclassate da almeno una $a_i \in N$
 - se $a_i \in N$, essa non è surclassata da altre $a_j \in N$

- Per costruire la relazione di surclassamento, si realizzano:
 - il test di concordanza
 - il test di discordanza
- Il test di concordanza calcola un indice di concordanza relativo a ogni coppia (a_i, a_j) .
- $c(a_i, a_j)$ esprime il vantaggio che il decisore ha nello scegliere a_i e non a_j .

- Esso misura la frequenza relativa pesata dei criteri per i quali a_i non è peggiore di a_j :

$$c(i, j) = \frac{W^+(i, j) + W^-(i, j)}{W^+(i, j) + W^-(i, j) + W^-(i, j)}$$

- Se i pesi sono già espressi in termini relativi, è sufficiente considerare il numeratore.

Esempio

- Consideriamo (a_3, a_2) :

	g_1	g_2	g_3	g_4
a_2	-13	58	48	70
a_3	-21	70	65	85

- $I^+(a_3, a_2) = \{2, 3, 4\}$ $I^- = \emptyset$ $I^- = \{1\}$
- $W^+(a_3, a_2) = 3 + 1 + 1 = 5$ $W^- = 0$ $W^- = 5$

$$c(3, 2) = \frac{5 + 0}{5 + 0 + 5} = 0,5$$

Esempio

- Si ottiene la matrice di concordanza:

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	-	0,6	0,6	0,5
a_2	0,4	-	0,5	0,5
a_3	0,4	0,5	-	0,6
a_4	0,5	0,5	0,4	-

- Il test di discordanza è basato su un indice relativo a ogni coppia (a_i, a_j) .
- $d(a_i, a_j)$ esprime il rammarico che il decisore ha nello scegliere a_i e non a_j .
- Rispetto alla coppia (a_i, a_j) si considerano tutti i criteri che appartengono a $I(a_i, a_j)$.
- Per ognuno di essi sarà $g_k(a_j) > g_k(a_i)$: si tratta di identificare il più “influyente” fra essi, cioè la differenza che nella scala rispettiva è maggiore.

- Si calcolano quindi i quozienti tra le differenze “discordanti” e l’ampiezza della scala:

$$d(i, j) = \max_{k \in I^-} \frac{g_k(a_j) - g_k(a_i)}{\text{ampiezza criterio } (k)}$$

- Se $I^-(a_i, a_j) = \emptyset$ allora $d(i, j) = 0$.
- In pratica $d(i, j)$ misura la migliore prestazione “contro” a_i e “a favore” di a_j .

Esempio

- Consideriamo (a_3, a_4) :

	g_1	g_2	g_3	g_4
a_3	-21	70	65	85
a_4	-22	80	75	75

- $I^+(a_3, a_4) = \{1, 4\}$ $I^- = \emptyset$ $I^- = \{2, 3\}$
- ampiezza $g_2 = 80 - 30 = 50$
- ampiezza $g_3 = 75 - 48 = 27$

Esempio

- ampiezza $g_2 = 50$
- ampiezza $g_3 = 27$
- $g_2(a_4) - g_2(a_3) = 80 - 70 = 10$
- $g_3(a_4) - g_3(a_3) = 75 - 65 = 10$

$$d(3,4) = \max\left(\frac{10}{50}, \frac{10}{27}\right) = 0,37$$

Esempio

- Si ottiene la matrice di discordanza:

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	-	0,727	1	1
a_2	0,889	-	0,630	1
a_3	0,917	0,667	-	0,370
a_4	1	0,750	0,182	-

- Si dirà quindi che $a_i \succ a_j$ se e solo se:
 1. i criteri di $I^+(a_i, a_j)$ sono sufficientemente importanti
 2. i criteri di $I^-(a_i, a_j)$ non sono abbastanza importanti da sfavorire la scelta di a_i .
- Fissata una “soglia” di concordanza c , la condizione 1 è $c(i,j) \geq c$.
- Fissata una “soglia” di discordanza d , la condizione 2 è $d(i,j) \leq d$.

Osservazioni

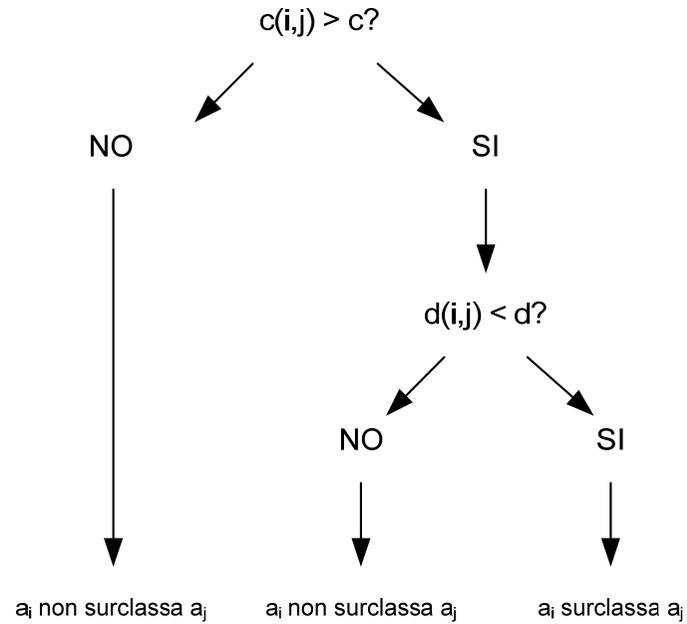
- La scelta dei valori di soglia è fatta dal decisore.
- c rappresenta la coalizione “minima” richiesta per favorire l’alternativa a_i e quindi assume valori maggiori o uguali a 0,5.
- A volte si adotta la “regola dei 2/3” e si assume $c=0,66$.
- Valori “grandi” di d (ad es., $> 0,8$) attenuano l’importanza di $d(i,j)$.

- Per contro, valori “piccoli” di d (ad es. tra 0,5 e 0,6) indicano una maggiore esigenza, da parte del decisore, nel rifiutare possibili “cattive prestazioni” di a_i .
- Spesso si adotta, in prima battuta, un valore di d pari alla media delle $d(i,j)$ (soglia “naturale”).
- Si possono adottare delle soglie “locali” per ogni criterio (t_k); in tal caso per la discordanza si adotta il modello seguente:

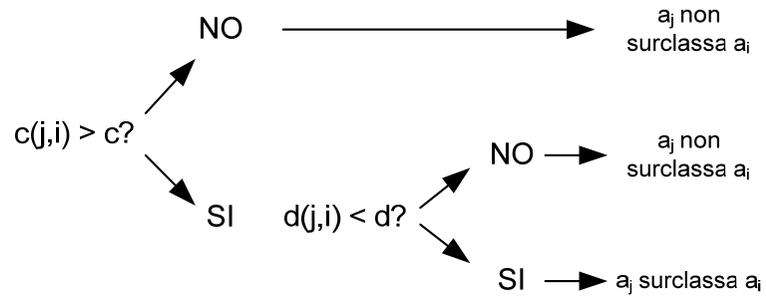
$$d(a_i, a_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } g_k(a_j) - g_k(a_i) > t_k \quad \forall k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Il test di surclassamento tra a_i e a_j , è qui riassunto:

confronto di a_i con a_j



confronto di a_j con a_i



Incomparabili	Incomparabili	$a_i S a_j$
Incomparabili	Incomparabili	$a_i S a_j$
$a_j S a_i$	$a_j S a_i$	$a_i S a_j$ e $a_j S a_i$

Esempio

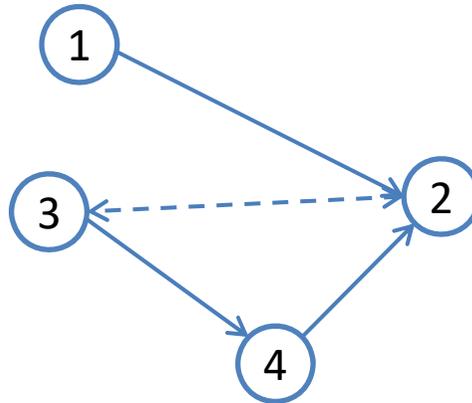
- Adottando $c=0,5$ e $d=0,76$ (media), si ricava una matrice globale:

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	-	1	0	0
a_2	0	-	1	0
a_3	0	1	-	1
a_4	0	1	0	-

$a_1 S a_2$

Esempio

- La matrice corrisponde al seguente grafo orientato:



- Il nucleo è in questo caso formato dalla sola a_1 .

Metodo Electre nella norma appalti

- Il Regolamento del Codice appalti (all. G) propone una versione particolare del metodo Electre.
- Si tratta di valutare, entro un insieme di offerte candidate, l'offerta economicamente più vantaggiosa.
- L'allegato G introduce diverse modalità per la determinazione di un «coefficiente di prestazione» di ogni offerta compreso tra 0 e 1.

- L'allegato distingue
 - elementi «di natura qualitativa», in cui entrano in gioco i giudizi dei diversi commissari
 - elementi «di natura quantitativa», per i quali si ha una trasformazione lineare.
- Considerato l'elemento di valutazione generico k ($k=1, \dots, n$), sia
 - a_{ki} la prestazione dell'offerta i rispetto a k (cioè il valore del coefficiente tra 0 e 1);
 - s_k il massimo scarto tra tali valori in k ;
 - p_k , il peso dell'elemento k ;
 - r , il numero delle offerte.

- Si definiscono gli «scarti»:

- $f_{kij} = a_{ki} - a_{kj}$ per $a_{ki} > a_{kj}$ ($i \neq j$)

- $g_{kji} = a_{kj} - a_{ki}$ per $a_{ki} < a_{kj}$ ($i \neq j$)

- e gli «indici»

- di concordanza

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{f_{kij}}{s_k} \cdot p_k$$

- di discordanza

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{g_{kji}}{s_k} \cdot p_k$$

- Se $d_{ij} = 0$, a_i domina a_j e quindi la procedura prosegue dopo avere scartato a_j .

- Sono poi introdotti due possibili indicatori unici di dominanza per ogni a_i , tra cui scegliere:

$$q_{ij} = \frac{c_{ij}}{d_{ij}} \quad (\forall j : j \neq i)$$

$$q_{ij}^* = 1 + \frac{q_{ij}}{q_{ij \max}} \cdot 99 \quad (\forall j : j \neq i)$$

- Infine, per ogni a_i si determina il *punteggio globale* con una delle due formule:

$$P_i = \sum_{j=1}^r q_{ij} \quad (j \neq i) \qquad P_i = \sum_{j=1}^r q_{ij}^* \quad (j \neq i)$$

- Si noti che il metodo qui proposto consente di ricavare una graduatoria delle offerte.

Metodo TOPSIS

- TOPSIS l'acronimo di “*Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution*”.
- Il metodo prevede due momenti principali:
 - definire una soluzione ideale e una soluzione ideale in senso negativo,
 - selezionare l'alternativa preferibile che è quella più vicina alla soluzione ideale e più lontana da quella ideale negativa.

- Per valutare le distanze si può adottare la distanza Euclidea.
- Si considera quindi un ordinamento sulla base delle distanze rispetto ai punti precedentemente definiti.
- Il metodo considera i criteri “positivi” separatamente da quelli “negativi”, quindi nel nostro esempio prescinderemo dai segni.
- A partire dalla matrice della valutazione delle alternative rispetto ai criteri, si seguono tipicamente 6 passi.

- La matrice di partenza dell'esempio sarà:

	g_1	g_2	g_3	g_4
	0,5	0,3	0,1	0,1
a_1	10	30	72	30
a_2	13	58	48	70
a_3	21	70	65	85
a_4	22	80	75	75

- *Primo passo:*
costruzione della matrice normalizzata
- Per ogni valore $g_k(a_i)$ della matrice di partenza, si calcola il valore normalizzato:

$$r_{ik} = \frac{g_k(a_i)}{\sqrt{\sum_j [g_k(a_j)]^2}}$$

- si possono usare altri metodi di normalizzazione.

- La matrice diventa:

	g_1	g_2	g_3	g_4
	0,5	0,3	0,1	0,1
a_1	0,289	0,240	0,547	0,220
a_2	0,376	0,465	0,365	0,513
a_3	0,608	0,561	0,494	0,622
a_4	0,637	0,641	0,570	0,549

- *Secondo passo:*
costruzione della matrice normalizzata pesata
- Ogni valore r_{ik} è moltiplicato per il peso (relativo) del criterio:

$$v_{ik} = w_k \times r_{ik}$$

- I valori v_{ik} sono la base per identificare le soluzioni ideali e per confrontare le alternative con esse.

- La matrice diventa:

	g_1	g_2	g_3	g_4
	0,5	0,3	0,1	0,1
a_1	0,145	0,072	0,055	0,022
a_2	0,188	0,139	0,036	0,051
a_3	0,304	0,168	0,049	0,062
a_4	0,318	0,192	0,057	0,055

- *Terzo passo:
determinazione degli ideali*
- Si classificano i criteri in due sottoinsiemi:
 - I^B contiene i criteri per cui si cerca il massimo (ad es., qualità)
 - I^C contiene i criteri per cui si cerca il minimo (ad es., costi)
- Indicando con a^* la soluzione ideale e con a^- la soluzione ideale negativa, si ha:

$$a^* = \{(\max_i v_{ik} : k \in I^B), (\min_i v_{ik} : k \in I^C), i = 1, \dots, n\}$$

$$a^- = \{(\min_i v_{ik} : k \in I^B), (\max_i v_{ik} : k \in I^C), i = 1, \dots, n\}$$

- Quindi le due soluzioni ideali (fittizie) hanno coordinate:

$$a^* = (v^*_1, \dots, v^*_k, \dots, v^*_m)$$

$$a^- = (v^-_1, \dots, v^-_k, \dots, v^-_m)$$

- a^* rappresenta l'alternativa ideale che ha “benefici” massimi e “costi” minimi.
- a^- rappresenta l'alternativa ideale negativa che ha “benefici” minimi e “costi” massimi.

- Nel caso d'esempio le soluzioni ideali sono:

	g1	g2	g3	g4
a*	0,145	0,192	0,057	0,062
a-	0,318	0,072	0,036	0,022

- *Quarto passo:*
determinazione delle misure di separazione
- Si determinano le distanze dalla soluzione ideale e ideale negativa di ogni alternativa:

$$S_{i^*} = \sqrt{\sum_{k=1}^m (v_{ik} - v^*_k)^2}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$S_{i^-} = \sqrt{\sum_{k=1}^m (v_{ik} - v^-_k)^2}, \quad i = 1, \dots, n$$

- Nel caso d'esempio le distanze dagli ideali sono:

	S_i^*	S_i^-
a_1	0,127	0,175
a_2	0,072	0,150
a_3	0,161	0,106
a_4	0,174	0,126

- Se un'alternativa si avvicina a a^* S_i^* tende a 0 e se si avvicina a a^- S_i^- tende a 0.

- *Quinto passo:*
determinazione della prossimità alla soluzione ideale
- La prossimità di a_i alla soluzione ideale è definita come segue:

$$C_{i^*} = \frac{S_{i^-}}{S_{i^*} + S_{i^-}} \quad 0 \leq C_{i^*} \leq 1$$

- Se a_i coincide con la soluzione ideale: $C_{i^*}=1$
- Se a_i coincide con la soluzione ideale negativa: $C_{i^*}=0$.

- Nel caso d'esempio si ottiene:

	Si*	Si-	Ci*
a_1	0,127	0,175	0,579
a_2	0,072	0,150	0,674
a_3	0,161	0,106	0,397
a_4	0,174	0,126	0,421

- Si ricava quindi il seguente ordinamento:

$a_2 P a_1 P a_4 P a_3$