

## MODELLO DI SOPRAVVIVENZA CON PIÙ CAUSE DI ELIMINAZIONE

Sia una collettività di individui soggetta a  $m$  cause di eliminazione,  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , a due a due incompatibili ed esaustive.

Si definiscono i n.a.

$T_x$  durata di permanenza nella collettività per un individuo presente nella collettività all'età  $x$

$C$  con determinazioni  $1, \dots, m$ , tale che  $(C = j) \Leftrightarrow$  "l'individuo esce per la causa  $\alpha_j$ "

Si introduce un modello probabilistico per la coppia di n.a.  $(T_x, C)$

Sia

${}_t q_x^{(\alpha_j)} = P(T_x \leq t, C = j)$  probabilità che l'individuo presente nella collettività all'età  $x$  esca dalla collettività per la causa  $\alpha_j$  entro l'età  $x+t$

${}_t q_x^{(\tau)} = P(T_x \leq t)$  probabilità che l'individuo presente nella collettività all'età  $x$  esca dalla collettività entro l'età  $x+t$  per una qualsiasi causa

${}_t p_x^{(\tau)} = 1 - {}_t q_x^{(\tau)}$  probabilità che l'individuo presente nella collettività all'età  $x$  sia presente all'età  $x+t$

Modello di sopravvivenza con più cause di eliminazione

Si ha

$${}_t q_x^{(\tau)} = P(T_x \leq t) = \sum_{j=1}^m P(T_x \leq t, C = j) = \sum_{j=1}^m {}_t q_x^{(\alpha_j)}$$

Si definisce **intensità di eliminazione per una qualunque causa**

$$\mu^{(\tau)}(x+t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(T_x \leq t + \Delta t | T_x > t)}{\Delta t}$$

Si ha

$${}_t p_x^{(\tau)} = \exp\left(-\int_0^t \mu^{(\tau)}(x+u) du\right)$$

Si definisce **intensità di eliminazione per la causa  $\alpha_j$**

$$a\mu^{(\alpha_j)}(x+t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(T_x \leq t + \Delta t, C = j | T_x > t)}{\Delta t}$$

Si ha

$$\mu^{(\tau)}(x+t) = \sum_{j=1}^m a\mu^{(\alpha_j)}(x+t)$$

## Modello di sopravvivenza con più cause di eliminazione

Poiché

$$a\mu^{(\alpha_j)}(x+t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(T_x \leq t + \Delta t, C = j | T_x > t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{t+\Delta t}q_x^{(\alpha_j)} - {}_tq_x^{(\alpha_j)}}{\Delta t} \frac{1}{{}_tP_x^{(\tau)}}$$

se esiste finito

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{t+\Delta t}q_x^{(\alpha_j)} - {}_tq_x^{(\alpha_j)}}{\Delta t}$$

e poniamo

$$f_{T,C}(t, j) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{t+\Delta t}q_x^{(\alpha_j)} - {}_tq_x^{(\alpha_j)}}{\Delta t}$$

la distribuzione congiunta della coppia di n.a.  $(T_x, C)$ , si ha

$$a\mu^{(\alpha_j)}(x+t) = \frac{f_{T,C}(t, j)}{{}_tP_x^{(\tau)}} \quad f_{T,C}(t, j) = {}_tP_x^{(\tau)} \cdot a\mu^{(\alpha_j)}(x+t)$$

e quindi per la probabilità di eliminazione per la causa  $\alpha_j$

$${}_tq_x^{(\alpha_j)} = P(T_x \leq t, C = j) = \int_0^t f_{T,C}(u, j) du = \int_0^t {}_uP_x^{(\tau)} \cdot a\mu^{(\alpha_j)}(x+u) du \quad j = 1, \dots, m$$

## Osservazione

Disponendo di osservazioni sulla coppia di n.a.  $(T_x, C)$  si possono stimare le intensità di eliminazione per le varie cause  $a\mu^{(\alpha_j)}(t)$ ,  $t \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, m$ , e quindi la distribuzione congiunta  $f_{T,C}(t, j)$   $t \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, m$

Se si è invece interessati a stimare un modello di sopravvivenza in relazione alla mortalità nella collettività osservata, tenendo conto che sono presenti anche altre cause di uscita, occorre introdurre ulteriori ipotesi.

Siano i n.a.

$T_x^{(j)}$  durata di permanenza nella collettività per un individuo di età  $x$  fino al verificarsi dell'uscita per la causa  $\alpha_j$

Si ha

$$T_x = \min \left( T_x^{(1)}, \dots, T_x^{(m)} \right) \quad \text{e} \quad (C = j) \Leftrightarrow (T_x = T_x^{(j)})$$

Modello di sopravvivenza con più cause di eliminazione

In relazione alle distribuzioni marginali dei n.a.  $T_x^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, m$  si definisce

Def.: **intensità marginale di eliminazione per la causa  $\alpha_j$**

$$\mu^{(\alpha_j)}(x+t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(T_x^{(j)} \leq t + \Delta t | T_x^{(j)} > t)}{\Delta t}$$

Def.: **probabilità assoluta di sopravvivenza e, rispettivamente, di eliminazione**

$${}_t p_x'^{(\alpha_j)} = \exp\left(-\int_0^t \mu^{(\alpha_j)}(x+u) du\right) \quad {}_t q_x'^{(\alpha_j)} = 1 - {}_t p_x'^{(\alpha_j)}$$

Osservazione

Sono dette probabilità relative di eliminazione per le diverse cause

$${}_t q_x^{(\alpha_j)} = P(T_x \leq t, C = j) = \int_0^t f_{T,C}(u, j) du = \int_0^t {}_u p_x^{(\tau)} \cdot a\mu^{(\alpha_j)}(x+u) du \quad j = 1, \dots, m$$

## Modello di sopravvivenza con più cause di eliminazione

In generale si ha

$$\mu^{(\alpha_j)}(t) \neq a\mu^{(\alpha_j)}(t) \quad j = 1, \dots, m \quad t \geq 0$$

Nell'ipotesi

$$\mu^{(\alpha_j)}(t) = a\mu^{(\alpha_j)}(t) \quad j = 1, \dots, m \quad t \geq 0$$

sussiste la seguente **relazione di Karup**

$${}_t p_x^{(\tau)} = \prod_{j=1}^m {}_t p_x^{(\alpha_j)}$$

e si ha allora

$$f_{T,C}(t, j) = {}_t p_x^{(\tau)} \cdot a\mu^{(\alpha_j)}(x+t) = \left( \prod_{j=1}^m {}_t p_x^{(\alpha_j)} \right) \mu^{(\alpha_j)}(x+t)$$

Si dimostra che se i n.a.  $T_x^{(1)}, \dots, T_x^{(m)}$  sono stocasticamente indipendenti allora

$$\mu^{(\alpha_j)}(x+t) = a\mu^{(\alpha_j)}(x+t) \quad t \geq 0$$

Nella realtà i n.a.  $T_x^{(1)}, \dots, T_x^{(m)}$  presentano delle relazioni di dipendenza.

Si può allora porre il problema se a partire dai dati osservati, che consentono di stimare la distribuzione congiunta di  $(T_x, C)$ , si è in grado di stimare pure la distribuzione congiunta di  $(T_x^{(1)}, \dots, T_x^{(m)})$ .

Senza introdurre ipotesi aggiuntive sui legami di dipendenza tra tali n.a., la risposta è negativa.

Sussiste infatti il problema della non identificabilità:

Esistono diverse distribuzioni congiunte di  $(T_x^{(1)}, \dots, T_x^{(m)})$  che danno luogo alla stessa distribuzione congiunta della coppia di n.a.  $(T_x, C)$