STIMA DI MODELLI DI SOPRAVVIVENZA NON PARAMETRICI

USCITE PER MORTE E PER ALTRA CAUSA

Con riferimento alla classe di età $]x, x+1]$ supponiamo di avere osservato n_x individui e di disporre di dati individuali esatti riassunti, per ogni individuo i che contribuisce alla osservazione per tale classe di età, dal vettore delle durate

$$(r_i, s_i, t_i, k_i,) \qquad\qquad i = 1, \ldots, n_x$$

essendo

$x + r_i$ l'età di ingresso in osservazione nella classe di età $]x, x+1]$ con $0 \le r_i < 1$

$x + s_i$ l'età di uscita pianificata dalla osservazione per la classe di età $]x, x+1]$ con $0 < s_i \le 1$

$x + t_i$ l'età di uscita per morte se $\theta_i = x + t_i$, altrimenti $t_i = 0$

$x + k_i$ l'età di uscita per altra causa se $\phi_i = x + k_i$, altrimenti $k_i = 0$

<u>Nota</u>: il riferimento può essere sia l'anno di vita, sia l'anno di polizza (o l'anno di calendario).

Modello di sopravvivenza a due cause di eliminazione: morte ed altra causa

Sia una collettività di individui soggetta a due cause di eliminazione:

d morte

w altra causa

Sia

T_x durata di permanenza nella collettività per un individuo presente nella collettività all'età x

$$T_x = \min\left(T_x^{(d)}, T_x^{(w)}\right)$$

essendo

$T_x^{(d)}$ durata di permanenza nella collettività finché non si ha l'uscita per morte, per un individuo presente nella collettività all'età x

$T_x^{(w)}$ durata di permanenza nella collettività finché non si ha l'uscita per altra causa, per un individuo presente nella collettività all'età x

<u>Ipotesi</u>: **uscite non informative**

$$\mu^{(d)}(t) = a\mu^{(d)}(t) \qquad t \geq 0$$

$$\mu^{(w)}(t) = a\mu^{(w)}(t) \qquad t \geq 0$$

essendo

$$\mu^{(d)}(x+t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\left(T_x^{(d)} \leq t + \Delta t \middle| T_x^{(d)} > t\right)}{\Delta t}$$

$$\mu^{(w)}(x+t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\left(T_x^{(w)} \leq t + \Delta t \middle| T_x^{(w)} > t\right)}{\Delta t}$$

le <u>intensità marginali di eliminazione</u> e

$$a\mu^{(d)}(x+t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\left(T_x \leq t + \Delta t, C = 1 \middle| T_x > t\right)}{\Delta t}$$

$$a\mu^{(w)}(x+t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\left(T_x \leq t + \Delta t, C = 2 \middle| T_x > t\right)}{\Delta t}$$

le <u>intensità di uscita per le varie cause</u>, dove $C = 1$ denota l’evento “uscita per morte” e $C = 2$ denota l’evento uscita per altra causa

In ipotesi di uscite non informative sussiste inoltre la **relazione di Karup**

$$ {}_t p_x^{(\tau)} = {}_t p_x'^{(d)} \, {}_t p_x'^{(w)} $$

essendo

$$ {}_t p_x'^{(d)} = \exp\left(-\int_0^t \mu^{(d)}(x+u)\,du \right) \qquad {}_t p_x'^{(w)} = \exp\left(-\int_0^t \mu^{(w)}(x+u)\,du \right) $$

$ {}_t q_x^{(\tau)} = P(T_x \le t) $ probabilità che l'individuo presente nella collettività all'età x esca dalla collettività entro l'età $x+t$ per una qualsiasi causa

$ {}_t p_x^{(\tau)} = 1 - {}_t q_x^{(\tau)} $ probabilità che l'individuo presente nella collettività all'età x sia presente all'età $x+t$

Si ottengono allora le seguenti espressioni per le probabilità di uscita per morte e, rispettivamente, per altra causa

$$ {}_{s-r}q_{x+r}^{(d)} = P(T_{x+r} \le s-r, C=1) = \int_r^s f_{T,C}(u-r,1)du = \int_r^s {}_{u-r}p_{x+r}^{(\tau)} \cdot a\mu^{(d)}(x+u)du $$

$$ = \int_r^s {}_{u-r}p_{x+r}'^{(d)} \cdot {}_{u-r}p_{x+r}'^{(w)} \cdot \mu^{(d)}(x+u)du $$

$$ {}_{s-r}q_{x+r}^{(w)} = P(T_{x+r} \le s-r, C=2) = \int_r^s f_{T,C}(u-r,2)du = \int_r^s {}_{u-r}p_{x+r}^{(\tau)} \cdot a\mu^{(w)}(x+u)du $$

$$ = \int_r^s {}_{u-r}p_{x+r}'^{(d)} \cdot {}_{u-r}p_{x+r}'^{(w)} \cdot \mu^{(w)}(x+u)du $$

Ed è inoltre

$$ {}_{s-r}q_{x+r}^{(\tau)} = {}_{s-r}q_{x+r}^{(d)} + {}_{s-r}q_{x+r}^{(w)} $$