SPAZI METRICI

FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI REALI E A VALORI VETTORIALI

Siano $n, m \geq 1$ interi

$A \subseteq \mathbb{R}^n \quad f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$n = 1$ funzione di una variabile reale

$\boxed{n \geq 2}$ funzione di più variabili reali

$m = 1$ funzione a valori reali o scalari

$\boxed{m \geq 2}$ funzione a valori vettoriali

Notazione

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

$$x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n, \quad x_1^0, \dots, x_n^0 \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^m \ni f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x), \dots, f_m(x)), \quad x \in A$$

$$f_i: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, m \quad \text{componenti della funzione } f$$

In $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$

$$P = (x, y) \in \mathbb{R}, \quad x, y \in \mathbb{R}; \quad P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}$$

$$f(P) = f(x, y)$$

$P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x, y, z \in \mathbb{R}$; $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$

$$f(P) = f(x, y, z)$$

STRUTTURE SU $\mathbb{R}^n$

1) SPAZIO METRICO

DEFINIZIONE SIA X UN INSIEME. UNA FUNZIONE $d : X \times X \to \mathbb{R}$ SI DICE DISTANZA O METRICA SU X SE VALGONO

1) $d(x, y) \geq 0$ $\forall x, y \in X$; $d(x, y) = 0$ SE E SOLO SE $x = y$
2) $d(x, y) = d(y, x)$ $\forall x, y \in X$ SIMMETRIA
3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ $\forall x, y, z \in X$ DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

DEFINIZIONE LA COPPIA (X, d) DOVE X È UN INSIEME E d È UNA DISTANZA SU X SI DICE SPAZIO METRICO

NOTAZIONE SIANO $x_0 \in X$ E $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$

$$B_r(x_0) = B(x_0, r) = \{ x \in X : d(x, x_0) < r \}$$

PALLA O INTORNO SFERICO DI CENTRO x_0 E RAGGIO r

ESEMPIO $\mathbb{R}$

DISTANZA EUCLIDEA $d(x, y) = |x - y|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

DEFINIZIONE $n \geq 1$; $\mathbb{R}^n$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$d(x,y) = d_2(x,y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$$

DISTANZA EUCLIDEA o PITAGORICA

DIMOSTRIAMO CHE VALGONO LE PROPRIETÀ DI UNA DISTANZA

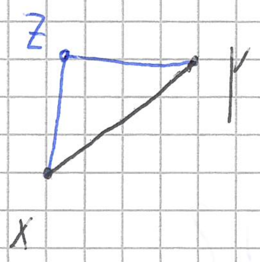
1) $d(x,y) \in \mathbb{R}$, $d(x,y) \geq 0$ OVVIO

$d(x,y) = 0 \iff |x_i - y_i|^2 = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \iff |x_i - y_i| = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

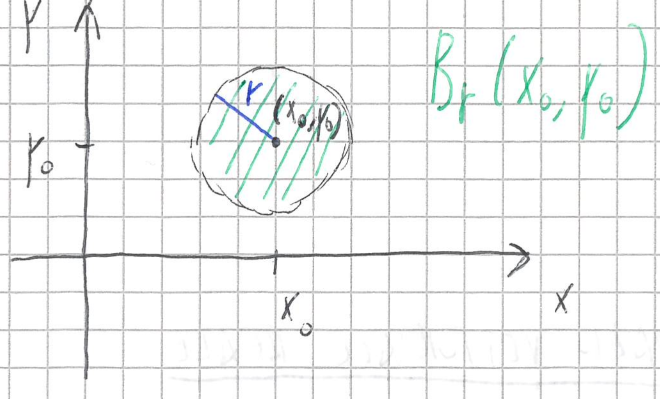
$\iff x_i = y_i \quad \forall i = 1, \dots, n \iff x = y$ IN $\mathbb{R}^n$

2) $d(x,y) = d(y,x)$ OVVIO

3) LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE VERRÀ DIMOSTRATA IN SEGUITO



ESEMPIO SIA $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$

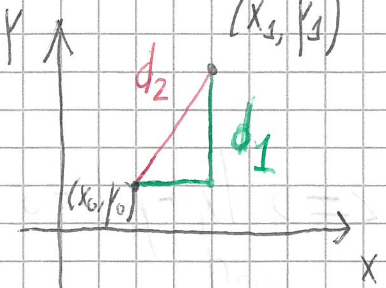


Esempio $\mathbb{R}^n$ si può dotare di altre metriche. Ad esempio

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$$

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_1-y_1|, \dots, |x_n-y_n|\} \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$$

Esercizio Dimostrare che d_1 e d_∞ sono distanze in $\mathbb{R}^n$



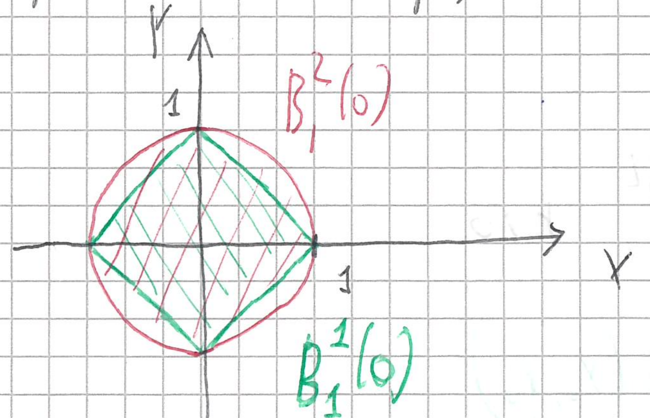
d_1 "MANHATTAN DISTANCE"

d_∞ ?

$$B_1^1(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_1((x,y),(0,0)) < 1\}$$

$$B_1^2(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_2((x,y),(0,0)) < 1\}$$

$$B_1^\infty(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_\infty((x,y),(0,0)) < 1\}$$



$B_1^\infty(0)$?

2) Spazio vettoriale

V spazio vettoriale in $\mathbb{R}^n$: spazio vettoriale reale

$n \geq 1$ intero: $\mathbb{R}^n$ spazio vettoriale reale di dimensione n

<u>Definizione</u> V, W spazi vettoriali reali

$L: V \to W$ si dice <u>lineare</u> se

$$L[\lambda u + \mu v] = \lambda L[u] + \mu L[v] \quad \forall u, v \in V \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

<u>Proposizione</u> Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V. Allora $\forall v \in V$

esistono e sono unici $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ si dicono le <u>coordinate</u> di v rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_n\}$

L'applicazione

$$V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$v \longrightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$ <u>coordinate</u> di v

è un <u>isomorfismo</u> tra <u>spazi vettoriali</u> (biiettiva, lineare con inversa lineare)

<u>Base canonica in $\mathbb{R}^n$</u>

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

[In $\mathbb{R}^3$ e_1, e_2, e_3 oppure $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$]

Se $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, allora x coincide con le sue <u>coordinate</u>

RISPETTO ALLA BASE CANONICA, CIOÈ

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

DENOTIAMO $\forall i = 1, \dots, n$

$$\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad \underline{\text{PROIEZIONE}} \text{ SULL'} \underline{i\text{-ESIMA}} \ \underline{\text{COORDINATA}}$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \to x_i$$

NOTIAMO CHE È UNA APPLICAZIONE LINEARE

__ALTRE NOTAZIONI__ $\pi_i = x_i = dx_i \qquad i = 1, \dots, n$

__RAPPRESENTAZIONE DI APPLICAZIONI LINEARI (RISPETTO ALLE BASI CANONICHE)__

$n, m \geq 1$

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{ L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : L \text{ LINEARE} \}$$

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^* \qquad \text{SPAZIO DUALE DI } \mathbb{R}^n$$

$$M^{m \times n}(\mathbb{R}) = \left\{ A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n} : A \text{ MATRICE } m \times n \text{ A VALORI REALI} \right\}$$

__OSSERVAZIONE__ $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ E $M^{m \times n}(\mathbb{R})$ SONO SPAZI VETTORIALI

$L, \tilde{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ LINEARI, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$(\lambda L + \mu \tilde{L}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ DOVE

$$(\lambda L + \mu \tilde{L})[x] = \lambda L[x] + \mu \tilde{L}[x] \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

È LINEARE

$A, \tilde{A} \in \mathcal{M}^{m \times n}(\mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$; $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$

$(\lambda A + \mu \tilde{A}) = [\lambda a_{ij} + \mu \tilde{a}_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$

*

SIA ORA $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ CIOÈ $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ LINEARE

$e_1, \dots, e_n$ BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^n$

$\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_m$ BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^m$

$$\underset{n \times 1}{x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}} = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in \mathbb{R}^n \; ; \quad \underset{m \times 1}{y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}} = \sum_{i=1}^{m} y_i \tilde{e}_i \in \mathbb{R}^m$$

VETTORI COLONNA

$\forall j = 1, \dots, n$ SIA $L[e_j] = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \tilde{e}_i = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$

CIOÈ a_{ij} i-ESIMA COORDINATA DI $L[e_j]$ $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$

SIA $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n} \in \mathcal{M}^{m \times n}(\mathbb{R})$

A SI DICE <u>MATRICE ASSOCIATA</u> ALL'APPLICAZIONE LINEARE L (RISPETTO ALLE BASI CANONICHE) E VALE

$\forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$\underset{m\times 1}{\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}} = y = L[x] = \underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{x}$$

MOLTIPLICAZIONE RIGHE PER COLONNE

INFATTI

$$L[x] = L\left[\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right] = \sum_{j=1}^{n} x_j L[e_j] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \tilde{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) \tilde{e}_i$$

NOTIAMO INFINE CHE LA j-ESIMA COLONNA DI A È $L[e_j]$, $j=1, \ldots, n$

OSSERVAZIONI

1) DATA $A \in M^{m\times n}(\mathbb{R})$ DEFINIAMO $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ TALE CHE

$$L[x] = A \cdot x \quad \forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

ALLORA L È LINEARE E A È LA SUA MATRICE ASSOCIATA

QUINDI

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \longrightarrow M^{m\times n}(\mathbb{R})$$
$$L \longrightarrow A$$

È UN ISOMORFISMO FRA SPAZI VETTORIALI

2) $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ E $M^{m\times n}(\mathbb{R})$ HANNO DIMENSIONE $m \cdot n$

3) $(\mathbb{R}^n)^*$ HA DIMENSIONE n E $\{\bar{\pi}_1, \ldots, \bar{\pi}_n\}$ È UNA SUA BASE (LA BASE DUALE ASSOCIATA ALLA BASE CANONICA)

INFATTI, SIA $L \in (\mathbb{R}^n)^*$. ALLORA SIA

$$A = [a_1, \dots, a_n] \quad (\underline{\text{VETTORE}} \ \underline{\text{RIGA}} \ 1 \times n)$$

LA MATRICE ASSOCIATA CIOÈ $a_j = L[e_j] \quad \forall j = 1, \dots, n.$

QUINDI

$$y = L[x] \iff y = A \cdot x \iff y = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \pi_j\right)[x]$$

4) $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ LINEARE

ALLORA $L = (L_1, \dots, L_m)$ DOVE $L_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \quad \forall i = 1, \dots, m$

QUINDI

$$L[(x_1, \dots, x_n)] = \begin{bmatrix} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \\ \vdots \\ a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \end{bmatrix}$$

<u>DEFINIZIONE</u>

- X, Y INSIEMI QUALUNQUE

  $f : X \to Y$ SI DICE <u>FUNZIONE COSTANTE</u> SE $\exists \, y^0 \in Y$ TALE CHE

$$f(x) = y^0 \quad \forall x \in X$$

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ SI DICE <u>AFFINE</u> SE ESISTE $y^0 \in \mathbb{R}^m$ E $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ TALI CHE

$$f(x) = y^0 + L[x] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

3) SPAZIO VETTORIALE NORMATO

DEFINIZIONE Sia V uno spazio vettoriale reale

Una funzione $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ si dice NORMA su V se valgono

a) $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V$; $\|v\| = 0$ se e solo se $v = 0$

b) $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\| \quad \forall v \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

c) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in V$ DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

DEFINIZIONE La coppia $(V, \|\cdot\|)$ dove V è uno spazio vettoriale reale e $\|\cdot\|$ è una norma su V si dice SPAZIO VETTORIALE NORMATO

OSSERVAZIONE $v \in V$, la norma di v, $\|v\|$, rappresenta la lunghezza di v

ESEMPIO $\mathbb{R}$, $\|\cdot\| = |\cdot|$

DEFINIZIONE $n \geq 1$; $\mathbb{R}^n$

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$ NORMA EUCLIDEA

Dimostriamo che valgono le proprietà di una norma

a) $\|x\| \in \mathbb{R}$, $\|x\| \geq 0$ ovvio

$\|x\| = 0 \iff |x_i|^2 = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \iff |x_i| = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

$\iff x_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \iff x = 0$ in $\mathbb{R}^n$

b) $$\|\lambda x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\lambda|^2 |x_i|^2}$$
$$= \sqrt{|\lambda|^2 \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = |\lambda| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = |\lambda| \, \|x\|$$

c) LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE VERRÀ DIMOSTRATA IN SEGUITO

<u>OSSERVAZIONE</u> SIA $(V, \|\cdot\|)$ UNO SPAZIO VETTORIALE NORMATO

SIA $d(u,v) = \|u-v\| \quad \forall u,v \in V$

ALLORA d È UNA <u>DISTANZA</u> (LA <u>DISTANZA</u> <u>ASSOCIATA</u> ALLA <u>NORMA</u>)

<u>DIMOSTRAZIONE</u>

1), 2) OVVI

3) $$d(u,v) = \|u-v\| = \|u-w+w-v\| \underset{c)}{\leq} \|u-w\| + \|w-v\| = d(u,w) + d(w,v)$$

$\square$

NOTIAMO CHE LA DISTANZA EUCLIDEA d_2 È LA DISTANZA ASSOCIATA ALLA NORMA EUCLIDEA $\|\cdot\|_2$

(SE DIMOSTRIAMO c) PER $\|\cdot\|_2$ VALE 3) PER d_2)

<u>ESEMPIO</u> $\mathbb{R}^n$ SI PUÒ DOTARE DI <u>ALTRE</u> NORME. AD ESEMPIO

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

LE CUI DISTANZE ASSOCIATE SONO, RISPETTIVAMENTE, d_1 E d_∞

ESERCIZIO DIMOSTRARE CHE $\|\cdot\|_1$ E $\|\cdot\|_\infty$ SONO NORME SU $\mathbb{R}^n$

OGNI SPAZIO VETTORIALE NORMATO È, IN MANIERA NATURALE, ANCHE UNO SPAZIO METRICO CON LA DISTANZA ASSOCIATA ALLA NORMA

4) PRODOTTO SCALARE

DEFINIZIONE SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ O $\mathbb{C}$

ALLORA $\langle\cdot,\cdot\rangle: V\times V \to \mathbb{K}$ SI DICE PRODOTTO SCALARE SU V SE VALGONO

i) $\langle \lambda u+\mu v, w\rangle = \lambda\langle u,w\rangle + \mu\langle v,w\rangle \quad \forall u,v,w\in V,\ \forall \lambda,\mu\in\mathbb{K}$

LINEARITÀ NELLA PRIMA VARIABILE

ii) $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle \quad \forall u,v\in V \quad \mathbb{K}=\mathbb{R}$ SIMMETRIA

$\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle} \quad \forall u,v\in V \quad \mathbb{K}=\mathbb{C}$ HERMITIANITÀ

iii) $\langle v,v\rangle \geq 0 \quad \forall v\in V;\ \langle v,v\rangle = 0$ SE E SOLO SE $v=0$

OSSERVAZIONE

$\boxed{\mathbb{K}=\mathbb{R}}$ i) + ii) $\Rightarrow$ LINEARITÀ ANCHE NELLA SECONDA VARIABILE

$\langle u, \lambda v+\mu w\rangle = \lambda\langle u,v\rangle + \mu\langle u,w\rangle \quad \forall u,v,w\in V,\ \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

$\boxed{\mathbb{K}=\mathbb{C}}$ i) + ii) $\Rightarrow$ SESQUILINEARITÀ NELLA SECONDA VARIABILE

$\langle u, \lambda v+\mu w\rangle = \bar\lambda\langle u,v\rangle + \bar\mu\langle u,w\rangle \quad \forall u,v,w\in V,\ \forall\lambda,\mu\in\mathbb{C}$

DEFINIZIONE La coppia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ dove V è uno spazio vettoriale reale (o complesso) e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare su V si dice spazio vettoriale dotato di prodotto scalare

ESEMPI

$\mathbb{R}^n$ $\quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$\mathbb{C}^n$ $\quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n$

ALTRE NOTAZIONI

$\boxed{\langle x, y \rangle}$; $(x|y)$; (x, y) ; $\boxed{x \cdot y}$

PROPOSIZIONE Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su V

Allora

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \quad \forall v \in V$$

è una norma su V, la norma associata al prodotto scalare

DIMOSTRAZIONE

a) $\|v\| \in \mathbb{R}$; $\|v\| \geq 0$ ovvio

$\|v\| = 0 \iff \sqrt{\langle v, v \rangle} = 0 \iff \langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$

b) $\|\lambda v\| \overset{?}{=} \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle v,v \rangle} = |\lambda| \, \|v\|$

c) $\|u+v\| \overset{?}{\leq} \|u\| + \|v\|$

EQUIVALENTEMENTE

$$\langle u+v, u+v \rangle \overset{?}{\leq} \left(\sqrt{\langle u,u \rangle} + \sqrt{\langle v,v \rangle} \right)^2 = \langle u,u \rangle + \langle v,v \rangle + 2\|u\| \, \|v\|$$

$$\|$$

$$\langle u,u \rangle + 2\langle u,v \rangle + \langle v,v \rangle$$

QUINDI BASTA DIMOSTRARE CHE

$$\langle u, v \rangle \leq \|u\| \, \|v\|$$

E QUESTO SEGUE IMMEDIATAMENTE DALLA SEGUENTE

DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY - SCHWARZ

SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE REALE E SIA $\langle \cdot, \cdot \rangle$ UN PRODOTTO SCALARE IN V. ALLORA

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \, \|v\| \qquad \forall u, v \in V$$

DIMOSTRAZIONE

SE $v = 0$, $\langle u, v \rangle = 0$ E $\|v\| = 0$ QUINDI LA DISUGUAGLIANZA VALE

SIA $v \neq 0$. ALLORA $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = \langle u,u \rangle + 2\lambda \langle u,v \rangle + \lambda^2 \langle v,v \rangle$$

$$= a^2 + 2b\lambda + c^2 \lambda^2 \quad \text{con } c^2 = \langle v,v \rangle > 0$$

QUINDI

$$0 \leq \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \left(a^2 + 2b\lambda + c^2\lambda^2\right) = a^2 + 2b\left(-\frac{b}{c^2}\right) + c^2\left(-\frac{b}{c^2}\right)^2 =$$

$$= a^2 - \frac{2b^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = a^2 - \frac{b^2}{c^2} \quad \text{CIOÈ} \quad b^2 \leq a^2c^2$$

$$b^2 = (\langle u, v\rangle)^2 \leq a^2c^2 = \langle u,u\rangle \langle v,v\rangle$$

DA CUI SI OTTIENE IMMEDIATAMENTE LA TESI $\square$

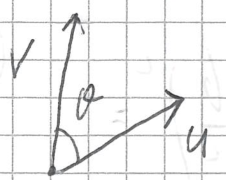
OSSERVAZIONE 1) LA NORMA EUCLIDEA SU $\mathbb{R}^n$ PROVIENE DAL PRODOTTO SCALARE SU $\mathbb{R}^n$. LA PROPOSIZIONE PRECEDENTE IMPLICA CHE VALE c), LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE, PER $\|\cdot\|_2$ E QUINDI ANCHE 3), LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE, PER d_2, LA DISTANZA EUCLIDEA

2) UN PRODOTTO SCALARE PERMETTE DI DEFINIRE LA LUNGHEZZA DEI VETTORI $v \in V$, TRAMITE $\|v\|$ LA NORMA ASSOCIATA AL PRODOTTO SCALARE, E L'ANGOLO FRA DUE VETTORI NON NULLI

SIANO $u, v \neq 0$. ALLORA

$$\langle u, v\rangle = \alpha \|u\| \|v\| \quad \text{CON} \quad -1 \leq \alpha \leq 1$$

QUINDI ESISTE $\theta \in [0, \pi]$ TALE CHE $\cos\theta = \alpha$ E θ È L'ANGOLO COMPRESO FRA u E v



$$\langle u, v \rangle = \cos\theta \, \|u\| \, \|v\|$$

Esercizio Sia $A \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$. Allora $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$ (vettori colonna) si ha

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle$$ dove A^T è la matrice trasposta di A

Esempio Sia $B \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$ una matrice ortogonale cioè tale che $B^T B = B B^T = I_n$ $\quad (B^T = B^{-1})$

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$$

Allora $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che $L[x] = B \cdot x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$

è una isometria. Infatti $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle Bx, By \rangle = \langle x, B^T B y \rangle = \langle x, y \rangle$$

In particolare $\|Bx\| = \|x\| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$ e L conserva le lunghezze e gli angoli

Definizione Sia $x^0 \in \mathbb{R}^n$, sia $B \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$, B ortogonale. Allora $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che $T(x) = x^0 + Bx \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$ si dice cambiamento rigido di coordinate

PROPRIETÀ DEGLI SPAZI METRICI

(X, d) SPAZIO METRICO

DEFINIZIONE SIA $x_0 \in X$. DIREMO CHE $U \subseteq X$ È UN INTORNO DI x_0 SE ESISTE $r > 0$ TALE CHE $x_0 \in B(x_0, r) \subseteq U$

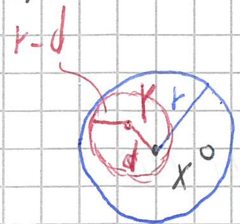
DIREMO CHE $A \subseteq X$ È UN INSIEME APERTO SE A È UN INTORNO DI OGNI SUO PUNTO, CIOÈ SE $\forall x_0 \in A$ ESISTE $r > 0$ (DIPENDENTE DA x_0!) TALE CHE $B(x_0, r) \subseteq A$

DIREMO CHE $C \subseteq X$ È UN INSIEME CHIUSO SE IL COMPLEMENTARE DI C IN X, $C^c = X \setminus C$, È UN INSIEME APERTO

DEFINIZIONE LA FAMIGLIA DEI SOTTOINSIEMI APERTI DI X È DETTA TOPOLOGIA ASSOCIATA ALLA DISTANZA d

OSSERVAZIONE • $\forall x_0 \in X$ $\forall r > 0$ SI HA CHE $B(x_0, r)$ È UN INSIEME APERTO. INFATTI, SIA $y \in B(x_0, r)$ E SIA $d = d(y, x_0) < r$.

LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE IMPLICA CHE $B(y, r-d) \subseteq B(x_0, r)$



• $U \subseteq X$ È UN INTORNO DI $x_0 \in X$ SE E SOLO SE ESISTE A APERTO TALE CHE

$$x_0 \in A \subseteq U$$

ESEMPIO $\emptyset, X$ SONO APERTI (E QUINDI ANCHE CHIUSI)

PROPOSIZIONE

- SIA $\{A_i\}_{i \in I}$ UNA FAMIGLIA (QUALUNQUE) DI APERTI, CIOÈ A_i APERTO $\forall i \in I$

ALLORA $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ È APERTO

- SIANO $A_1, \dots, A_n$ UN NUMERO FINITO DI APERTI, CIOÈ A_i APERTO $\forall i = 1, \dots, n$

ALLORA $\tilde{A} = A_1 \cap \dots \cap A_n$ È APERTO

- SIA $\{C_i\}_{i \in I}$ UNA FAMIGLIA (QUALUNQUE) DI CHIUSI, CIOÈ C_i CHIUSO $\forall i \in I$

ALLORA $C = \bigcap_{i \in I} C_i$ È CHIUSO

- SIANO $C_1, \dots, C_n$ UN NUMERO FINITO DI CHIUSI, CIOÈ C_i CHIUSO $\forall i = 1, \dots, n$

ALLORA $\tilde{C} = C_1 \cup \dots \cup C_n$ È CHIUSO.

DIMOSTRAZIONE

- SIA $x_0 \in A$; $\exists i \in I$ TALE CHE $x_0 \in A_i \underset{A_i \text{ APERTO}}{\Longrightarrow} \exists r > 0$ TALE CHE

$B_r(x_0) \subseteq A_i \subseteq A$

- SIA $x_0 \in \tilde{A} = A_1 \cap \dots \cap A_n$; $\forall i = 1, \dots, n$ $\exists r_i > 0$ TALE CHE

$B_{r_i}(x_0) \subseteq A_i$, DA $r = \min\{r_1, \dots, r_n\} > 0$. ALLORA

$B_r(x_0) \subseteq A_i$ $\forall i = 1, \dots, n$ E QUINDI $B_r(x_0) \subseteq \tilde{A}$

$\bullet \ C = \left(\bigcup_{i \in I} C_i^c\right)^c \qquad \bullet \ \tilde{C} = (C_1^c \cap \ldots \cap C_n^c)^c \qquad \square$

Definizione Sia $S \subseteq X$

Diremo che $x \in X$ è un punto interno a S se S è un intorno di x

Diremo interno di S, $\mathring{S}$, l'insieme dei punti interni a S, cioè

$$\mathring{S} = \{x \in X : S \text{ è un intorno di } x\}$$

Proposizione

i) $\mathring{S} \subseteq S$ ii) $\mathring{S}$ è aperto

iii) $\forall A \subseteq S$ aperto si ha $A \subseteq \mathring{S}$

Quindi $$\mathring{S} = \bigcup \{A : A \subseteq S, A \text{ aperto}\}$$

Dimostrazione i) ovvio

iii) Sia $A \subseteq S$ aperto. Allora $\forall x \in A$, A è un intorno di x, quindi anche S è un intorno di x, quindi x è interno a S, cioè $A \subseteq \mathring{S}$

ii) Sia $x \in \mathring{S}$. Allora esiste un ~~intorno~~ aperto A tale che $x \in A \subseteq S$ (S intorno di x). Ma $x \in A \subseteq \mathring{S}$, quindi $\mathring{S}$ è un intorno di x $\square$

PROPOSIZIONE $A \subseteq X$

A APERTO SE E SOLO SE $A = \mathring{A}$

DIMOSTRAZIONE

$\mathring{A}$ APERTO, QUINDI $A = \mathring{A}$ IMPLICA CHE A È APERTO

A APERTO IMPLICA CHE $A \subseteq \mathring{A} \subseteq A$ QUINDI $A = \mathring{A}$ $\square$

DEFINIZIONE SIA $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ UNA SUCCESSIONE DI PUNTI DI X

DIREMO CHE $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ È UNA SUCCESSIONE CONVERGENTE SE

ESISTE $x \in X$ TALE CHE $\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$

IN TAL CASO SCRIVEREMO $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$

OSSERVAZIONE 1) IL LIMITE, SE ESISTE, È UNICO CIOÈ

$\lim_{n \to \infty} x_n = x$ E $\lim_{n \to \infty} x_n = y \implies x = y$

2) $\lim_{n \to \infty} x_n = x \iff$

$\forall r > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n}$ SI HA $d(x_n, x) < r$ CIOÈ $x_n \in B_r(x)$

$\iff$

$\forall U$ INTORNO DI x $\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n}$ SI HA $x_n \in U$

DEFINIZIONE SIA $S \subseteq X$ E $x \in X$

DIREMO CHE $x \in X$ È UN <u>PUNTO ADERENTE</u> A S SE ESISTE $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ TALE CHE $\lim_{n\to\infty} y_n = x$

DIREMO <u>CHIUSURA DI S</u>, $\overline{S}$, L'INSIEME DEI PUNTI ADERENTI A S, CIOÈ

$$\overline{S} = \{x \in X : x \text{ È ADERENTE A } S\}$$

DIREMO CHE $x \in X$ È UN <u>PUNTO DI ACCUMULAZIONE</u> PER S SE ESISTE $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S\setminus\{x\}$ TALE CHE $\lim_{n} y_n = x$

DIREMO <u>DERIVATO DI S</u>, $D(S)$, L'INSIEME DEI PUNTI DI ACCUMULAZIONE PER S, CIOÈ

$$D(S) = \{x \in X : x \text{ È PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER } S\}$$

<u>OSSERVAZIONE</u> 1) $x \in X$ È UN PUNTO ADERENTE A S $\iff$ $\forall r>0\ \exists y \in B_r(x) \cap S$ $\iff$ $\forall U$ INTORNO DI x $\exists y \in U \cap S$

<u>DIMOSTRAZIONE</u> LA SECONDA EQUIVALENZA È OVVIA. DIMOSTRIAMO LA PRIMA EQUIVALENZA

"$\Rightarrow$" SE x È UN PUNTO ADERENTE A S, ESISTE $\{y_n\} \subseteq S$ TALE CHE $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, QUINDI $\forall r>0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n}\ \ y_n \in B_r(x)$ E QUINDI $y_n \in B_r(x) \cap S$

"$\Leftarrow$" $\forall n \in \mathbb{N}$, sia $r = 1/n$ e $y_n \in B_{1/n}(x) \cap S$.

Allora $\{y_n\} \subseteq S$ e $d(y_n, x) < 1/n$ da cui segue facilmente

che $\lim_{n \to \infty} y_n = x$ $\square$

2) $x \in X$ è un punto di accumulazione per S $\Longleftrightarrow$

$\forall r > 0$ $\exists y \in B_r(x) \cap S$, $\boxed{y \neq x}$ $\Longleftrightarrow$

$\forall U$ intorno di x $\exists y \in U \cap S$, $\boxed{y \neq x}$

Dimostrazione analoga all'osservazione 1) $\square$

3) • Chiaramente se $x \in X$ è un punto di accumulazione per S, allora x è aderente a S; se $x \notin S$ è aderente a S, allora x è un punto di accumulazione per S

• Se $x \in S$, allora prendendo $y_n = x$ $\forall n \in \mathbb{N}$, otteniamo che x è aderente a S; se $x \in \mathring{S}$, allora x è un punto di accumulazione per S

Quindi $\mathring{S} \subseteq D(S)$, $S \cup D(S) \subseteq \overline{S}$ e $\overline{S} \setminus S \subseteq D(S)$ cioè $\boxed{\overline{S} = S \cup D(S)}$

4) Se $x \in S \setminus D(S)$, allora esiste U intorno di x tale che

$U \cap S = \{x\}$, quindi x è un <u>punto isolato</u> di S

<u>Proposizione</u>

i) $\overline{S}$ è chiuso; ii) $\forall C \supseteq S$ chiuso si ha $\overline{S} \subseteq C$

Quindi

$\overline{S} = \bigcap\{C : C \supseteq S,\ C \text{ chiuso}\}$

<u>Dimostrazione</u> ii) Sia C chiuso con $S \subseteq C$. Allora $A = C^c$ è aperto e $A \cap S = \emptyset$. Quindi se $x \in A$, x non può essere aderente a S da cui $A \subseteq (\bar{S})^c$ cioè $\bar{S} \subseteq C$

i) Sia $x \in (\bar{S})^c$ cioè $x \notin \bar{S}$. Allora $\exists U$ intorno di x tale che $U \cap S = \emptyset$ cioè $\exists A$ aperto tale che $x \in A \subseteq U \subseteq S^c$, cioè ~~quindi~~ $A \cap S = \emptyset$. Quindi se $y \in A$, y non può essere aderente a S da cui $x \in A \subseteq (\bar{S})^c$ cioè x è interno a $(\bar{S})^c$. Quindi $(\bar{S})^c$ è aperto, di conseguenza $\bar{S}$ è chiuso $\square$

<u>Proposizione</u> $C \subseteq X$

C chiuso se e solo se $C = \bar{C}$

<u>Dimostrazione</u>

$\bar{C}$ chiuso, quindi $C = \bar{C}$ implica che C è chiuso

C chiuso implica che $C \subseteq \bar{C} \subseteq C$ quindi $C = \bar{C}$ $\square$

<u>Corollario</u> $C \subseteq X$ è chiuso se e solo se $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C$ convergente a $x \in X$ si ha $x \in C$

<u>Dimostrazione</u> Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C$ tale che $\lim_{n \to \infty} x_n = x$.

Allora $x \in \bar{C}$; quindi se C è chiuso, da $C = \bar{C}$ ricaviamo che $x \in C$

Viceversa, $\forall x \in \overline{C}$ esiste $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ tale che $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$

Quindi $x \in C$ cioè $\overline{C} \subseteq C$ da cui $\overline{C} = C$, quindi C è chiuso

$\square$

<u>Definizione</u> Sia $S \subseteq X$

Diremo <u>frontiera</u> o <u>bordo</u> <u>di</u> S, ∂S, l'insieme dei punti $x \in X$ tali che $x \in \overline{S} \cap \overline{S^c}$ cioè se esistono $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ e $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S^c$ tali che $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = x$

<u>Osservazione</u> 1) $x \in \partial S \iff$

$\forall r > 0 \ \exists y \in B_r(x) \cap S$ e $\exists z \in B_r(x) \cap S^c \iff$

$\forall U$ intorno di x $\exists y \in U \cap S$ e $\exists z \in U \cap S^c$

2) • $\partial S = \overline{S} \cap \overline{S^c}$ è <u>chiuso</u> e $\partial S \subseteq \overline{S}$, quindi $S \cup \partial S \subseteq \overline{S}$

• $\partial S = \partial(S^c)$

• $\mathring{S}$, $\partial S = \partial(S^c)$, $\mathring{\overline{S^c}}$ sono a <u>due a due</u> <u>disgiunti</u> e $X = \mathring{S} \cup \partial S \cup \mathring{\overline{S^c}}$

Quindi $S \subseteq \mathring{S} \cup \partial S$ che è chiuso essendo il complementare di un aperto, da cui

$$\overline{S} \subseteq \mathring{S} \cup \partial S \subseteq S \cup \partial S \subseteq \overline{S}$$

cioè

• $$\boxed{\overline{S} = \mathring{S} \cup \partial S = S \cup \partial S}$$

DA CUI SEGUE CHE $S \setminus \mathring{S} \subseteq \bar{S} \setminus \mathring{S} = \partial S$ E $D(S) \setminus \mathring{S} \subseteq \bar{S} \setminus \mathring{S} = \partial S$

3) $C \subseteq X$ 25

C È CHIUSO SE E SOLO SE $C = C \cup \partial C$ CIOÈ $\partial C \subseteq C$

C È CHIUSO SE E SOLO SE $C = C \cup D(C)$ CIOÈ $D(C) \subseteq C$

DEFINIZIONE $S \subseteq X$ SI DICE LIMITATO SE ESISTONO ~~[illegible]~~ $x_0 \in X$ E $r > 0$ TALI CHE $S \subseteq B_r(x_0)$

OSSERVAZIONE 1) SIA $S \subseteq X$ LIMITATO. ALLORA $\forall x \in X$ ESISTE $r_x > 0$ TALE CHE $S \subseteq B_{r_x}(x)$.

INFATTI BASTA SCEGLIERE $r_x = r + d(x, x_0)$

IN PARTICOLARE, SE $(V, \|\cdot\|)$ È UNO SPAZIO VETTORIALE NORMATO, $S \subseteq V$ È LIMITATO SE E SOLO SE $\exists r > 0$ TALE CHE $S \subseteq B_r(0)$ CIOÈ $\|v\| < r \quad \forall v \in S$

2) SIA $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S$ CONVERGENTE. ALLORA $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ È LIMITATA.

INFATTI SIA $S \ni x = \lim_{n \to \infty} x_n$. FISSO $\varepsilon = 1$. ALLORA $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ TALE CHE $\forall n \geq \bar{n}$ SI HA $d(x_n, x) < 1$.

QUINDI $x_n \in B_r(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ DOVE $r = 2\max\{1, d(x_1, x), \dots, d(x_{\bar{n}-1}, x)\}$

DISTANZA INDOTTA (X, d) spazio metrico

Sia $S \subseteq X$. Allora (S, d) è uno spazio metrico, con la distanza indotta da quella di X. Possiamo quindi definire i sottoinsiemi di S aperti e chiusi in S

PROPOSIZIONE
- $S_1 \subseteq S$ è aperto in S se e solo se esiste $A \subseteq X$ aperto in X tale che $S_1 = A \cap S$
- $S_1 \subseteq S$ è chiuso in S se e solo se esiste $C \subseteq X$ chiuso in X tale che $S_1 = C \cap S$
- Sia S aperto in X. Allora $S_1 \subseteq S$ è aperto in S se e solo se lo è in X
- Sia S chiuso in X. Allora $S_1 \subseteq S$ è chiuso in S se e solo se lo è in X

DIMOSTRAZIONE per esercizio: non facile il primo punto

Non è difficile dimostrare che se $S_1 = A \cap S$ con A aperto, allora S_1 è aperto in S. Il viceversa invece non è semplice da dimostrare.

Gli altri tre punti seguono abbastanza facilmente $\square$

ESEMPIO $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$

$[0, \frac{1}{2}]$ chiuso in I ; $(\frac{1}{2}, 1]$ aperto in I

Completezza (X,d) spazio metrico

Definizione Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una successione in X.

Diremo che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy se

$\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}\in\mathbb{N}$ tale che $\forall n,m\geq\bar{n}$ si ha $d(x_n,x_m)\leq\varepsilon$

Osservazione Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente, allora $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy.

Infatti sia $x=\lim_{n\to\infty} x_n$. Allora $\forall\varepsilon>0\ \exists\bar{n}\in\mathbb{N}$ tale che

$\forall n\geq\bar{n}$ si ha $d(x_n,x)\leq\frac{\varepsilon}{2}$.

Quindi $\forall n,m\geq\bar{n}$ si ha $d(x_n,x_m)\leq d(x_n,x)+d(x_m,x)\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

Definizione Uno spazio metrico (X,d) si dice completo se ogni successione di Cauchy è convergente ovvero se una successione è convergente se e solo se è di Cauchy

Proposizione (X,d) spazio metrico completo, sia $S\subseteq X$
(S,d) è completo (con la distanza indotta) se e solo se S è chiuso in X

Dimostrazione "S chiuso in $X \Rightarrow (S,d)$ completo"

Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq S$ di Cauchy in S. Allora $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy anche in X e, per la completezza di X, è convergente in X, cioè esiste $x \in X$ tale che $\lim_{n \to \infty} x_n = x$. Ma S è chiuso, quindi $x \in S$ da cui segue che $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente in S

"(S, d) completo $\Rightarrow$ S chiuso in X"

Sia $x \in \bar{S}$ e sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S$ tale che $\lim_{n \to \infty} x_n = x$. Allora $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente in X, quindi è di Cauchy in X e anche in S.

La completezza di S implica che $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente in S, quindi $x \in S$ $\square$

<u>Osservazione</u> (S, d) completo $\Rightarrow$ S chiuso in X vale per ogni spazio metrico (X, d), anche <u>non</u> completo

<u>Esempio</u> $\mathbb{R}$ <u>completo</u> (con la distanza euclidea)

$[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ completo; $(0,1] \subseteq \mathbb{R}$ <u>non</u> completo; $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ non completo

<u>Lemma</u> Sia $n \geq 2$. Allora

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_\infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

<u>Dimostrazione</u> per esercizio $\square$

<u>Teorema 1</u> Sia $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ una successione in $\mathbb{R}^n$ e sia $x \in \mathbb{R}^n$

$x^n = (x_1^n, \dots, x_n^n)$ E $x = (x_1, \dots, x_n)$

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ CONVERGE A x (RISPETTIVAMENTE È DI CAUCHY) RISPETTO ALLA DISTANZA EUCLIDEA d_2 $\Longleftrightarrow$ $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ CONVERGE A x (RISPETTIVAMENTE È DI CAUCHY) RISPETTO ALLA DISTANZA d_∞ $\Longleftrightarrow$ $\forall i = 1, \dots, n$ $\{x_i^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ CONVERGE A x_i (RISPETTIVAMENTE È DI CAUCHY)

<u>DIMOSTRAZIONE</u> DIMOSTRIAMO IL RISULTATO SOLO PER LE SUCCESSIONI CONVERGENTI, PER QUELLE DI CAUCHY È ANALOGO.

LA PRIMA EQUIVALENZA È OVVIA VISTO CHE

$$d_\infty(x_n, x) \leq d_2(x_n, x) \leq \sqrt{n}\, d_\infty(x_n, x) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

DIMOSTRIAMO LA SECONDA EQUIVALENZA

"$\Longrightarrow$" OVVIA VISTO CHE $\forall i = 1, \dots, n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|x_i^n - x_i| = d(x_i^n, x_i) \leq d_\infty(x_n, x)$$

"$\Longleftarrow$" FISSO $\varepsilon > 0$. ALLORA $\forall i = 1, \dots, n$ $\exists \bar{n}(i) \in \mathbb{N}$ TALE CHE $\forall n \geq \bar{n}(i)$ SI HA $|x_i^n - x_i| \leq \varepsilon$.

SIA $\bar{n} = \max_{i=1,\dots,n} \{\bar{n}(i)\} \in \mathbb{N}$. ALLORA $\forall n \geq \bar{n}$ E $\forall i = 1, \dots, n$ SI HA

$|x_i^n - x_i| \leq \varepsilon$ DA CUI $\max_{i=1,\dots,n} |x_i^n - x_i| = \|x^n - x\|_\infty = d_\infty(x^n, x) \leq \varepsilon$ $\square$

Corollario $\mathbb{R}^n$ è **completo** sia rispetto alla **distanza euclidea** che rispetto alla distanza d_∞

Dimostrazione Sia $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ di Cauchy in $\mathbb{R}^n$ (rispetto a d_2 o d_∞)

Allora $\forall i=1,\dots,n$ $\{x_i^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ completo implica che $\forall i=1,\dots,n$ $\exists x_i \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{n\to\infty} x_i^n = x_i$. Quindi $\lim_{n\to\infty} x^n = x = (x_1,\dots,x_n)$ (sia rispetto a d_2 che d_∞) $\square$

Compattezza (X,d) spazio metrico

Definizione ~~...~~ Uno **spazio metrico** (X,d) si dice **compatto** (per successioni) se ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ in X ammette una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ **convergente** in X

$S \subseteq X$ si dice **compatto** (per successioni) in X se (S,d) è compatto cioè se ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ in S ammette una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ **convergente in S**

Proposizione $S \subseteq X$ compatto $\Rightarrow$ S **chiuso** e **limitato**

Dimostrazione

SE S NON È CHIUSO, ESISTONO $x \in \bar{S} \setminus S$ E $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ TALE CHE $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. QUINDI OGNI SUA SOTTOSUCCESSIONE $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ CONVERGE A x, CIOÈ $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = x \notin S$, QUINDI NON È CONVERGENTE IN S E ALLORA S NON È COMPATTO

SE S NON È LIMITATO, FISSO $x \in X$ E $\forall n \in \mathbb{N}$ SIA $x_n \in S$ TALE CHE $d(x_n, x) \geq n$. QUINDI OGNI SUA SOTTOSUCCESSIONE $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ NON È LIMITATA, QUINDI NON È CONVERGENTE IN S (E NEMMENO IN X) E ALLORA S NON È COMPATTO $\square$

TEOREMA $\mathbb{R}^n$ CON LA DISTANZA EUCLIDEA

$K \subseteq \mathbb{R}^n$ È COMPATTO SE E SOLO SE K È CHIUSO E LIMITATO

DIMOSTRAZIONE RIMANE DA DIMOSTRARE CHE

K CHIUSO E LIMITATO $\Rightarrow$ K COMPATTO

K LIMITATO $\Rightarrow$ $\exists r > 0$ TALE CHE $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in K$ SI HA $d_2(x, 0) \leq r$ CIOÈ $\|x\|_2 \leq r$ QUINDI $\|x\|_\infty \leq r$ QUINDI

$|x_i| \leq r \quad \forall i = 1, \dots, n.$

SIA $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ CON $x^n = (x_1^n, \dots, x_n^n)$.

ALLORA $\forall i = 1, \dots, n \quad |x_i^n| \leq r \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- $|x_1^n| \leq r \quad \forall n \in \mathbb{N} \underset{\text{BOLZANO-WEIERSTRASS}}{\Longrightarrow} \exists \{n_{k_1}\}_{k_1 \in \mathbb{N}}$ SOTTOSUCCESSIONE DI ~~[illegible]~~ $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$

E $x_1 \in \mathbb{R}$, CON $|x_1| \leq r$, TALI CHE

$$\lim_{k_1 \to \infty} x_1^{n_{k_1}} = x_1 .$$

- $|x_2^{n_{k_1}}| \leq r \quad \forall k_1 \in \mathbb{N} \underset{B.-W.}{\Longrightarrow} \exists \{n_{k_2}\}_{k_2 \in \mathbb{N}}$ SOTTOSUCCESSIONE DI

$\{n_{k_1}\}_{k_1 \in \mathbb{N}}$ (E QUINDI ANCHE DI $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$) ~~[illegible]~~ E $x_2 \in \mathbb{R}$,

CON $|x_2| \leq r$, TALI CHE

$$\lim_{k_2 \to \infty} x_2^{n_{k_2}} = x_2 \quad \left(\text{E CHIARAMENTE SI HA ANCHE } \lim_{k_2 \to \infty} x_1^{k_2} = x_1 \right)$$

ITERANDO IL PROCEDIMENTO PER UN NUMERO <u>FINITO</u> DI PASSI POSSIAMO

PROVARE $\{n_{k_n}\}_{k_n \in \mathbb{N}}$ SOTTOSUCCESSIONE DI $\{n_{k_{n-1}}\}_{k_{n-1} \in \mathbb{N}}$

(E QUINDI ANCHE DI $\{n_{k_i}\}_{k_i \in \mathbb{N}}$ $\forall i = 1, \dots, n-1$ E DI $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$)

E $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, CON $|x_i| \leq r \quad \forall i = 1, \dots, n$, TALI CHE

$$\lim_{k_n \to \infty} x_i^{n_{k_n}} = x_i \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

RICAVIAMO CHE LA SOTTOSUCCESSIONE $\{x^{n_{k_n}}\}_{k_n \in \mathbb{N}}$ CONVERGE A $x = (x_1, \dots, x_n)$

MA $\{x^{n_{k_n}}\}_{k_n \in \mathbb{N}} \subseteq K$ E K CHIUSO IMPLICA CHE $\lim_{k_n \to \infty} x^{n_{k_n}} = x \in K$

$\square$

Limiti e funzioni continue

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici

Sia $S \subseteq X$, $S \neq \phi$; sia $f: S \subseteq X \to Y$

Definizione La funzione f si dice continua in $x_0 \in S$ se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in S$ con $d_X(x, x_0) < \delta$ si ha

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

La funzione f si dice continua in S se è continua in tutti i punti di S

Proposizione 1) f è continua in $x_0 \in S \iff$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in B^X_\delta(x_0) \cap S$ si ha $f(x) \in B^Y_\varepsilon(f(x_0))$

$\iff \forall V$ intorno di $f(x_0)$ $\exists U$ intorno di x_0 tale che $\forall x \in U \cap S$ si ha $f(x) \in V$

2) f è continua in $S \iff \forall \tilde{A} \subseteq Y$ aperto si ha che

$$f^{-1}(\tilde{A}) = \{x \in S : f(x) \in \tilde{A}\} \text{ è aperto in } S$$

$\iff \forall \tilde{C} \subseteq Y$ chiuso si ha che

$$f^{-1}(\tilde{C}) = \{x \in S : f(x) \in \tilde{C}\} \text{ è chiuso in } S$$

<u>DIMOSTRAZIONE</u> 1) OVVIO

2) SUPPONIAMO f CONTINUA IN S. SIA $\tilde{A} \subseteq Y$ APERTO E SIA $x \in f^{-1}(\tilde{A})$ CIOÈ TALE CHE $x \in S$ E $f(x) \in \tilde{A}$

SIA $\varepsilon_x > 0$ TALE CHE $B^Y_{\varepsilon_x}(f(x)) \subseteq \tilde{A}$. ALLORA ESISTE $\delta_x > 0$ TALE CHE $\forall \tilde{x} \in B^X_{\delta_x}(x) \cap S$ SI HA $f(\tilde{x}) \in B^Y_{\varepsilon_x}(f(x)) \subseteq \tilde{A}$ CIOÈ $B^X_{\delta_x}(x) \cap S \subseteq f^{-1}(\tilde{A})$. QUINDI

$$f^{-1}(\tilde{A}) = \bigcup_{x \in f^{-1}(\tilde{A})} \left(B^X_{\delta_x}(x) \cap S\right) = \left(\bigcup_{x \in f^{-1}(\tilde{A})} B^X_{\delta_x}(x)\right) \cap S = A \cap S$$

CON A APERTO. QUINDI $f^{-1}(\tilde{A})$ È APERTO IN S

VICEVERSA, SIA $x_0 \in S$ E SIA $\varepsilon > 0$. PER IPOTESI, VISTO CHE $B^Y_\varepsilon(f(x_0))$ È APERTO IN Y, $f^{-1}(B^Y_\varepsilon(f(x_0)))$ È APERTO IN S E $x_0 \in f^{-1}(B^Y_\varepsilon(f(x_0)))$. QUINDI ESISTE $\delta > 0$ TALE CHE $B^X_\delta(x_0) \cap S$ È CONTENUTO IN $f^{-1}(B^Y_\varepsilon(f(x_0)))$ CIOÈ $\forall x \in B^X_\delta(x_0) \cap S$ SI HA $f(x) \in B^Y_\varepsilon(f(x_0))$; QUINDI f È CONTINUA IN x_0

PER L'ARBITRARIETÀ DI $x_0 \in S$, f È CONTINUA IN S

L'EQUIVALENZA CON I CHIUSI SI OTTIENE FACILMENTE PASSANDO AI COMPLEMENTARI. $\square$

OSSERVAZIONE La continuità di f (in $x_0 \in S$ o in S) dipende **solo** dalle **topologie** di X e Y

PROPOSIZIONE (X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z) spazi metrici

$S \subseteq X$ non vuoto, $x_0 \in S$; $f: S \subseteq X \to Y$

$S_1 \subseteq Y$ tale che $f(S) \subseteq S_1$; $y_0 = f(x_0) \in S_1$; $g: S_1 \to Z$

Se f è continua in $x_0 \in S$ e g è continua in $y_0 = f(x_0) \in S_1$, allora

$$g \circ f : S \subseteq X \to Z$$

è continua in $x_0 \in S$

Se f è continua in S e g è continua in S_1 allora $g \circ f$ è continua in S.

DIMOSTRAZIONE immediata dalle precedenti caratterizzazioni $\square$

DEFINIZIONE • Sia $f: S \subseteq X \to Y$, sia $x_0 \in D(S)$, sia $y_0 \in Y$

Diremo che $\lim_{S \ni x \to x_0} f(x) = y_0$ se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in S$ con $0 < d_X(x, x_0) < \delta$ si ha

$$d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon$$

Equivalentemente $\lim_{S \ni x \to x_0} f(x) = y_0 \iff \lim_{S \ni x \to x_0} d_Y(f(x), y_0) = 0$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in (B_\delta^X(x_0) \cap S) \setminus \boxed{\{x_0\}}$ si ha

$f(x) \in B^Y_\varepsilon(y_0) \iff \forall V$ intorno di y_0 $\exists U$ intorno di x_0 tale che

$\forall x \in (U \cap S) \boxed{\setminus \{x_0\}}$ si ha $f(x) \in V$

- Sia $f: S \subseteq X \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in D(S)$

Diremo che $\lim_{S \ni x \to x_0} f(x) = \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$ se

$\forall K \in \mathbb{R}$ $\exists \delta > 0$: $\forall x \in S$ con $0 < d_X(x, x_0) < \delta$ si ha

$$f(x) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} K$$

<u>Osservazione</u> Il limite dipende <u>solo</u> dalle <u>topologie</u> di X e Y

<u>Proposizione</u> Sia $f: S \subseteq X \to Y$; sia $x_0 \in S$

- se $x_0 \notin D(S)$, allora x_0 è un <u>punto isolato</u> di S e f è <u>continua</u> in x_0
- se $x_0 \in D(S)$, allora f è continua in x_0 se e solo se

$$\exists \lim_{S \ni x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

<u>Teorema</u> • Sia $f: S \subseteq X \to Y$; sia $x_0 \in D(S)$, sia $y_0 \in Y$

$\lim_{S \ni x \to x_0} f(x) = y_0$ se e solo se $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S \setminus \{x_0\}$ tale che

$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ si ha $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = y_0$

- Analogamente, vale la stessa proprietà con $\mathbb{R}$ al posto di Y e $+\infty$ o $-\infty$ al posto di y_0

• Sia $f : S \subseteq X \to Y$; sia $x_0 \in S$

f è continua in x_0 se e solo se $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S$ tale che

$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ si ha $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$

Dimostrazione: Dimostriamo solo il primo punto, gli altri sono analoghi

Sia $\lim_{S \ni x \to x_0} f(x) = y_0$ e sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S \setminus \{x_0\}$ tale che

$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$. Allora $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in S$ con

$0 < d_X(x, x_0) < \delta$ si ha $d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon$. Ma $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ implica

che $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$ si ha

$0 < d_X(x_n, x_0) < \delta$ e quindi $d_Y(f(x_n), y_0) < \varepsilon$ cioè

$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = y_0$

Viceversa, supponiamo per assurdo che $\lim_{S \ni x \to x_0} f(x)$ non esista oppure

non sia y_0. In entrambi i casi $\exists \varepsilon > 0$ tale che $\forall \delta > 0$

$\exists x \in S$ con $0 < d_X(x, x_0) < \delta$ tale che $d(f(x), y_0) \geq \varepsilon$

$\forall n \in \mathbb{N}$ sia $x_n \in S$ tale che $0 < d_X(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ e $d(f(x_n), x_0) \geq \varepsilon$

Chiaramente $\lim_n x_n = x_0$ e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S \setminus \{x_0\}$ ma

$d(f(x_n), x_0) \geq \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e quindi non si ha $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = x_0$ e quindi si ottiene

UNA CONTRADDIZIONE

OSSERVAZIONE UTILE PER DIMOSTRARE LA NON CONTINUITÀ DI UNA FUNZIONE IN UN PUNTO O LA NON ESISTENZA DI UN LIMITE

ESERCIZIO CONSIDERARE NEL TERZO PUNTO DELLA PROPOSIZIONE PRECEDENTE IL CASO IN CUI x_0 SIA UN PUNTO ISOLATO DI S.

TEOREMA (WEIERSTRASS)

SIA K UNO SPAZIO METRICO COMPATTO, NON VUOTO

SIA $f: K \to \mathbb{R}$ CONTINUA

ALLORA $\exists \max_{x \in K} f(x)$ E $\exists \min_{x \in K} f(x)$

DIMOSTRAZIONE DIMOSTRIAMO L'ESISTENZA DEL MINIMO, QUELLA DEL MASSIMO È ANALOGA

SIA $l = \inf_{x \in K} f(x)$. ALLORA $\exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K$ SUCCESSIONE MINIMIZZANTE

CIOÈ TALE CHE $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$

$l \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in K$ TALE CHE $l \leq f(x_n) \leq l + 1/n$

$l = -\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in K$ TALE CHE $f(x_n) \leq -n$

K COMPATTO $\Rightarrow \exists \{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ SOTTOSUCCESSIONE CONVERGENTE A $\bar{x} \in K$

$l = \lim_{n} f(x_n) = \lim_{j} f(x_{n_j}) \underset{f \text{ CONTINUA},\ x_{n_j} \xrightarrow{j \to \infty} \bar{x}}{=} f(\bar{x})$ QUINDI $\exists \bar{x} \in K$ TALE CHE

$$f(\bar{x}) = \inf_{x \in K} f(x) = \min_{x \in K} f(x)$$

$\square$

FUNZIONI A VALORI VETTORIALI

(X,d) SPAZIO METRICO, $S \subseteq X$, $S \neq \phi$; $m \geq 1$ INTERO

$f : S \subseteq X \to \mathbb{R}^m$

$f = (f_1, \dots, f_m)$, $f_i : S \subseteq X \to \mathbb{R}$ COMPONENTI DELLA FUNZIONE f, $i = 1, \dots, m$

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \quad \forall x \in S$$

PROPOSIZIONE • SIANO $x_0 \in D(S)$ E $y^0 = (y_1^0, \dots, y_m^0) \in \mathbb{R}^m$

$$\lim_{S \ni x \to x_0} f(x) = y^0 \iff \lim_{S \ni x \to x_0} d_2(f(x), y^0) = 0 \iff$$

$$\lim_{S \ni x \to x_0} \|f(x) - y^0\| = 0 \iff \lim_{S \ni x \to x_0} (f(x) - y^0) = 0 \in \mathbb{R}^m$$

$$\iff \lim_{S \ni x \to x_0} f_i(x) = y_i^0 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

• SIA $x_0 \in S$

f È CONTINUA IN x_0 $\iff$ f_i È CONTINUA IN $x_0 \in S$ $\forall i = 1, \dots, m$

DIMOSTRAZIONE IMMEDIATA GRAZIE ALLE CARATTERIZZAZIONI CON LE SUCCESSIONI E AL FATTO CHE, DATA $\{y^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^m$ E DATO $y^0 \in \mathbb{R}^m$ SI HA

$$\lim_{n\to\infty} y^n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} y_i^n = y_i^0 \quad \forall i = 1, \dots, M$$

BASTA APPLICARLO A $\{y^n = f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ CON $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ TALE CHE

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

$\square$

RAGIONANDO COMPONENTE PER COMPONENTE, CONSIDERIAMO QUINDI

1) $f, g : S \subseteq X \to \mathbb{R}^M$; SIA $x_0 \in S$

SUPPONIAMO CHE f, g SIANO CONTINUE IN x_0. ALLORA

- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $(\lambda f + \mu g) : S \subseteq X \to \mathbb{R}^M$ È CONTINUA IN x_0

$\left[(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) \quad \forall x \in S \right]$

2) $f, g : S \subseteq X \to \mathbb{R}$, SIA $x_0 \in S$

SUPPONIAMO CHE f, g SIANO CONTINUE IN x_0. ALLORA

$(f \cdot g) : S \subseteq X \to \mathbb{R}$ È CONTINUA IN x_0

$\left[(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in S \right]$

$(f/g) : S_1 \subseteq X \to \mathbb{R}$ È CONTINUA IN x_0 PURCHÉ $g(x_0) \neq 0$

$\left[(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in S_1 = \{x \in S : g(x) \neq 0\} \right]$

INOLTRE $\forall h : f(S) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $f(x_0)$

$h \circ f : S \subseteq X \to \mathbb{R}$ è continua in x_0

<u>Esempio</u> Visto che $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua,

$\max(f,g) : S \subseteq X \to \mathbb{R}$ e $\min(f,g) : S \subseteq X \to \mathbb{R}$ sono continue in x_0

$$\max(f,g)(x) = \max(f(x),g(x)) = \frac{(f(x)+g(x))}{2} + \frac{|g(x)-f(x)|}{2}, \quad x \in S$$

$$\min(f,g)(x) = \min(f(x),g(x)) = \frac{(f(x)+g(x))}{2} - \frac{|g(x)-f(x)|}{2}, \quad x \in S$$

<u>Esempi importanti</u>

- (X, d_X), (Y, d_Y) spazi metrici

Sia $f : X \to Y$ <u>costante</u>, cioè tale che $\exists\, y^0 \in Y$ per cui

$$f(x) = y^0 \quad \forall x \in X.$$

Allora f è continua in X.

- $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ proiezione sull'i-esima coordinata, $i = 1, \dots, n$

$x = (x_1, \dots, x_n) \to x_i$

è continua su $\mathbb{R}^n$

- $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ <u>lineare</u> è continua su $\mathbb{R}^n$
- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ <u>affine</u>, cioè tale che $\exists\, y^0 \in \mathbb{R}^m$ e $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

per cui $f(x) = y^0 + L[x] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$,

è continua su $\mathbb{R}^n$

ESEMPI

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2 y + 2y)$

  $(x,y) \to \operatorname{sen}(x^2 y + 2y)$

  CONTINUA SU $\mathbb{R}^2$

- $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\qquad f(x,y,z) = \left(\frac{e^{xy}}{1+x^2+y^2}, z\log(1+x^2)\right)$

  $(x,y,z) \to \left(\frac{e^{xy}}{1+x^2+y^2}, z\log(1+x^2)\right)$

  $f_1: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\qquad f_1(x,y,z) = \frac{e^{xy}}{1+x^2+y^2}$

  $f_2: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\qquad f_2(x,y,z) = z\log(1+x^2)$

  f CONTINUA SU $\mathbb{R}^3$