Esempi di insiemi non misurabili secondo Peano-Jordan

- Sia $(r_n)_n$ la successione dei razionali in $[0,1]$.

  Fissiamo $\varepsilon \in]0,1[$ e, per ogni n, poniamo

$$I_n =]r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}[$$

e

$$E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n .$$

E è un aperto limitato, con $E \subseteq [-\varepsilon, 1+\varepsilon]$.

Sia P un plurintervallo, con $P \subseteq E$. Poichè P è compatto, esistono $n_1 \dots n_k$ tali che $P \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} I_{n_j}$.

e quindi

$$m_1(P) \le \sum_{j=1}^{k} m_1(I_{n_j}) \le \sum_{n=1}^{+\infty} m_1(I_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

Sia Q un plurintervallo, con $E \subseteq Q$. Poichè $E \cap [0,1]$ è denso in $[0,1]$, si ha $\overline{E \cap [0,1]} = [0,1] \subseteq Q$ e quindi

$$m_1(Q) \ge 1 .$$

Il criterio di misurabilità implica che E non è misurabile

- $F = [-\varepsilon, 1+\varepsilon] \setminus E$ è un compatto non misurabile.