Analisi Matematica II | Lezione 3

DIFFERENZIALE DI UNA FUNZIONE

Siano $n, m \geq 1$ interi

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

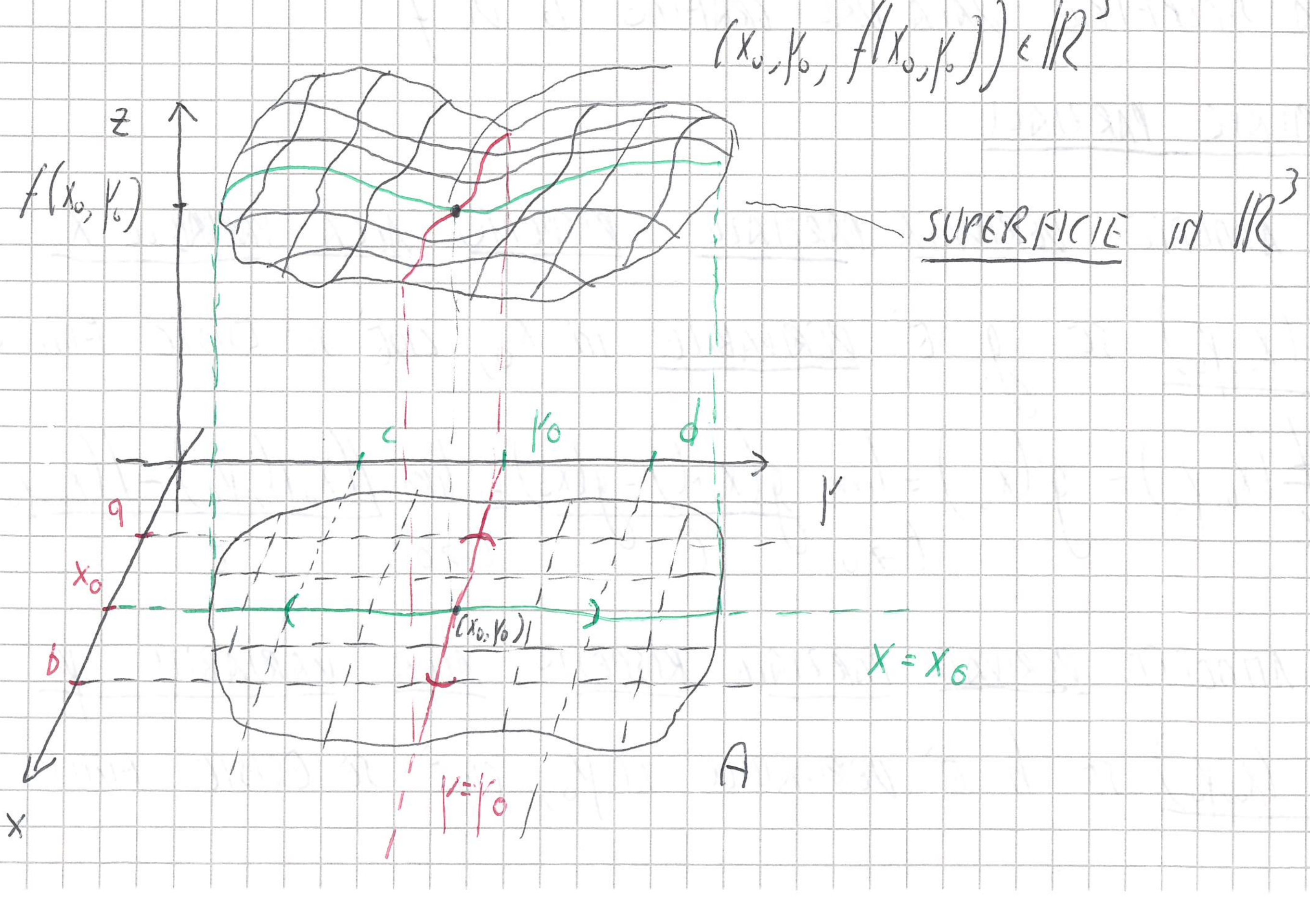
Definizione sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Diremo **grafico** di f l'insieme

$$G = \{ (\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{x \in \mathbb{R}^n}, \underbrace{y_1, \dots, y_m}_{y \in \mathbb{R}^m}) \in \mathbb{R}^{n+m} : y = f(x), \ x = (x_1, \dots, x_n) \in A \} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$$

Esempio importante $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$G = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), \ (x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2 \} \subseteq \mathbb{R}^3$$



Restrizioni lungo rette parallele agli assi

Per semplicità $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, $(x_0, y_0) \in A$

Consideriamo le funzioni

$$g = f(\cdot, y_0) : (a,b) \to \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow g(x) = f(x, y_0)$$

e

$$h = f(x_0, \cdot) : (c,d) \to \mathbb{R}$$
$$y \longrightarrow h(y) = f(x_0, y)$$

Sono, rispettivamente, la restrizione della f alla retta $y = y_0$ e alla retta $x = x_0$. I loro grafici sono delle curve contenute nella superficie data dal grafico G di f

Derivate parziali

f ammette derivata parziale rispetto alla variabile x in (x_0, y_0) se g è derivabile in x_0, cioè se esiste finito

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(x_0 + t) - g(x_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$

f ammette derivata parziale rispetto alla variabile y in (x_0, y_0) se h è derivabile in y_0, cioè se esiste finito

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = h'(y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{h(y_0+t)-h(y_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0,y_0+t)-f(x_0,y_0)}{t}$$ (3)

ESEMPI

- $f(x,y) = x$; $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$
- $f(x,y) = \cos(xy)$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(-\operatorname{sen}(xy)); \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(-\operatorname{sen}(xy))$$

- $f(x,y) = e^{x+y^2x}$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1+y^2)e^{x+y^2x} \;, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy\,e^{x+y^2x}$$

NOTAZIONI

$N=3$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)$

$N\geq 2$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)$, ----, $\frac{\partial f}{\partial x_N}(x^0)$, $\quad x^0 = (x_1^0,\dots,x_N^0)$

$N=2,3$ $\quad D_x f(x_0,y_0,z_0) = f_x(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)$

$N\geq 2$ $\quad D_j f(x^0) = f_{x_j}(x^0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0)$, $\quad j=1,\dots,N$

DERIVATE DIREZIONALI $\quad f: A\subseteq\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, A APERTO, $x^0\in A$

$$f = (f_1,\dots,f_M)$$

PERCHÉ LIMITARSI ALLE RETTE (PASSANTI PER x^0) PARALLELE AGLI ASSI COORDINATI?

5

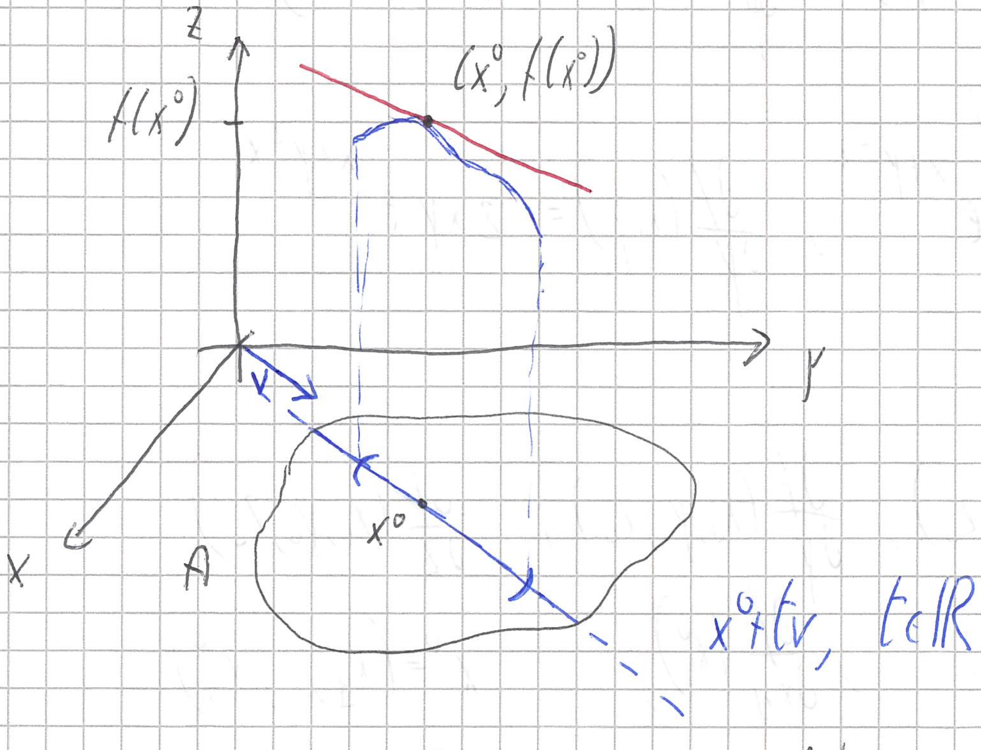
SIA $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$ (v VERSORE o DIREZIONE)

$\{x \in \mathbb{R}^n : x = x^0 + tv,\ t \in \mathbb{R}\}$ RETTA PASSANTE PER x^0 CON DIREZIONE v

f AMMETTE DERIVATA DIREZIONALE NELLA DIREZIONE v IN x^0 SE ESISTE FINITO

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x^0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x^0 + tv) - f(x^0)}{t} \in \mathbb{R}^m, \quad \|v\| = 1$$

$n = 2,\ m = 1$



OSSERVAZIONI 1) $\exists \frac{\partial f}{\partial v}(x^0) \iff \exists \frac{\partial f_i}{\partial v}(x^0) \quad \forall i = 1, \dots, m$

E IN TAL CASO

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x^0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(x^0), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial v}(x^0)\right) \in \mathbb{R}^m$$

2) $\forall j = 1, \dots, n \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) = \frac{\partial f}{\partial e_j}(x^0)$

DOVE $e_1, \dots, e_n$ È LA BASE CANONICA, CIOÈ LE DERIVATE PARZIALI SONO PARTICOLARI DERIVATE DIREZIONALI

IN PARTICOLARE

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x^0+te_j)-f(x^0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_j^0+t, \dots, x_n^0)-f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{t} =$$

$$= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x^0), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x^0) \right) \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \dots, n$$

PROPOSIZIONE SIA $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$ DIREZIONE

SUPPONIAMO ESISTA $\frac{\partial f}{\partial v}(x^0)$

SIA $\lambda \in \mathbb{R}$ E $w = \lambda v$

SIA $g : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ TALE CHE $g(t) = f(x^0 + tw)$ $\forall t \in (a,b)$

ALLORA g È DERIVABILE IN 0 E VALE

$$g'(0) = \lambda \frac{\partial f}{\partial v}(x^0)$$

IN PARTICOLARE, $\exists\, \frac{\partial f}{\partial (-v)}(x^0) = -\frac{\partial f}{\partial v}(x^0)$

DIMOSTRAZIONE • $\lambda = 0$ OVVIO, $g(t) = f(x^0)$ $\forall t \in \mathbb{R}$

• $\lambda \neq 0$

$$g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x^0+tw)-f(x^0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\lambda \left(f(x^0+t\lambda v) - f(x^0) \right)}{t\lambda} = \lambda \frac{\partial f}{\partial v}(x^0) \quad \square$$

ESEMPIO IMPORTANTE

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}\right)^2 & \text{SE } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{SE } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$f(0,\cdot) \equiv 0 \implies \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

$f(\cdot,0) \equiv 0 \implies \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

SIA $v = (\cos\theta, \sin\theta)$ ~~[illegible]~~

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0+tv)-f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{t^6(\cos^2\theta\sin\theta)^2}{t^4(t^2\cos^4\theta+\sin^2\theta)^2}\right) = 0 \quad \forall v\,!$$

$\implies \exists \dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0 \quad \forall v,\ \|v\| = 1$

MA f NON È CONTINUA IN $(0,0)$!

SIA $m \in \mathbb{R}$ FISSATO

$$f(x, mx^2) = \left(\frac{mx^4}{(1+m^2)x^4}\right)^2 \quad \forall x \neq 0 \implies \lim_{x\to 0} f(x,mx^2) = \frac{m^2}{(1+m^2)^2} \quad (y = mx^2)$$

$m=0$; $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n},0\right) = 0$ E $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},0\right) = 0$

$m=1$; $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}, m\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) = 0$ E $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{m}{n^2}\right) = \frac{1}{4}$

$\implies \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

f NON È CONTINUA IN $(0,0)$ E NON PUÒ ESSERE ESTESA PER CONTINUITÀ IN $(0,0)$!

FUNZIONI DIFFERENZIABILI

SIA $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A APERTO, $x^0 \in A$

f SI DICE DIFFERENZIABILE IN x^0 SE ESISTE $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ LINEARE, CIOÈ $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, TALE CHE

$$\lim_{\mathbb{R}^n \ni h \to 0} \frac{f(x^0+h) - f(x^0) - L[h]}{\|h\|} = 0 \in \mathbb{R}^m$$

TALE APPLICAZIONE LINEARE L SI DICE DIFFERENZIALE DELLA FUNZIONE f IN x^0 E SI DENOTA CON

$$Df(x^0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \quad \left(\text{o} \quad df(x^0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \right)$$

OSSERVAZIONI 1) $g: (a,b) \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in (a,b)$

g DERIVABILE IN x_0 CON DERIVATA $g'(x_0)$ SE E SOLO SE

$$\lim_{\mathbb{R} \ni h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0) - g'(x_0) \cdot h}{|h|} = 0 \in \mathbb{R}$$

$|h| = \|h\|$, $\quad Dg(x_0): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$h \to g'(x_0) \cdot h$$

2) DEFINIZIONI EQUIVALENTI $\quad Df(x^0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

- $$\lim_{\mathbb{R}^n \ni x \to x^0} \frac{f(x) - f(x^0) - Df(x^0)[x - x^0]}{\|x - x^0\|} = 0 \in \mathbb{R}^m$$

- $$\lim_{\mathbb{R}^n \ni x \to x^0} \frac{\|f(x) - f(x^0) - Df(x^0)[x-x^0]\|}{\|x-x^0\|} = 0 \in \mathbb{R}$$

- $$f(x) = f(x^0) + Df(x^0)[x-x^0] + R(x), \quad x \in A \subseteq \mathbb{R}^n$$

DOVE $\lim_{x \to x^0} \frac{R(x)}{\|x-x^0\|} = 0$ $\left(\text{OPPURE } \lim_{x \to x^0} \frac{\|R(x)\|}{\|x-x^0\|} = 0 \right)$

3) f È DIFFERENZIABILE IN x^0 SE E SOLO SE LO SONO TUTTE LE SUE COMPONENTI $f_1, \ldots, f_m$. IN TAL CASO

$$Df(x^0) = (Df_1(x^0), \ldots, Df_m(x^0))$$

<u>PROPOSIZIONE</u> $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A APERTO, $x^0 \in A$

f, g <u>DIFFERENZIABILI</u> IN x^0 CON DIFFERENZIALE $Df(x^0)$ E $Dg(x^0)$ RISPETTIVAMENTE

1) f È <u>CONTINUA</u> IN x^0

- $$\lim_{x \to x^0} (f(x) - f(x^0)) = 0 \;?$$

$$f(x) - f(x^0) = Df(x^0)[x-x^0] + R(x)$$

$\lim_{x \to x^0} Df(x^0)[x-x^0] = 0$ PER LA CONTINUITÀ DI $Df(x^0)$

$$\lim_{x \to x^0} \frac{\|R(x)\|}{\|x-x^0\|} = 0 \implies \lim_{x \to x^0} \|R(x)\| = 0 \implies \lim_{x \to x^0} R(x) = 0 \quad \square$$

2) $\forall v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial v}(x^0) = Df(x^0)[v]$$

IN PARTICOLARE, IL DIFFERENZIALE, SE ESISTE, È UNICO

- $$\frac{f(x^0+tv)-f(x^0)}{t} = \frac{Df(x^0)[tv] + R(x^0+tv)}{t} =$$

$$= Df(x^0)[v] + \frac{R(x^0+tv)}{t} \qquad \left(x = x^0+tv,\ x-x^0 = tv,\ \|x-x^0\| = |t|\right)$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|R(x^0+tv)\|}{\underbrace{\|tv\|}_{=|t|}} = 0 \implies \lim_{t\to 0} \frac{R(x^0+tv)}{t} = 0$$

$$\implies \exists \frac{\partial f}{\partial v}(x^0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x^0+tv)-f(x^0)}{t} = Df(x^0)[v]$$

$\square$

3) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (\lambda f + \mu g) : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ È DIFFERENZIABILE IN x^0

E VALE

$$D(\lambda f + \mu g)(x^0) = \lambda Df(x^0) + \mu Dg(x^0)$$ LINEARITÀ DEL DIFFERENZIALE

- DIMOSTRAZIONE PER ESERCIZIO

$\square$

DEFINIZIONE $\quad f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A APERTO

f SI DICE DIFFERENZIABILE IN A SE È DIFFERENZIABILE IN OGNI $x^0 \in A$

(IL DIFFERENZIALE $Df(x^0)$ DIPENDE DAL PUNTO x^0!)

ESEMPI • $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ COSTANTE, CIOÈ $\exists y^0 \in \mathbb{R}^m$ TALE CHE

$f(x) = y^0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

f È DIFFERENZIABILE IN A E $Df(x) = 0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

- $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

L È DIFFERENZIABILE IN $\mathbb{R}^n$ E $DL(x) = L \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

RAPPRESENTAZIONE DEL DIFFERENZIALE

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad A \text{ APERTO}, \quad x^0 \in A$$

f DIFFERENZIABILE IN x^0 CON DIFFERENZIALE $Df(x^0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

ALLORA $\forall i = 1, \dots, m \quad \forall j = 1, \dots, n \quad \exists \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0)$

DEFINIAMO

$$Jf(x^0) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) \right]_{i,j=1}^{m,n} \in \mathcal{M}^{m \times n}(\mathbb{R})$$ MATRICE JACOBIANA DI f IN x^0

ALLORA $\forall h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ SI HA

$$Df(x^0)[h] = Jf(x^0) \cdot h$$

CIOÈ $Jf(x^0)$ È LA MATRICE ASSOCIATA A $Df(x^0)$

INFATTI

$$Jf(x^0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j} & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \middle| \cdots \middle| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$$

LE COLONNE DI $Jf(x^0)$ SONO LE DERIVATE PARZIALI DI f E $\forall j = 1, \dots, n$

$$Df(x^0)[e_j] = \frac{\partial f}{\partial e_j}(x^0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) \in \mathbb{R}^m \text{ } j\text{-ESIMA COLONNA DI } Jf(x^0)$$

(VETTORI COLONNA)

CASO PARTICOLARE $\boxed{m=1}$

$$Jf(x^0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\right] = \nabla f(x^0) \in \mathbb{R}^n$$ GRADIENTE DI f IN x^0

$$Df(x^0)[h] = Jf(x^0)\cdot h = \nabla f(x^0)\cdot h = \langle \nabla f(x^0), h\rangle \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

QUINDI

$$Jf(x^0) = \begin{bmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{bmatrix}$$

LE RIGHE DI $Jf(x^0)$ SONO I GRADIENTI DELLE COMPONENTI DI f E

$\forall i = 1, \dots, m$

$$\nabla f_i(x^0) \in \mathbb{R}^n \quad i\text{-ESIMA RIGA DI } Jf(x^0)$$

(VETTORI RIGA)

OSSERVAZIONE IMPORTANTE

1) $Df(x^0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ APPLICAZIONE LINEARE

$Jf(x^0) \in M^{m\times n}(\mathbb{R})$ MATRICE

$\boxed{m=1}$ $Jf(x^0) = \nabla f(x^0) \in \mathbb{R}^n$ VETTORE

2) $\exists\, Df(x^0) \Rightarrow \exists\, Jf(x^0)$ MA NON VALE IL VICEVERSA!

f POTREBBE AVERE IN x^0 TUTTE LE DERIVATE PARZIALI, E QUINDI È POSSIBILE

DEFINIRE $Jf(x^0)$, ANCHE SE f NON È DIFFERENZIABILE IN x^0!

MA SE f AMMETTE IN x^0 TUTTE LE DERIVATE PARZIALI, E QUINDI ESISTE $Jf(x^0)$, L'UNICO CANDIDATO AD ESSERE IL DIFFERENZIALE IN x^0 È

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$h \to Jf(x^0) \cdot h$$

APPROSSIMANTE LINEARE

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad A \text{ APERTO}, \quad x^0 \in A$$

f È DIFFERENZIABILE IN x^0 SE E SOLO SE ESISTE

$$P_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \text{AFFINE}$$
$$x \to P_1(x) = L[x] + y^0 \qquad (L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m),\ y^0 \in \mathbb{R}^m)$$

TALE CHE

$$f(x^0) = P_1(x^0) \quad \text{E} \quad \lim_{x \to x^0} \frac{f(x) - P_1(x)}{\|x - x^0\|} = 0$$

IN TAL CASO

$$L = Df(x^0), \quad y^0 = f(x^0) - L[x^0] \quad \text{CIOÈ}$$
$$P_1(x) = f(x^0) + Df(x^0)[x - x^0] \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

E P_1 È DETTA APPROSSIMANTE LINEARE DELLA FUNZIONE f IN x^0

DIMOSTRAZIONE "$\Rightarrow$" OVVIO

"$\Leftarrow$" $P_1(x) = L[x] + y^0 = L[x - x^0] + L[x^0] + y^0$

$P_1(x^0) = f(x^0) \Rightarrow L[x^0] + y^0 = f(x^0)$, QUINDI

$$\lim_{x \to x^0} \frac{f(x) - (L[x - x^0] + f(x^0))}{\|x - x^0\|} = \lim_{x \to x^0} \frac{f(x) - f(x^0) - L[x - x^0]}{\|x - x^0\|} = 0$$

QUINDI $L = Df(x^0)$ $\square$

DEFINIZIONE SIA f DIFFERENZIABILE IN x^0.

IL GRAFICO DELL'APPROSSIMANTE LINEARE

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} : y = f(x^0) + Df(x^0)[x - x^0],\ x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$$

È IL SOTTOSPAZIO (AFFINE) TANGENTE AL GRAFICO DI f NEL PUNTO $P_0 = (x^0, f(x^0))$ PASSANTE PER IL PUNTO P_0

L'EQUAZIONE DI T È

$$y - f(x^0) = Df(x^0)[x - x^0],\ (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$$

EQUAZIONE VETTORIALE; SISTEMA DI m EQUAZIONI IN $n+m$ INCOGNITE

CASO $n = 1$ $m = 1$

$$g : (a, b) \to \mathbb{R}, \qquad x_0 \in (a, b)$$

g DERIVABILE IN x_0, $g'(x_0)$ DERIVATA

APPROSSIMANTE LINEARE (POLINOMIO DI TAYLOR DI GRADO 1) È

$$\mathbb{R} \ni x \to g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) = g(x_0) + Dg(x_0)[x - x_0] \in \mathbb{R}$$

IL SUO GRAFICO

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y = g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0),\ x\in\mathbb{R}\}$$

È LA RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI g IN $(x_0, g(x_0))$ PASSANTE PER IL PUNTO $(x_0, g(x_0))$, LA CUI EQUAZIONE È

$$y - g(x_0) = g'(x_0)(x-x_0),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

PROPOSIZIONE T È UN SOTTOSPAZIO AFFINE DI DIMENSIONE n IN $\mathbb{R}^{n+m}$

INFATTI

$$T = P_0 + S = \{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+m} : (x,y) = P_0 + (\tilde{x},\tilde{y}),\ (\tilde{x},\tilde{y})\in S\}$$

DOVE S È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE n IN $\mathbb{R}^{n+m}$

$S = TG(P_0)$ È DETTO SOTTOSPAZIO (VETTORIALE) TANGENTE AL GRAFICO DI f NEL PUNTO $P_0 = (x^0, f(x^0))$

DIMOSTRAZIONE

$(x,y)\in T \iff (\tilde{x},\tilde{y}) = (x,y) - P_0$ RISOLVE

$$(1)\qquad \tilde{y} = Df(x^0)[\tilde{x}] = Jf(x^0)\tilde{x}$$

(1) È UN SISTEMA DI m EQUAZIONI LINEARI OMOGENEE IN $n+m$ INCOGNITE

$$\left[Jf(x^0);\ -I_m\right]\cdot\begin{bmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{bmatrix} = 0\in\mathbb{R}^m$$

S È IL SOTTOSPAZIO (VETTORIALE) DELLE SOLUZIONI DI (1)

QUINDI (1) È <u>L'EQUAZIONE DI $TG(P_0)$</u> !

È FACILE VEDERE CHE LE M EQUAZIONI DI (1) SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI, QUINDI LA DIMENSIONE DI S È $N = (N+M) - M$

INFATTI, SE $e_1, \dots, e_N$ SONO I VETTORI DELLA BASE CANONICA IN $\mathbb{R}^N$, GLI N VETTORI IN $\mathbb{R}^{N+M}$

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} e_j \\ \\ \frac{\partial f}{\partial x_j} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_j} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}, \dots, \begin{bmatrix} e_N \\ \\ \frac{\partial f}{\partial x_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_N} \end{bmatrix}$$

SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI E COSTITUISCONO UN SISTEMA DI GENERATORI DELLE SOLUZIONI DI (1), QUINDI IN PARTICOLARE

$$\left\{ \begin{bmatrix} e_j \\ \frac{\partial f}{\partial x_j} \end{bmatrix}, j = 1, \dots, N \right\}$$ È UNA <u>BASE DI $TG(P_0)$</u>. $\square$

<u>ESEMPIO</u> $\boxed{N = 2, \ M = 1}$ <u>PIANO TANGENTE</u>

$$T = \left\{ z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$\ulcorner$ $Ax + By + Cz = D$ $\lrcorner$

$\boxed{N \geq 2, \ M = 1}$ IPERPIANO TANGENTE

$$T = \left\{ x_{N+1} = f(x^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)(x_1 - x_1^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N}(x^0)(x_N - x_N^0) \right\} \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$$

TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M, \quad A \text{ APERTO}, \quad x^0 \in A$$

SE f AMMETTE DERIVATE PARZIALI RISPETTO A TUTTE LE VARIABILI IN UN INTORNO DI x^0 E QUESTE SONO TUTTE CONTINUE $\boxed{\text{IN } x^0}$, ALLORA f È DIFFERENZIABILE IN x^0.

OSSERVAZIONE $\exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) \ \forall j = 1, \dots, N \implies \exists J_f(x^0)$

$\implies$ UNICO CANDIDATO A ESSERE IL DIFFERENZIALE È

$L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ TALE CHE $L[h] = J_f(x^0) \cdot h \quad \forall h \in \mathbb{R}^N$

DIMOSTRAZIONE $\boxed{M = 1}$ (RAGIONANDO COMPONENTE PER COMPONENTE)

$\boxed{N = 2}$ PER SEMPLICITÀ

$$x^0 \rightsquigarrow (x_0, y_0) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$$

IPOTESI : • $\exists r > 0$ TALE CHE $B_r(x_0, y_0) \subseteq A$ E

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{E} \quad \exists \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \quad \forall (x, y) \in B_r(x_0, y_0)$$

• $\frac{\partial f}{\partial x} : B_r(x_0, y_0) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ E $\frac{\partial f}{\partial y} : B_r(x_0, y_0) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ SONO

CONTINUE IN (x_0, y_0)

UNICO CANDIDATO A ESSERE IL DIFFERENZIALE È

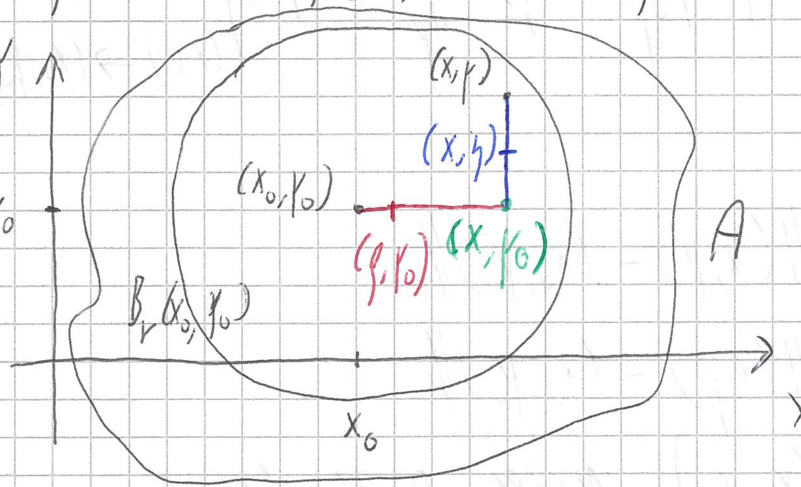
$$L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$h=(h_1,h_2) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)h_2$$

DOBBIAMO QUINDI DIMOSTRARE CHE

$$? \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\left| f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\right|}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0 \quad ?$$

SIA $(x,y) \in B_r(x_0,y_0)$, CON $(x,y) \neq (x_0,y_0)$



$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \underbrace{f(x,y) - f(x,y_0)} + \underbrace{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)} \overset{\substack{\text{LAGRANGE} \\ !}}{=}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta)(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y_0)(x-x_0)$$

DOVE ξ E η DIPENDONO DA (x,y) E SODDISFANO

1) $x_0 \le \xi \le x$ (OPPURE $x \le \xi \le x_0$) E $y_0 \le \eta \le y$ (OPPURE $y \le \eta \le y_0$)

QUINDI ESISTONO ξ E η, DIPENDENTI DA (x,y), CHE SODDISFANO (a) E TALI CHE

$$0 \le \frac{\left| f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \right|}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} =$$

$$= \frac{\left| \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta)(y-y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \right|}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} \le$$

$$\le \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \right| \underbrace{\frac{|x-x_0|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}}_{\le 1} + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \right| \underbrace{\frac{|y-y_0|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}}_{\le 1} \le$$

$$\le \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \right| \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} 0 \ ?$$

OSSERVIAMO CHE

$$\|(\xi,y_0)-(x_0,y_0)\| \le \|(x,y)-(x_0,y_0)\|$$

$$\|(x,\eta)-(x_0,y_0)\| \le \|(x,y)-(x_0,y_0)\|$$

QUINDI SE $(x,y) \to (x_0,y_0)$ ALLORA SI HA ANCHE

$$(\xi,y_0) \to (x_0,y_0) \quad \text{E} \quad (x,\eta) \to (x_0,y_0)$$

DA CUI, PER LA CONTINUITÀ DI $\frac{\partial f}{\partial x}$ E $\frac{\partial f}{\partial y}$ IN (x_0,y_0) E IL LIMITE DELLA FUNZIONE COMPOSTA, POSSIAMO CONCLUDERE CHE

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \right| = 0 \quad \text{E} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \right| = 0$$

$\square$

DEFINIZIONE $A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

f SI DICE DI CLASSE C^1 IN A SE ESISTONO LE DERIVATE PARZIALI RISPETTO A TUTTE LE DERIVATE IN OGNI $x \in A$, CIOÈ

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \in \mathbb{R}^m \quad \forall x \in A \quad \forall j = 1, \dots, n,$$

E QUESTE SONO CONTINUE IN A, CIOÈ $\forall j = 1, \dots, n$ L'APPLICAZIONE

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$x \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

È CONTINUA IN A

ESERCIZIO DIMOSTRARE CHE

$$C(A, \mathbb{R}^m) = C^0(A, \mathbb{R}^m) = \{ f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : f \text{ È CONTINUA IN } A \}$$

$$V = \{ f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : f \text{ È DIFFERENZIABILE IN } A \}$$

$$C^1(A, \mathbb{R}^m) = \{ f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : f \text{ È DI CLASSE } C^1 \text{ IN } A \}$$

SONO SPAZI VETTORIALI E CHE VALE

$$(*) \qquad C^1(A, \mathbb{R}^m) \subseteq V \subseteq C^0(A, \mathbb{R}^m)$$

SUGGERIMENTO USARE IL TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE

OSSERVAZIONE LE INCLUSIONI IN $(*)$ SONO STRETTE!

$n = m = 1 \quad A = \mathbb{R}$

SIA $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ TALE CHE $f(x) = |x| \; \forall x \in \mathbb{R}$. ALLORA $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ MA

$f \notin V$

- SIA $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ TALE CHE $g(x) = x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \forall x \in \mathbb{R} \left(g(0) = 0 \right)$

ALLORA $f \in V$ MA $f \notin C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$