Esercizi Analisi Matematica II
Anno accademico 2017-2018

Foglio 4

1. **P** Determinare il dominio A delle seguenti funzioni e calcolarne, dove esistono, le derivate parziali.

   (a) $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dove $f(x,y) = 2y + |x-y|$

   (b) $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dove $f(x,y,z) = \arcsin(xy) - z^2$

   (c) $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dove $f(x,y,z) = \left(\tan\left(\frac{\pi}{2}(x+z+y)\right), \cos(z^3+y)\right)$

   (d) $f : A \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dove $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \mathrm{e}^{x_1/x_4} - \log(x_3^2)$

2. **P** Calcolare, se esiste, la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(0)$ per le seguenti funzioni f e direzioni v

   (a) $f(x,y) = x^2\sin(x-y)$ e $v = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ e $v = (-1/2, \sqrt{3}/2)$

   (b) $f(x,y) = 2y + \mathrm{e}^{x^2 y}$ e $v = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ e $v = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$

   (c) $f(x,y,z) = z^2 y - \cos(z+x)$ e $v = (1/2, -\sqrt{3}/4, 3/4)$

   (d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\sin(x-y)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{se } (x,y) = 0 \end{cases}$
   e $v = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $v = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ e $v = (1/2, \sqrt{3}/2)$

3. **T** Siano $f, g : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, con A aperto, due funzioni a valori reali. Supponiamo che f e g siano differenziabili in $x^0 \in A$. Siano $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$. Stabilire se $\lambda f + \mu g$ è differenziabile in x^0 e in caso affermativo calcolarne il differenziale.

4. **T∗** Siano $f, g : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, con A aperto, due funzioni a valori reali. Supponiamo che f e g siano differenziabili in $x^0 \in A$. Stabilire se fg è differenziabile in x^0 e in caso affermativo calcolarne il differenziale.

5. **T** Siano $f, g : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, A aperto, due funzioni a valori vettoriali. Supponiamo che f e g siano differenziabili in $x^0 \in A$. Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'usuale prodotto scalare su $\mathbb{R}^M$. Dimostrare che $h : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definita da

$$h(x) = \langle f(x), g(x) \rangle = \sum_{i=1}^{M} f_i(x) g_i(x) \quad \text{per ogni } x \in A$$

   è differenziabile in x^0. Dimostrare infine che

$$\nabla h(x^0) = \sum_{i=1}^{M} \left(f_i(x^0) \nabla g_i(x^0) + g_i(x^0) \nabla f_i(x^0) \right).$$

6. **T**$*$ Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni reali di una variabile reale. Sia $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione data da

$$h(x,y) = f(x)g(y) \quad \text{per ogni } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Supponiamo che $f(0)$ e $g(0)$ siano diversi da zero. Determinare condizioni necessarie e sufficienti su f e g affinché h sia differenziabile in $(0,0)$, e calcolare in tal caso il differenziale.

7. **P** Studiare la continuità e la differenziabilità delle seguenti funzioni

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin^3(x+y)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\arctan^2(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2 y} - 1}{(x^2+y^2)^{1/4}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3-y^3)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+xy)}{|x|+|y|} & \text{se } (x,y) \in B_1((0,0)),\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

8. **P** Determinare il dominio A delle seguenti funzioni e stabilire in quali punti del dominio sono differenziabili. In tali punti calcolare il gradiente e l'approssimante lineare.

(a) $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dove $f(x,y) = 2x^2 \log(xy) + 3$

(b) $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dove $f(x,y) = \cos(\arctan(x-y))$

(c) $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dove $f(x,y) = x^4 + 3y\log(1+x)$

(d) $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dove $f(x,y,z) = \dfrac{z(e^{x+y})}{x+y^2}$

9. **P** Determinare il dominio A delle seguenti funzioni e stabilire in quali punti del dominio sono differenziabili. In tali punti calcolare la matrice Jacobiana e l'approssimante lineare.

(a) $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dove $f(x,y,z) = \left(\cos(x+y^2), e^{x^2+z}\right)$

(b) $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dove $f(x,y) = \left(x^2/y, 2\cos(x+y), \dfrac{\arctan(x^3)}{x-y}\right)$

(c) $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^5$ dove $f(t) = (t+1, 3\sin(t), e^{2t}, 1-t, \log(t+1))$

(d) $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dove $f(x,y,z) = (z^2xy - z/y, \log(1+x+y^2))$

(e) $f : A \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dove $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 - \sin(x_3^2x_4)$

(f) $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dove $f(x,y) = \left(x^3y, \dfrac{x+y}{x+4y}\right)$

10. **P** Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, passante per il punto P_0, dove f e P_0 sono dati da:

    (a) $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dove $f(x,y) = x^4 + 3y\log(1+x)$ e $P_0 = (0,1,0)$

    (b) $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dove $f(x,y) = xy - \dfrac{x+y}{x+4y}$ e $P_0 = (1,2,5/3)$

    Determinare infine l'equazione e una base di $TG(P_0)$, il piano (vettoriale) tangente al grafico di f nel punto P_0.

11. **P** Scrivere l'equazione del sottospazio tangente al grafico di f nel punto $P_0 = (x^0, f(x^0))$, passante per il punto P_0, dove

    (a) $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dove $f(x_1,x_2,x_3) = \sin(x_2 - x_3) + x_1\cos(x_2)$ e $P_0 = (1, \pi, \pi, -1)$

    (b) $f : A \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dove
    $$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \left(\frac{x_1^2 + x_3}{x_4^3}, x_2 - \frac{x_1}{x_3}\right)$$
    e $P_0 = (4,3,2,1,18,1)$

    (c) $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dove
    $$f(x_1,x_2) = (\sin(x_1x_2), x_2 - x_1x_2^3, x_2/x_1^2)$$
    e $P_0 = (1, \pi, 0, \pi - \pi^3, \pi)$

    Determinare infine l'equazione e una base di $TG(P_0)$, il sottospazio (vettoriale) tangente al grafico di f nel punto P_0.

12. **T** Siano $N, M \geq 1$ interi. Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ aperto. Dimostrare che
    $$C(A,\mathbb{R}^M) = C^0(A,\mathbb{R}^M) = \{f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M : \ f \text{ è continua in } A\},$$
    $$V = \{f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M : \ f \text{ è differenziabile in } A\},$$
    $$C^1(A,\mathbb{R}^M) = \{f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M : \ f \text{ è di classe } C^1 \text{ in } A\}$$
    sono spazi vettoriali e vale
    $$C^1(A,\mathbb{R}^M) \subset V \subset C^0(A,\mathbb{R}^M).$$

    Suggerimento: usare il Teorema del Differenziale Totale.

13. **TF**$*$ Dimostrare il Teorema del Differenziale Totale per $f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ con $N > 2$.

    Suggerimento: l'esercizio ̀laborioso. Un possibile rimedio è procedere per induzione sul numero di variabili N, utilizzando il caso $N = 2$ come base d'induzione.

Legenda:
T esercizio teorico; **P** esercizio pratico; **F** esercizio facoltativo; $*$ esercizio difficile