

Università degli Studi di Trieste  
Facoltà di Ingegneria

APPUNTI del CORSO di ELETTROTECNICA

Introduzione ai circuiti  
Leggi di Kirchoff

prof. ing. Stefano Longhi

a.a. 2017-2018

## *Bibliografia*

- V. Daniele, A. Liberatore, R. Graglia e S. Manetti: "Elettrotecnica", Monduzzi Editore, Bologna
- F. Ciampolini: "Elettrotecnica generale", Pitagora Editrice Bologna

## *Circuiti e modelli*

- **Circuiti reali**  
(o fisici)
- **Modelli matematici**  
(dei singoli, componenti, delle connessioni, dei circuiti,...)

## *Studio dei circuiti*

- Il processo completo di analisi di un circuito elettrico reale consiste in:
  - 1) Stabilire il modello più appropriato per descrivere i componenti in uso nel circuito, la loro connessione e il campo di applicazione
  - 2) Scrivere e risolvere le equazioni secondo il modello complessivo scelto
  - 3) Verificare la correttezza delle soluzioni ottenute con opportune verifiche sul circuito reale
- In questo corso ci limitiamo al passo 2) limitatamente a certi modelli di circuiti.

## *Nozioni preliminari*

- Un circuito elettr(on)ico è composto dalla interconnessione di dispositivi elettro-magnetici che interagiscono tra loro
- Questi dispositivi comunicano con il mondo esterno (resto del circuito) mediante i morsetti o terminali o poli. Sono chiamati in generale multipoli
- Le grandezze fondamentali che prenderemo in considerazione per lo studio dei circuiti sono la differenza di potenziale (tensione) e la corrente elettrica

## *Prima classificazione*

- Principali classi di modelli:
- **A parametri concentrati (PC)**
- **A costanti distribuite**
- Criteri per la scelta tra le due classi di modelli:
- **Dimensioni del circuito**
- **Frequenze dei segnali**

## Esempi

- Circuito integrato con estensione  $d = 1$  mm, percorso da segnali con periodo minimo  $T = 0.1$  ns  $= 10^{-10}$  s. Per attraversare il circuito da un capo all'altro, le onde elettromagnetiche ci mettono:  $\Delta t = d/c = 10^{-3}/3 \cdot 10^8 = 3.3 \cdot 10^{-12}$  s. Essendo  $\Delta t \ll T$ , il circuito può essere considerato PC.
- Circuito audio che lavora con  $f_{\max} = 25$  kHz. Ne segue che  $\lambda = c/f = 12$  km. Finché  $d \ll \lambda$ , il circuito può essere considerato PC.
- Cavo coassiale lungo  $d = 10$  m dal ricevitore all'antenna satellitare. Dall'antenna esce un segnale  $f_1 = 1$  GHz ( $T_1 = 10^{-9}$  s), dal ricevitore un segnale  $f_2 = 20$  KHz ( $T_2 = 5 \cdot 10^{-5}$  s) (polariz. dell'antenna). Si ha che:  
$$\Delta t = d/c = 10/3 \cdot 10^8 = 3.3 \cdot 10^{-8}$$
 s;  
$$\lambda_1 = c/f_1 = 0.3$$
 m ( $\ll l$ );  $\lambda_2 = c/f_2 = 1.5 \cdot 10^4$  m ( $\gg l$ ).

## *Modelli PC*

- La velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche è infinita, quindi il tempo di propagazione dei segnali è nullo
- Non ci sono campi elettro-magnetici esterni concatenati con il circuito, inoltre tutti i fenomeni elettrici sono confinati in certe ben definite regioni dello spazio

### *Ne consegue che:*

- Non ci sono nozioni metriche associate al circuito, i collegamenti tra i componenti non hanno né lunghezza né alcuna estensione
- Le grandezze fisiche assumono in ogni istante lo stesso valore in tutto il circuito
- Il campo elettrico è conservativo (d.d.p.)
- Il circuito è costituito da componenti connessi tra loro solamente mediante i morsetti e isolati dal mondo esterno

## *Riassumendo...*

- Un circuito PC è composto da un insieme di componenti a due o più terminali connessi tra loro tramite i morsetti
- I collegamenti tra componenti corrispondono a dei corti circuiti; la loro lunghezza non influenza il comportamento del circuito
- Le variazioni delle grandezze elettriche si propagano istantaneamente in tutto il circuito
- Tra morsetto e morsetto si può misurare una differenza di potenziale elettrico (ddp), chiamata impropriamente tensione
- Nei componenti e nei morsetti scorre la corrente elettrica formata da cariche positive

## *Differenze di potenziale*

- Il concetto di differenza di potenziale è legato al lavoro compiuto da una forza esterna su una particella carica in opposizione al campo elettrico (per la definizione di campo elettrico, vedi la legge di Coulomb)
- Dal momento che supponiamo che il campo elettrico sia conservativo, questo lavoro non dipende dal percorso, ma può essere espresso come differenza di una funzione potenziale calcolata agli estremi.
- Quindi si ha:  $W_{AB} = q \cdot v_{AB} = q \cdot (v_A - v_B)$
- Il potenziale  $v$  si misura in Volt [V]

## Correnti e potenze

- La corrente elettrica è un flusso di cariche positive in un conduttore:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

- La corrente  $i$  si misura in Ampere [A]
- La potenza elettrica dissipata o erogata in un bipolo si ricava da:

$$p = \frac{dW}{dt} = v \frac{dq}{dt} = vi$$

- Si misura in Watt [W]

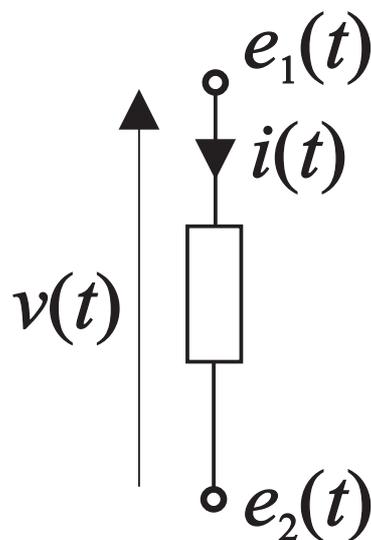
## *Definizioni*

- Consideriamo un circuito formato soltanto da componenti a due terminali, detti bipoli
- *Nodo*: punto in cui si congiungono due o più morsetti o terminali
- *Ramo* (o arco o lato): singolo percorso circuitale tra due nodi corrispondente a un bipolo
- *Maglia*: insieme di due o più rami che formano un cammino chiuso

## Convenzioni di segno

### Convenzione normale o degli utilizzatori

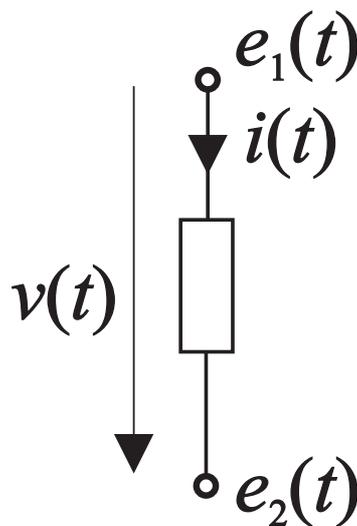
- La freccia della tensione punta verso il terminale dove entra la corrente
- $v(t) = e_1(t) - e_2(t)$
- se  $v(t) > 0 \rightarrow e_1(t) > e_2(t)$
- $p = v i > 0 \Rightarrow$  potenza dissipata
- $p = v i < 0 \Rightarrow$  potenza erogata



## Convenzioni di segno (2)

### Convenzione non-normale o dei generatori

- La freccia della tensione punta verso il terminale dove esce la corrente
- $v(t) = e_2(t) - e_1(t)$
- se  $v(t) > 0 \rightarrow e_2(t) > e_1(t)$
- $p = v i > 0 \Rightarrow$  potenza erogata
- $p = v i < 0 \Rightarrow$  potenza dissipata



## *Nodi e rami in un circuito*

- In un circuito ci sono  $n$  nodi e  $b$  rami
- Un nodo è preso come riferimento per il potenziale (0 V)
- Ad ognuno dei  $n-1$  nodi rimanenti è associato un potenziale
- Ad ogni ramo, corrispondente a un bipolo, è associata una corrente e una differenza di potenziale (tensione)

## *La Legge di Kirchhoff*

- Il primo principio di Kirchhoff (KCL, IK) afferma che la somma algebrica delle correnti che entrano o escono da ogni nodo è identicamente nulla in ogni istante di tempo

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + \dots + i_n(t) = 0$$

- Si deve fissare un verso convenzionale positivo rispetto al nodo per stabilire se le correnti devono essere prese con il segno più o quello meno; per esempio, prendiamo come positive le correnti uscenti dal nodo

## *Il Legge di Kirchhoff*

- Il secondo principio di Kirchhoff (KVL, IIK) afferma che la somma algebrica delle ddp (tensioni) lungo una maglia è identicamente nulla in ogni istante di tempo

$$v_{12} + v_{23} + v_{34} + \dots + v_{n1} = 0$$

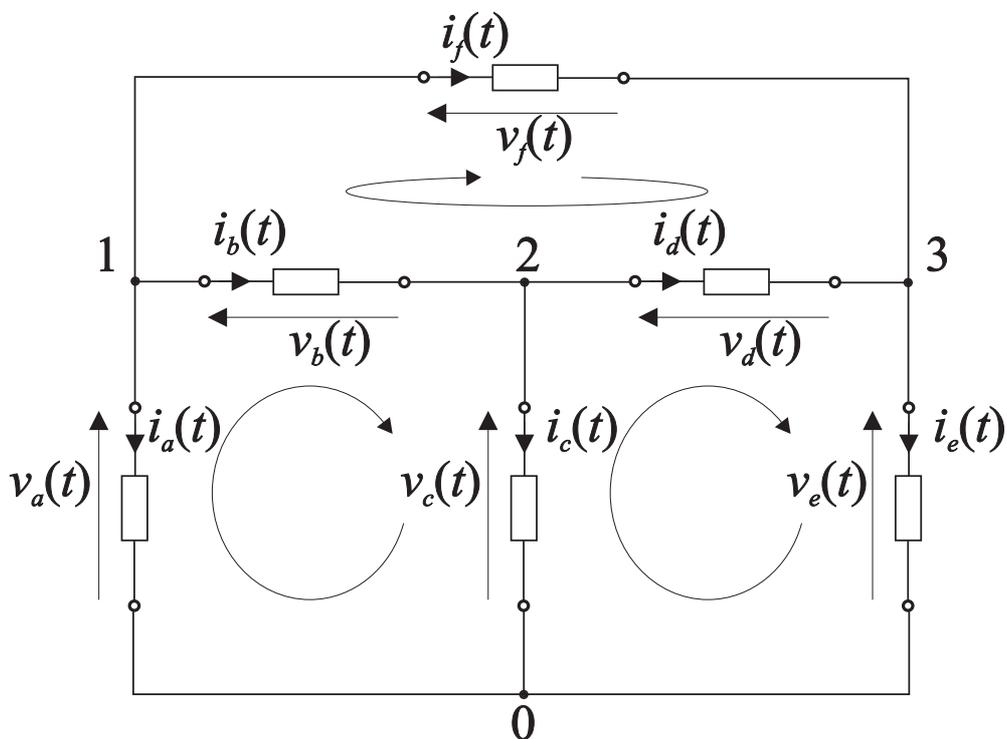
- *seconda formulazione*: Ogni ddp di ramo è data dalla differenza dei relativi potenziali di nodo

$$v_{12} = e_1 - e_2$$

- Si deve fissare un verso convenzionale positivo nella maglia per stabilire se le ddp devono essere prese con il segno più o quello meno; per esempio, prendiamo come positivo il verso orario

## Leggi di Kirchhoff - esempi

- Scriviamo le equazioni di IK per il seguente circuito, in cui  $n = 4$  e  $b = 6$



$$1 : i_a + i_b + i_f = 0$$

$$2 : -i_b + i_c + i_d = 0$$

$$3 : -i_d + i_e - i_f = 0$$

$$0 : -i_a - i_c - i_e = 0$$

## *Leggi di Kirchhoff – esempi (2)*

- La somma delle equazioni è identicamente nulla, per cui risultano essere linearmente dipendenti. Si deve allora togliere una qualsiasi delle equazioni; di regola si toglie l'equazione relativa al nodo preso come riferimento. Restano 3 equazioni
- Scriviamo le IIK per un insieme di maglie indipendenti; si dimostra che tale numero è pari a  $b - (n - 1) = 3$

$$abc : v_a - v_b - v_c = 0$$

$$cde : v_c - v_d - v_e = 0$$

$$bdf : v_b + v_d - v_f = 0$$

## *Leggi di Kirchhoff - equazioni*

- Si deve scegliere innanzi tutto il nodo di riferimento
- Si fissano arbitrariamente i versi delle correnti per ogni ramo
- le tensioni possono essere poste secondo la convenzione normale
- Si scrivono le  $n-1$  equazioni indipendenti per IK e le  $b-(n-1)$  equazioni indipendenti per IIK, per un totale di  $b$  equazioni

## *Teorema di Tellegen*

- Potenze virtuali: calcolate con insiemi di correnti e tensioni che soddisfano IK e IIK, ma non sono legate tra loro, ovvero non sono riferite a dei precisi componenti.
- Se eseguiamo il bilancio energetico in un circuito PC, ovvero sommiamo le potenze virtuali di tutti i componenti (rami del circuito), troviamo che questa somma è nulla:

$$\sum_k p_k(t) = \sum_k v_k(t) i_k(t) = \mathbf{v}^T \mathbf{i} = 0$$

## *Considerazioni riassuntive*

- Incognite del circuito:
  - $b$  correnti
  - $b$  tensioni
  - **$2b$  incognite**
- Equazioni topologiche:
  - IK  $\rightarrow n-1$  equazioni
  - IIK  $\rightarrow b-(n-1)$  equazioni
  - **$b$  equazioni topologiche**
- Equazioni costitutive:
  - **$b$  equazioni costitutive**
- Sistema completo:  **$2b \times 2b$**