Università degli Studi di Trieste
Facoltà di Ingegneria

APPUNTI del CORSO di ELETTROTECNICA

Reti in regime sinusoidale monofase I

prof. ing. Stefano Longhi

a.a. 2017-2018

RETI IN REGIME SINUSOIDALE

INTRODUZIONE

Sono delle reti nelle quali le grandezze in gioco variano al variare del tempo con legge sinusoidale.
Le reti elettriche in alta potenza sono alimentate con tensione sinusoidale con frequenza di:

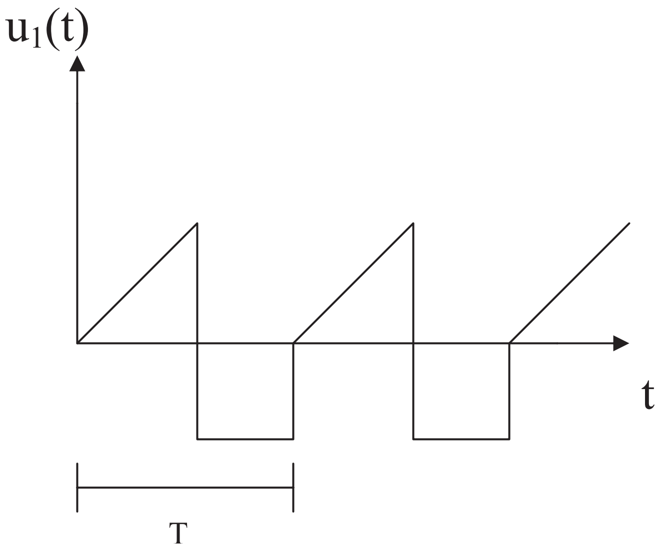
- ✓ 50 Hz in Europa
- ✓ 60 Hz in USA.

Le tensioni sinusoidali sono molto importanti nelle applicazioni pratiche.

DEFINIZIONI

Funzione periodica nel tempo t, u(t): è una funzione che rappresenta una grandezza che assume valori uguali ad intervalli di tempo pari al suo periodo T

$$u(t) = u(t + nT) \quad \forall n \in Interi \tag{1}$$



Si definiscono:

✓ Valore medio **u(t)** nel periodo **T**:

$$Um_T = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt \qquad (2)$$

✓ Valore medio **u(t)** in un qualunque intervallo di tempo τ:

$$Um_\tau = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau u(t)dt \qquad (3)$$

✓ Valore efficace o valore quadratico medio:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt} \qquad (4)$$

FUNZIONI PERIODICHE

Una qualsiasi funzione tale che soddisfi la relazione (1) e cioè: $u(t) = u(t + nT) \quad \forall n \in Interi$

può essere espressa mediante la serie di Fourier a condizione che siano verificate le ***condizioni di Dirichelet***:

1. se è discontinua presenti un numero finito di discontinuità nel periodo T
2. abbia un valor medio finito nel periodo T :

$$Um_T = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt < \infty$$

3. presenti un numero finito di massimi positivi e negativi.

Lo sviluppo di **u(t)** nella serie di Fourier in forma reale è:

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) \qquad (5)$$

con:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\cos(n\omega t)dt \qquad \mathbf{n=0,1,2,3.....} \qquad (6)$$

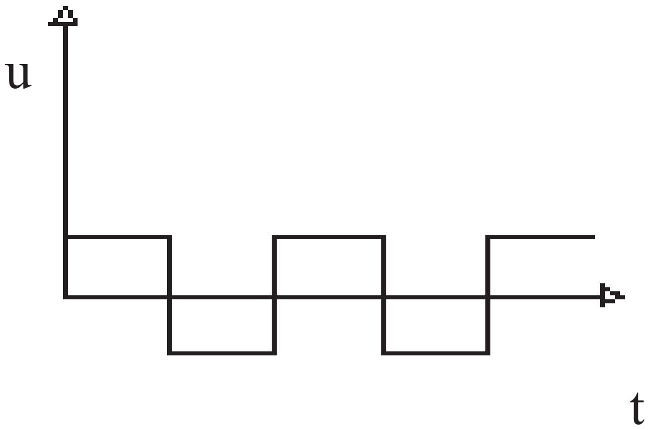
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\sin(n\omega t)dt \qquad \mathbf{n=0,1,2,3.....} \qquad (7)$$

Si definisce:

- ***Alternata o alternativa*** una grandezza periodica il cui valor medio nel periodo è uguale a zero:

$$U_{m_T} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt = 0 \qquad (8)$$

- ***Fattore di forma K_f*** di una grandezza alternativa il rapporto fra il suo valore efficace e il suo valore medio nel semiperiodo: $K_f = \dfrac{U}{U_{m_{\frac{T}{2}}}}$ (9)



Una ***grandezza alternativa è sinusoidale*** se varia nel tempo con legge sinusoidale:

$$u(t) = U_M \sin(\omega t + \alpha) \qquad (10)$$

Essa è caratterizzata da tre parametri, ossia per definirla in maniera univoca sono necessari tre parametri:

1. ***<u>A_M ampiezza</u>*** o valore massimo di picco di **a(t)** con le stesse dimensioni di **a(t)**; cioè se **a(t)** è una corrente $\mathbf{A_M}$ si misurerà in Ampere, se **a(t)** è una tensione $\mathbf{A_M}$ si misurerà in Volt, e così via.

2. $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}\left[\dfrac{rad}{s}\right]$ ***pulsazione***, legata alla frequenza

f e al periodo $T = \dfrac{1}{f}\left[\dfrac{1}{Hz}\right] = [s]$

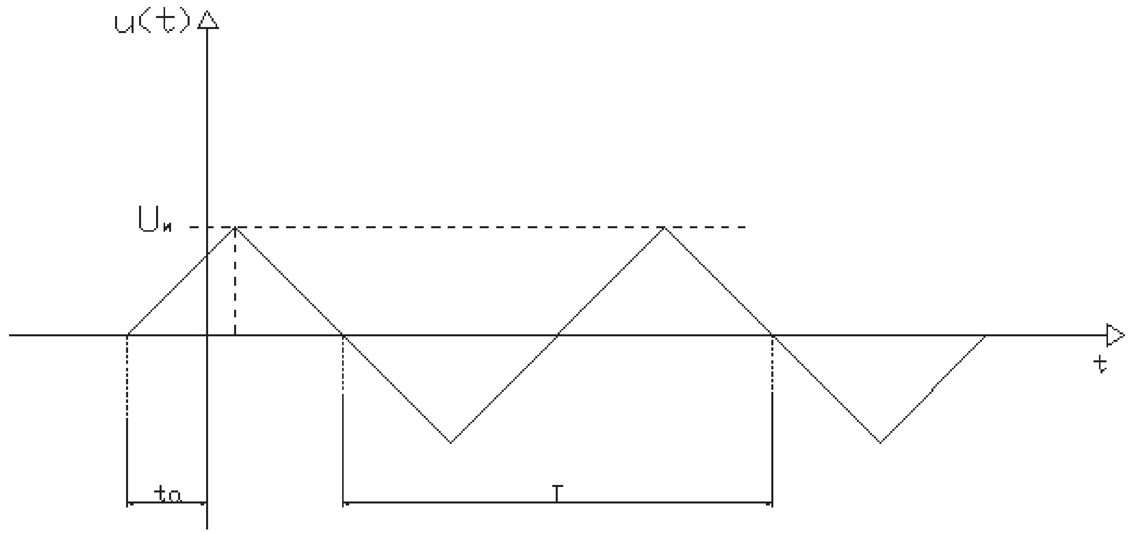
3. α $[rad]$ ***fase iniziale*** e $t_{\alpha} = \dfrac{\alpha}{\omega}\left[\dfrac{rad}{\dfrac{rad}{s}}\right] = [s]$

<u>intervallo di tempo corrispondente alla fase α.</u>

N.B. **(ωt+α)** $[rad]$ rappresenta la fase istantanea della grandezza sinusoidale. Per **t=0** risulterà **(ωt+α) = α.**

Si definisce:

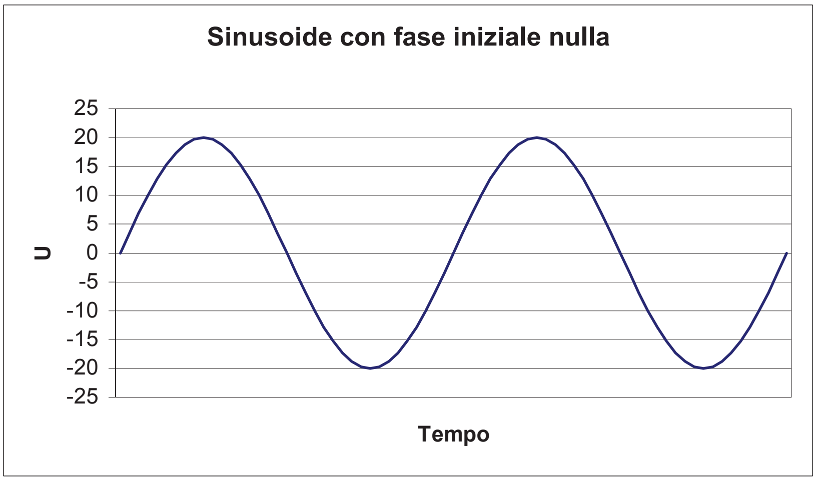
- ✓ ***Periodo T*** l'intervallo di tempo che intercorre fra due istanti successivi aventi la stessa fase istantanea



Osservazione

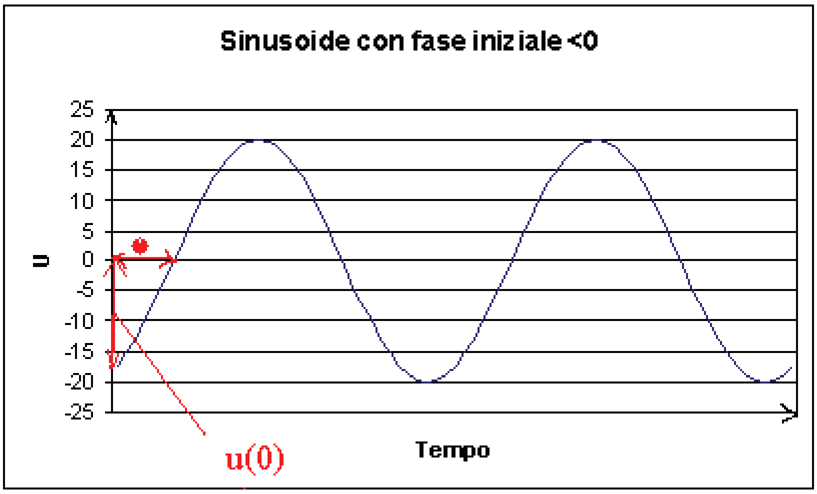
$t_\alpha = \dfrac{\alpha}{\omega}$; in funzione del valore dell'angolo α avremo i seguenti casi:

- ✓ **α=0 la u(t)=0 per (ωt+α)=0, ossia per**
- ✓ $t_\alpha = \dfrac{0}{\omega} = 0$ **$u(0)=U_M\sin(\omega t+\alpha)=0$**



- ✓ **α<0 la u(t)=0 per (ωt+α)=0, ossia per**

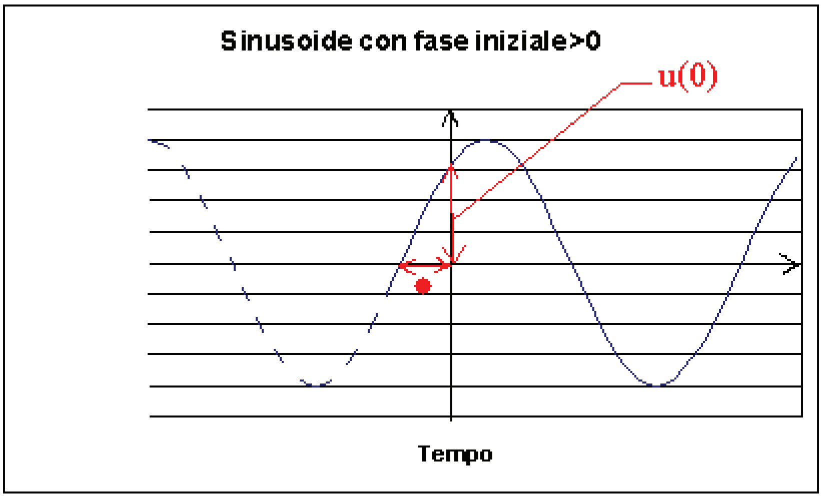
$t_\alpha = \dfrac{-\alpha}{\omega} < 0$ **$u(0)=U_M\sin\left(\dfrac{-\alpha}{\omega}\right)<0$**



- $t_\alpha = \left|\frac{\alpha}{\omega}\right| [secondi]$

✓ α>0 **la u(t)=0 per (ωt+α)=0, ossia per:**

$t_\alpha = \frac{\alpha}{\omega} > 0$ **u(0)=$U_M$sin$\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)$>0**



- $t_\alpha = \frac{\alpha}{\omega} [secondi]$

Se la fase iniziale è positiva la sinusoide è in anticipo, in caso contrario la fase iniziale è negativa e la sinusoide risulta in ritardo.

DETERMINAZIONE DEL VALORE EFFICACE DI UNA GRANDEZZA SINUSOIDALE u(t)

✓ Definizione di valore efficace

$$\boldsymbol{U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T U_M{}^2 \sin^2(\omega t)dt}} \qquad (11.a)$$

Dalle formule trigonometriche per la duplicazione degli archi:

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ da cui $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$$\boldsymbol{U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T U_M{}^2 \left(\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\right)dt}} \qquad (11.b)$$

Inoltre:

$\int_0^T \dfrac{1-\cos 2\omega t}{2}dt = \left[\dfrac{t}{2} - \dfrac{\sin 2\omega t}{4\omega}\right]_0^T$ e ricordando che $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$ si ha che la soluzione del precedente integrale risulta essere:

$$\left[\frac{T}{2} - \frac{\sin 2\frac{2\pi}{T}T}{4\frac{2\pi}{T}} - \frac{0}{2} + \frac{\sin 2\frac{2\pi}{T}}{4\frac{2\pi}{T}}\right] = \frac{T}{2}$$

La (11.b) diventerà:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} U_M^2 \frac{T}{2}} = \frac{U_M}{\sqrt{2}} \qquad (12)$$

Il ***valore medio*** $\underline{\boldsymbol{U_T}}$ di una grandezza sinusoidale u(t) nel semiperiodo sarà:

$$U_{m_{\frac{T}{2}}} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} U_M \sin(\omega t + \alpha) dt \qquad (13)$$

Cambiando il riferimento per annullare $\boldsymbol{\alpha}$:

$$U_{m_{\frac{T}{2}}} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} U_M \sin(\omega t) dt = \frac{2}{T} U_M \left[-\frac{\cos \omega t}{\omega} \right]_0^{\frac{T}{2}}$$

$$U_{m_{\frac{T}{2}}} = \frac{2}{T} \left[U_M \left(-\frac{\cos \omega \frac{T}{2}}{\omega} + \frac{\cos \omega 0}{\omega} \right) \right] =$$

$$U_{m_{\frac{T}{2}}} = \frac{2}{T} \left[U_M \left(-\frac{\cos \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2}}{\omega} + \frac{1}{\omega} \right) \right] = \frac{2}{T} U_M \left[\frac{\cos \pi}{\omega} + \frac{1}{\omega} \right] =$$

$$= \frac{2}{T} U_M \left[\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega} \right] =$$

$$= \frac{2}{T} U_M \frac{2}{\omega} = \frac{2}{T} U_M \frac{2}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{2}{\pi} U_M = 0.636 U_M$$

Il ***fattore di forma*** di una grandezza sinusoidale sarà:

$$K_f = \frac{U}{U_{m_{\frac{T}{2}}}} = \frac{\frac{U_M}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\pi} U_M} = 1.11 \qquad (14)$$

METODO SIMBOLICO PER LO STUDIO DEI CIRCUITI IN REGIME SINUSOIDALE

Se una rete lineare è alimentata da un generatore sinusoidale $\mathbf{e(t)=E_M\ sin(\omega t+\alpha)}$, risulteranno sinusoidali tutte le tensioni e tutte le correnti che si stabiliranno nei diversi rami del circuito.
L'importanza delle eccitazioni di tipo sinusoidale è legata al fatto che:

- ***qualsiasi funzione periodica nel tempo o alternativa è sviluppabile in una serie di funzioni*** del tipo:

  $\mathbf{e_i(t)=E_{Mi}sin(\omega_i t+\alpha_i)}$ con $\omega_i = 2\pi f_i = \dfrac{2\pi}{T_i}$ con pulsazione $\mathbf{\omega_i=i\omega}$ **per i=0, 1 ,2 ,….(**sviluppo in serie di Fourier) e che

- ***per circuiti lineari vale il principio di sovrapposizione degli effetti***.

Per tali motivi lo studio di questi circuiti si riconduce allo studio di circuiti alimentati da un solo segnale sinusoidale (tanti circuiti quante sono le componenti dello sviluppo di Fourier), per poi applicare il principio di sovrapposizione degli effetti per tutti i contributi delle cause, o eccitazioni, alle diverse frequenze.

In base delle considerazioni già fatte, poiché una funzione sinusoidale $\mathbf{e(t)=E_M\,sin(\omega t+\alpha)}$ è definita da tre parametri (ampiezza $\mathbf{E_M}$, pulsazione ω, fase α) è possibile semplificare notevolmente i calcoli trasformando:

l'insieme delle funzioni sinusoidali **S** in un insieme di funzioni complesse **C** con una corrispondenza biunivoca.

Insieme delle funzioni sinusoidali S

$$\mathbf{u(t)=U_M sin(\omega t+\alpha)} \qquad (15)$$

$$\Updownarrow$$

Insieme delle funzioni complesse C

$$\mathbf{U(j\omega t)=U_M\,e^{\,j(\omega t+\alpha)}} \qquad (16)$$

Le operazioni tra grandezze sinusoidali, che richiedono l'applicazione di tutte le formule relative alla trigonometria, vengono così semplificate in operazioni più semplici da eseguire fra grandezze simboliche complesse.

La corrispondenza risulta anche ***isomorfa****, cioè conserva le operazioni fondamentali.*

Relazioni tra le ***grandezze sinusoidali****, i corrispondenti* ***vettori rotanti*** *nella rappresentazione complessa e i* ***fasori*** *della rappresentazione fasoriale*

Rappresentazione sinusoidale $\boldsymbol{e(t) = E_M \cos(\omega t + \alpha)}$

Rappresentazione complessa $\boldsymbol{E(j\omega t) = E_M e^{j(\omega t+\alpha)}}$

Ricordando che $\cos\alpha = \dfrac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$ avremo:

$$\boldsymbol{e(t) = E_M \cos(\omega t + \alpha) = E_M \frac{e^{j(\omega t+\alpha)} + e^{-j(\omega t+\alpha)}}{2} =}$$

$$\boldsymbol{= E_M \frac{e^{j\omega t} e^{j\alpha} + e^{-j\omega t} e^{-j\alpha}}{2} =}$$

$$\boldsymbol{= \frac{(E_M e^{j\alpha})e^{j\omega t} + (E_M e^{-j\alpha})e^{-j\omega t}}{2}}$$

Ponendo: $\bar{E} = E_M e^{j\alpha}$ e $\bar{E}^* = E_M e^{-j\alpha}$, si ricava:

$$\boldsymbol{e(t) = E_M \cos(\omega t + \alpha) = \frac{\bar{E} e^{j\omega t} + \bar{E}^* e^{-j\omega t}}{2} = Re\left[\bar{E}\, e^{j\omega t}\right]}$$

(17)

Ricordando che se $\bar{I} = I_R + jI_I$ si ha:

- ✓ $\bar{I} + \bar{I}^* = I_R + jI_I + I_R - jI_I = 2I_R = 2\,\mathrm{Re}\left[\bar{I}\right]$ (18)
- ✓ $\bar{I} - \bar{I}^* = I_R + jI_I - I_R + jI_I = 2jI_I = 2j\,\mathrm{Im}\left[\bar{I}\right]$ (19)

Quindi: $$Re\left[\overline{I}\right]=\frac{\overline{I}+\overline{I}^{*}}{2} \tag{20}$$

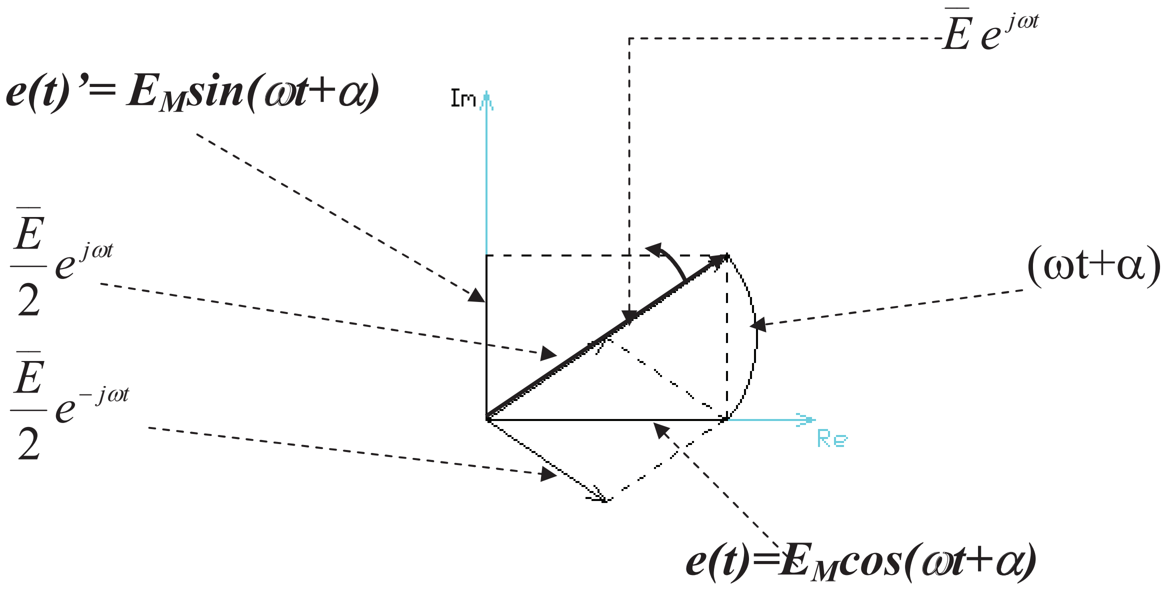
$$Im\left[\overline{I}\right]=\frac{\overline{I}-\overline{I}^{*}}{2j} \tag{21}$$

Dall'espressione della rappresentazione complessa si ottengono le seguenti relazioni:

$$e(t)=E_M\cos(\omega t+\alpha)=\frac{\overline{E}}{2}e^{j\omega t}+\frac{\overline{E}}{2}e^{-j\omega t}=Re\left[\overline{E}e^{j\omega t}\right]$$

$$e'(t)=E_M\sin(\omega t+\alpha)=\frac{\overline{E}}{2j}e^{j\omega t}-\frac{\overline{E}}{2j}e^{-j\omega t}=Im\left[\overline{E}e^{j\omega t}\right] \tag{22}$$

che possono essere visualizzate attraverso la seguente rappresentazione grafica:



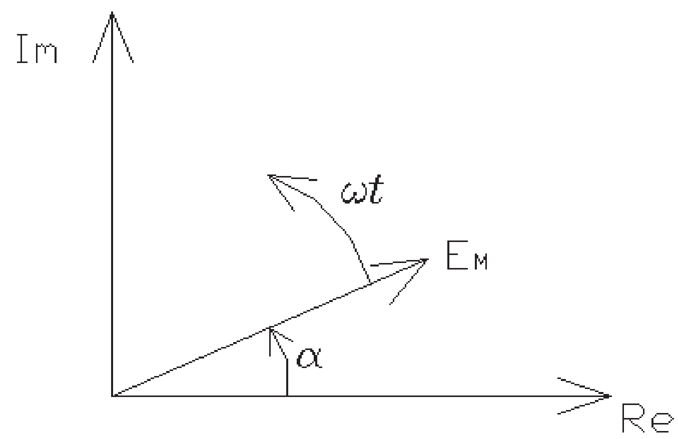
Si vede come **e(t)** risulta essere:

- ✓ la proiezione sull'asse reale del vettore rotante e
- ✓ uguale in ogni istante alla somma di due vettori rotanti con velocità angolare opposta **jωt** e **-jωt**, di modulo $\frac{E_M}{2}$ pari alla metà dell'ampiezza del vettore rotante associato $\overline{E}(j\omega t)$.

Più grandezze sinusoidali di uguale frequenza possono essere rappresentate con i **fasori**, ossia ***<u>considerando i vettori rotanti associati alla rappresentazione complessa relativi all'istante t=0.</u>***
Ciò è possibile perché ***<u>grandezze complesse della stessa frequenza ruotano mantenendo fra loro lo stesso sfasamento al variare del tempo.</u>***

Quindi:

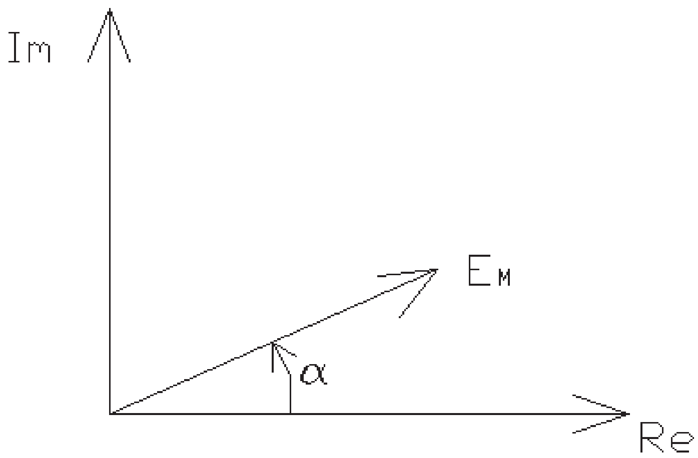
1. Rappresentazione sinusoidale
$$e(t) = E_M \sin(\omega t + \alpha)$$
2. Rappresentazione complessa
$$E(j\omega t) = E_M e^{j(\omega t + \alpha)}$$



fasore rotante

3. Rappresentazione fasoriale

$$\bar{E} = E_M e^{j\alpha}$$



fasore fisso

In questo modo ad ogni grandezza sinusoidale corrisponde una grandezza complessa con modulo pari al valore massimo (o efficace) e fase pari alla fase iniziale.

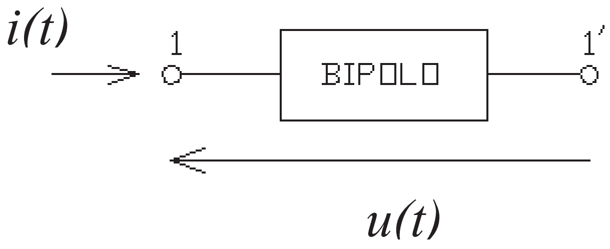
- ***Con la rappresentazione fasoriale <u>non viene espresso il terzo parametro ω</u>,*** *perché è definito a priori per tutte le grandezze aventi la stessa pulsazione e quindi rappresentabili sullo stesso piano complesso.*

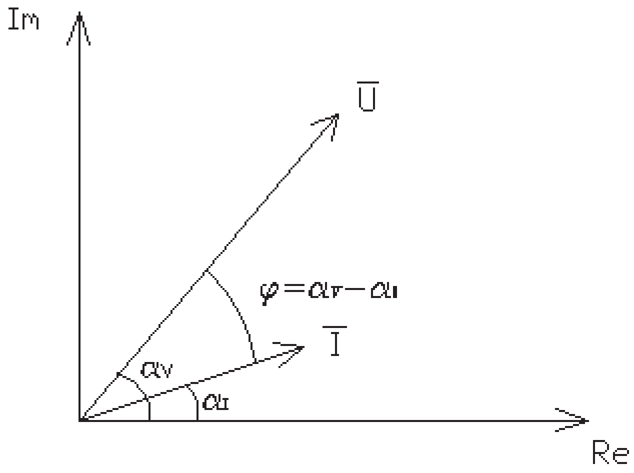
- ***<u>Grandezze di pulsazioni diverse non possono essere rappresentate sullo stesso piano</u>*** *perché in ogni istante varia lo sfasamento relativo fra loro.*

BIPOLI E CIRCUITI SEMPLICI

Ipotesi: *<u>circuito in regime sinusoidale permanente</u>*.

Se ad un bipolo si applica una tensione sinusoidale ***u(t)***, esso assorbirà una corrente sinusoidale ***i(t)*** sfasata di un certo angolo che dipende dalla natura stessa del bipolo.





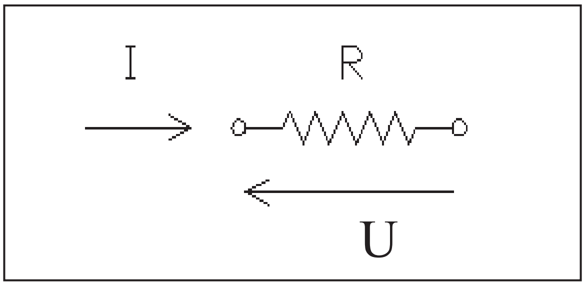
$$\begin{cases} u(t) = U_M \sin(\omega t + \alpha_V) \\ i(t) = I_M \sin(\omega t + \alpha_I) \end{cases}$$

$$\overline{U} = U \angle \alpha_V \qquad \overline{I} = I \angle \alpha_I$$

$$U = \frac{U_M}{\sqrt{2}} \qquad I = \frac{I_M}{\sqrt{2}}$$

Lo <u>sfasamento</u> fra le due grandezze può essere positivo o negativo ed è espresso dalla relazione $\varphi=\alpha_V-\alpha_I$ ossia dalla <u>differenza fra le fasi</u>.

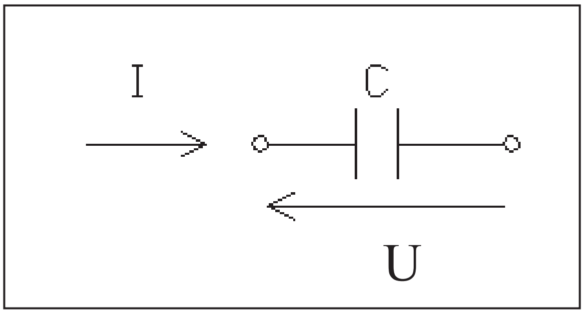
FUNZIONAMENTO DEI BIPOLI ELETTRICI R, L, C IN CORRENTE CONTINUA



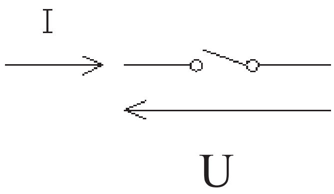
Resistore o resistenza ideale

$$U = RI \qquad (1)$$

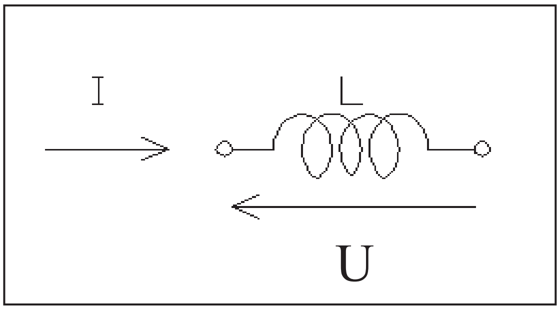
Vale la legge di Ohm



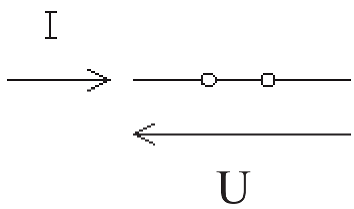
Capacitore o condensatore ideale



$$\boldsymbol{R = \infty \longrightarrow I = \frac{U}{R} = 0} \qquad (2)$$



Induttore o induttanza ideale



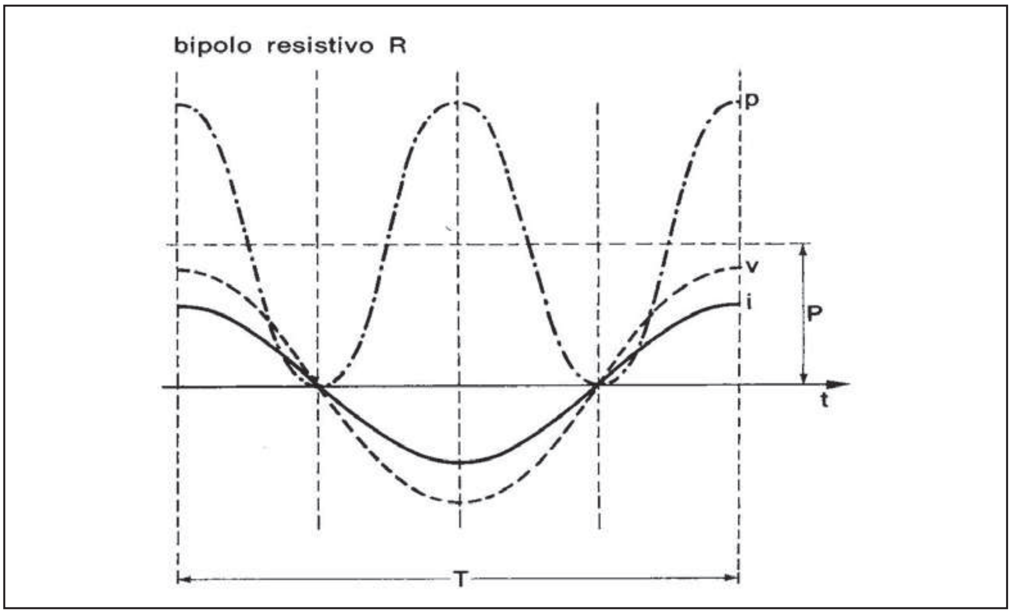
$$\boldsymbol{R = 0 \longrightarrow U = 0 ; I = 0} \qquad (3)$$

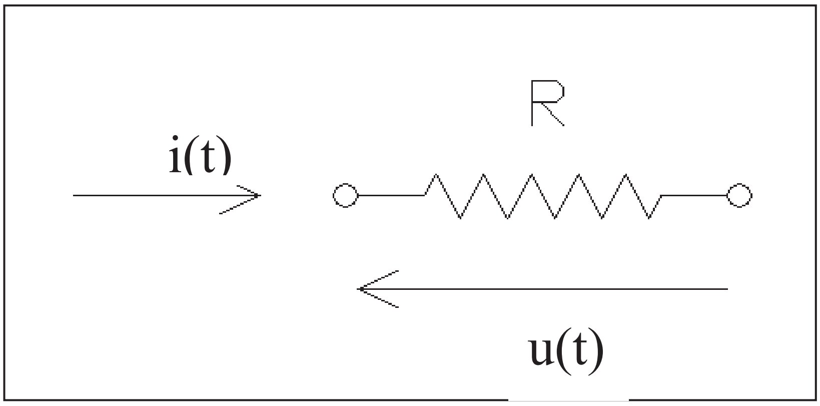
Il condensatore ideale in corrente continua equivale ad un interruttore aperto; non circola corrente (funzionamento a vuoto).

L'induttore ideale in corrente continua equivale ad un interruttore chiuso privo di resistenza; la tensione ai capi del bipolo è nulla (funzionamento in corto circuito).

FUNZIONAMENTO DEI BIPOLI ELETTRICI R, L, C IN REGIME SINUSOIDALE PERMANENTE

✓ Bipolo resistivo





R(Ω)= ***Resistenza***

$$\boxed{\begin{aligned} i(t) &= \sqrt{2}I \sin\omega t = I_M \sin\omega t \\ u(t) &= Ri(t) = RI_M \sin\omega t = U_M \sin\omega t \end{aligned}} \qquad (1)$$

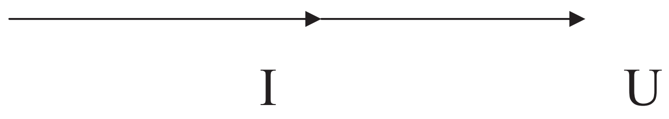
$$U_M = RI_M$$

$$U_M = \sqrt{2}U \longrightarrow u(t) = \sqrt{2}U \sin\omega t \qquad (2)$$

Utilizzando la rappresentazione fasoriale:

$\bar{U} = \bar{U} \angle 0$ (Volt)

$\bar{I} = \bar{I} \angle 0$ (Ampere)

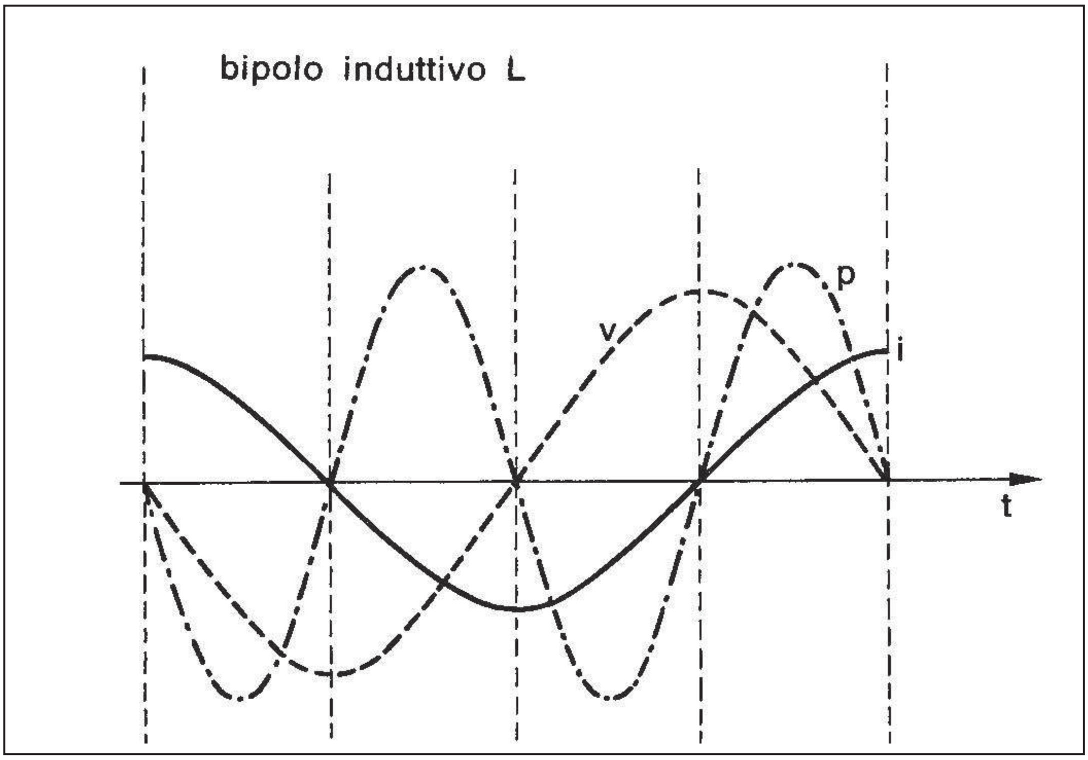


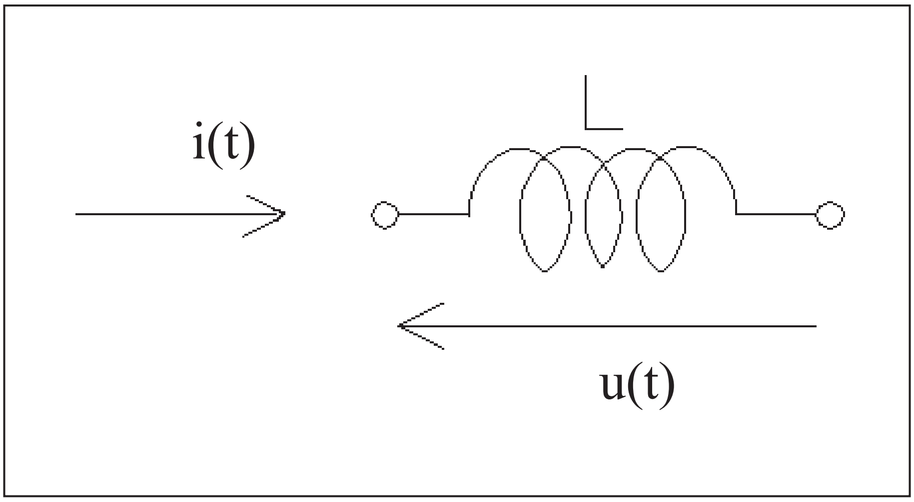
$$\bar{U} = R\,\bar{I} \qquad (3)$$

con $U = \dfrac{U_M}{\sqrt{2}}\,;\, I = \dfrac{I_M}{\sqrt{2}}\,;$

Le due grandezze risultano in fase pur avendo dimensioni e ampiezze diverse.

✓ Bipolo induttivo





L(Henry) = ***Induttanza***

Per la <u>*legge di Lenz*</u>: $\boldsymbol{u_L(t) = L\frac{di}{dt}}$ (4)

Poiché $i(t) = I_M \sin \omega t$, avremo:

$$u_L(t) = \omega L I_M \cos \omega t = \omega L I_M \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = U_M \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{5}$$

con $U_M = \omega L I_M$ (6)

Si definiscono:

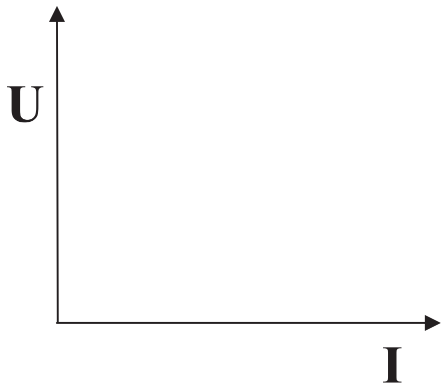
<u>Reattanza induttiva</u>: $X_L = \omega L = 2\pi f L$ (Ω) (7)

<u>Suscettanza induttiva</u>: $B_L = \dfrac{1}{\omega L} = \dfrac{1}{2\pi f L}$ (S) (8)

Utilizzando la rappresentazione fasoriale:

$\bar{U} = U\angle\dfrac{\pi}{2}$ (Volt)

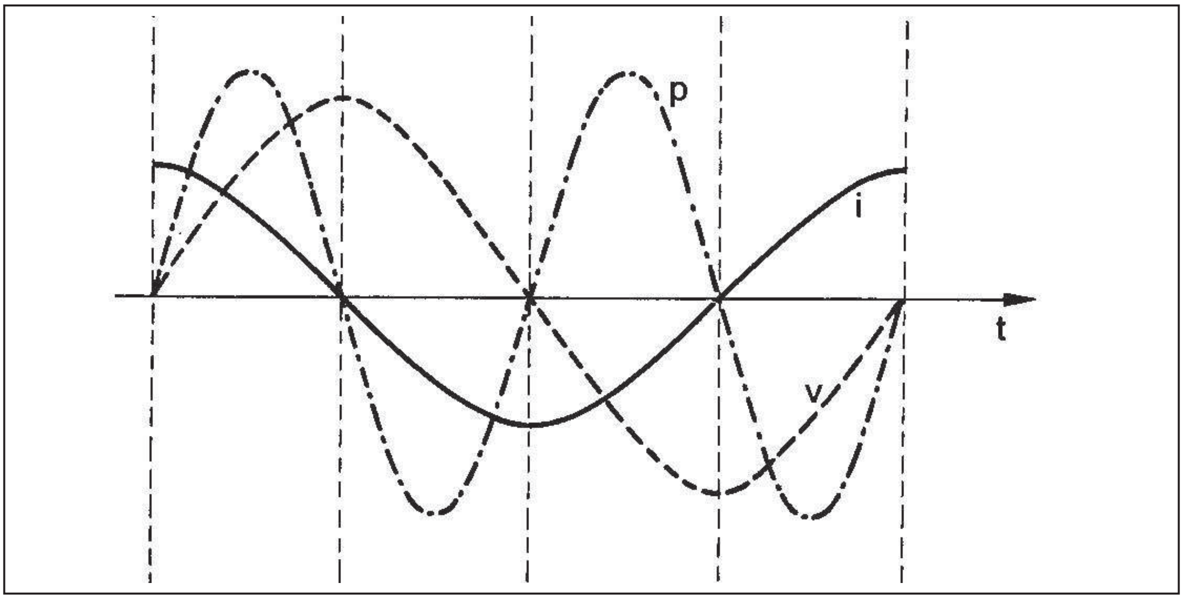
$\bar{I} = I\angle 0$ (Ampere)

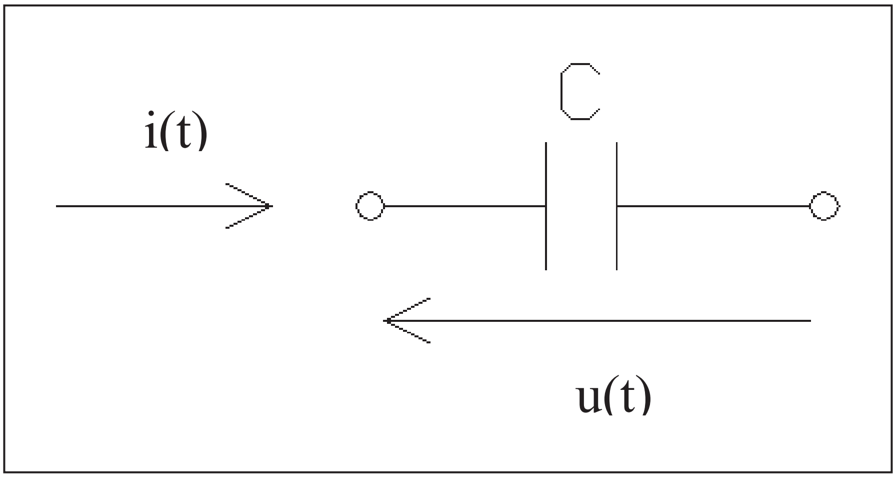


$$U_L = \frac{U_M}{\sqrt{2}}\,;\, I = \frac{I_M}{\sqrt{2}}$$

Inoltre: $\bar{U}_L = (\omega L I)\angle\dfrac{\pi}{2} = j\omega L\,\bar{I}$ (9)

Bipolo capacitivo





C (Farad) = ***Capacità o capacitore***

La relazione che lega tensione e corrente in un bipolo capacitivo è duale a quella trovata per il bipolo induttivo:

$$i(t) = C\frac{du}{dt} \qquad (10)$$

Quindi se $u(t) = U_M \sin \omega t$

$$i(t) = \omega C U_M \cos \omega t = (\omega C U_M) \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= I_M \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \textbf{(11)}$$

con $I_M = \omega C U_M$ (12)

$$U_M = \frac{1}{\omega C} I_M \qquad (13)$$

Si definiscono:

<u>Reattanza capacitiva</u>: $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ (Ω) (14)

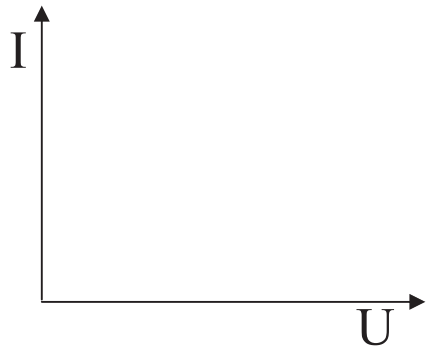
<u>Suscettanza capacitiva</u>: $B_C = \omega C$ (S) (15)

Con i valori efficaci: $U = \dfrac{1}{\omega C} I = X_C I$ (16)

utilizzando la rappresentazione fasoriale:

$\bar{U} = \bar{U} \angle 0$ (Volt)

$\bar{I} = \bar{I} \angle \dfrac{\pi}{2}$ (Ampere)

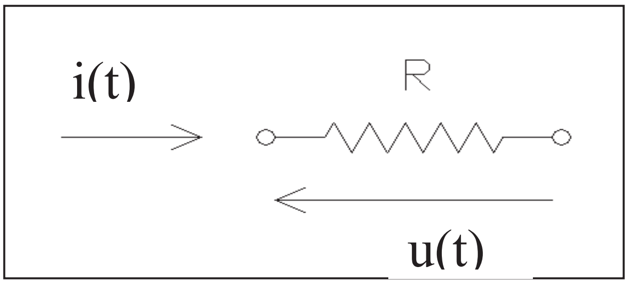


$$\bar{I} = j \omega C \bar{U} \qquad (17)$$

$$\bar{U} = -j \frac{1}{\omega C} \bar{I} \qquad (18)$$

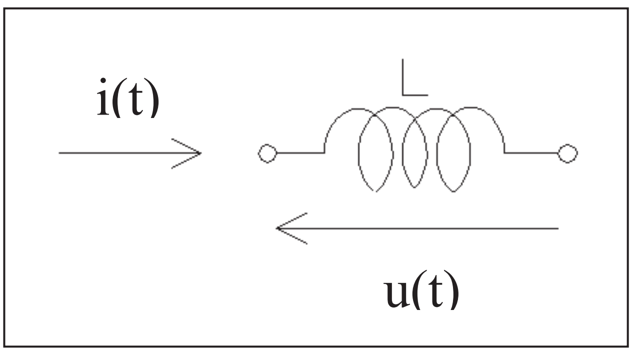
EQUAZIONI COSTITUTIVE DEI COMPONENTI ELEMENTARI

1. ***Resistore***:
   - ✓ <u>equazione costitutiva in c.a.</u>: $u(t) = Ri(t)$
   - ✓ <u>equazione costitutiva in c.c.</u> : $U = RI$



2. ***Induttore***
   - ✓ <u>*equazione costitutiva in c.a.*</u> $u(t) = L\frac{di(t)}{dt} = \frac{d\Phi(t)}{dt}$
   - ✓ <u>*equazione costitutiva in c.c.*</u> La corrente I non varia e la tensione **U=0**.

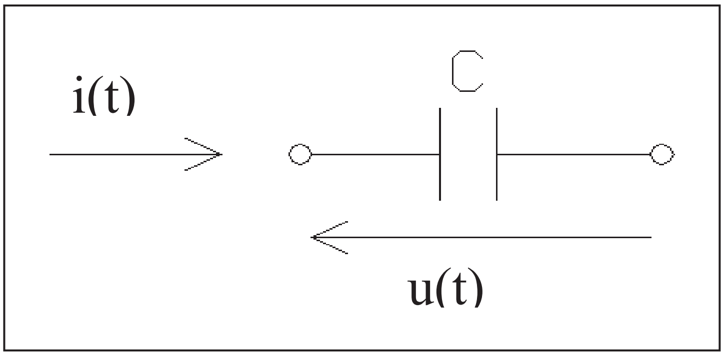
L'induttore equivale ad un interruttore chiuso o ad una resistenza di valore nullo.



N.B. **Φ=LI** (Weber)

3. Capacitore

- <u>*equazione costitutiva in c.a.*</u>: $\boldsymbol{i(t) = C\frac{du(t)}{dt} = \frac{dq(t)}{dt}}$
- <u>*equazione costitutiva in c.c.*</u>: La tensione non varia nel tempo e la corrente è sempre nulla. Il capacitore equivale ad un interruttore aperto o ad una resistenza di valore infinito.

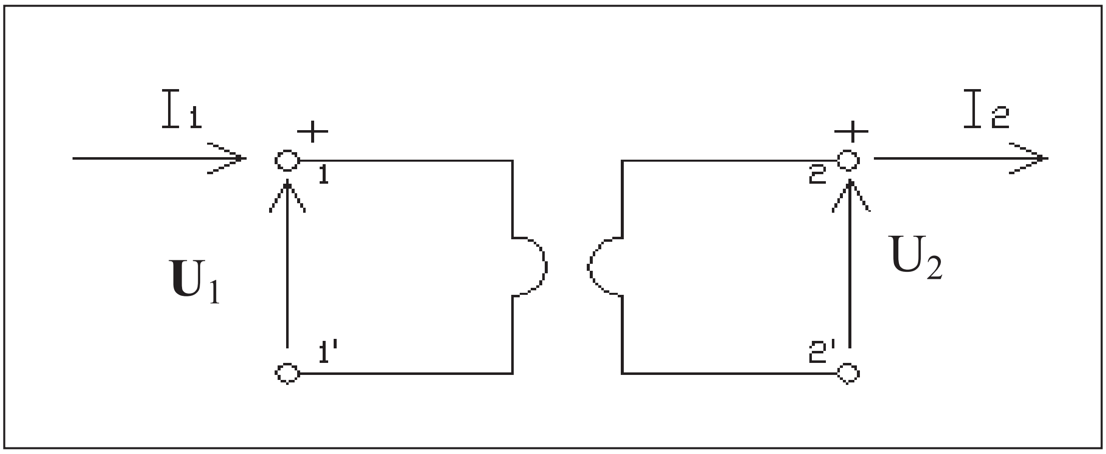


N.B. **Q=CV**:quantità di carica (Coulomb)

Fra i **componenti elementari principali** esistono altre tre categorie:

1. ***Trasformatore ideale***
2. ***Generatore ideale di tensione*** (pilotato in corrente o in tensione)
3. ***Generatore ideale di corrente*** (pilotato in corrente o in tensione)

<u>Trasformatore ideale</u>



$$\begin{cases} u_1 = n u_2 \\ i_1 = -\frac{1}{n} i_2 \end{cases} \qquad (4)$$

1-1' = *morsetti primari*; **2-2'** = *morsetti secondari*

n = rapporto di trasformazione (è un numero reale)

La potenza istantanea $p_1(t)$ è data dalla seguente relazione:

$$p_1(t) = u_1 i_1 = -n u_2 \frac{1}{n} i_2 = -u_2 i_2 = -p_2(t) \qquad (5)$$

essendo :

$$p_2(t) = u_2 i_2$$

La relazione (5) indica che:

- ✓ ***il trasformatore è trasparente alle potenze*** (potenza in ingresso pari alla potenza in uscita), mentre
- ✓ ***variano tensioni e correnti***, che hanno valori in ingresso e in uscita in proporzione mutuamente inversa.

Se $\boldsymbol{n > 1 \longrightarrow u_1 > u_2}$ ***: trasformatore − abbassatore***

Se $\boldsymbol{n < 1 \longrightarrow u_1 < u_2}$ ***: trasformatore − elevatore***

Se $\boldsymbol{n = 1 \longrightarrow u_1 = u_2}$ ***: trasformatore di isolamento***

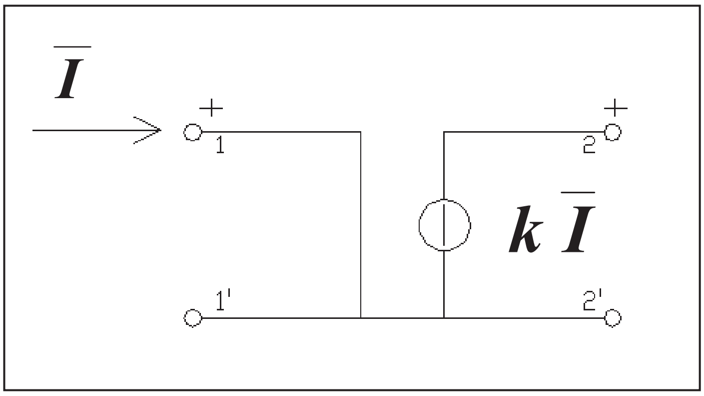
Il trasformatore di isolamento (n=1) viene utilizzato per separare una parte del circuito da un'altra per motivi principalmente dovuti alla sicurezza elettrica.

Essendo $p_1(t) = u_1 i_1 = -u_2 i_2 = -p_2(t)$ la potenza assorbita dal doppio bipolo è $p(t) = u_1 i_1 - u_2 i_2 = 0$, ossia la potenza entrante è uguale a quella uscente. In base a queste considerazioni risulta che: ***il trasformatore ideale è un elemento passivo e non dissipativo, non è dotato di stato,*** in quanto sia le tensioni che le correnti primarie e secondarie sono legate da relazioni algebriche e non differenziali (non ci sono derivate temporali, quindi non si può parlare né di condizioni iniziali, né di variabili di stato).

La base di definizione è mista: $\mathbf{(u_1;i_2)}$ o $\mathbf{(u_2;i_1)}$. *<u>Questo quadripolo ideale è utile per modellare componenti reali.</u>*

<u>Generatore ideale di tensione controllato</u>

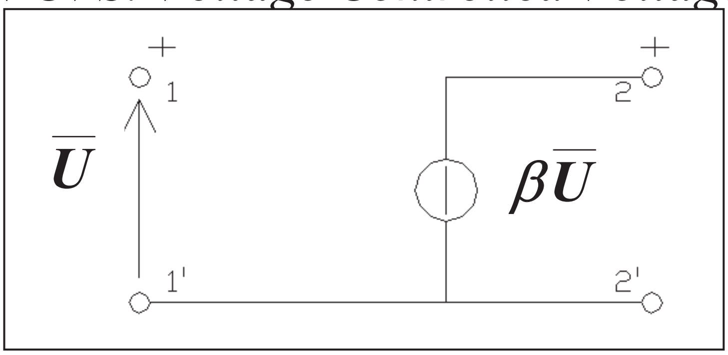
✓ <u>Generatore di tensione pilotato in corrente</u>
(CCVS: Current Controlled Voltage Source)



$k[\Omega]$

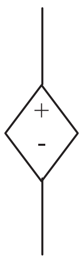
transimpedenza

✓ <u>Generatore di tensione pilotato in tensione</u>
(VCVS: Voltage Controlled Voltage Source)



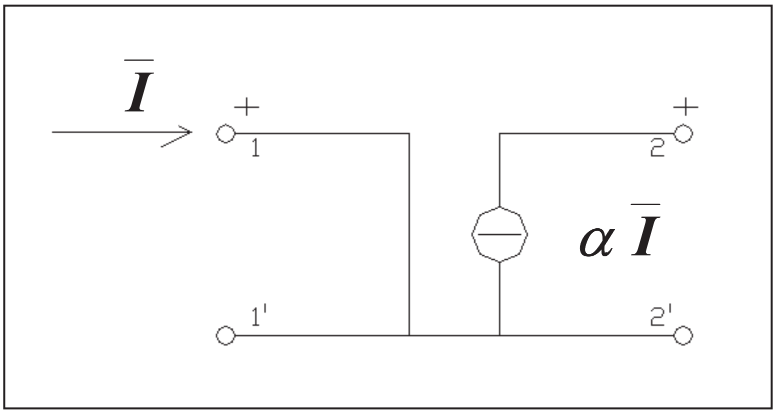
$\beta[ad]$

Altro simbolo previsto dalle norme:



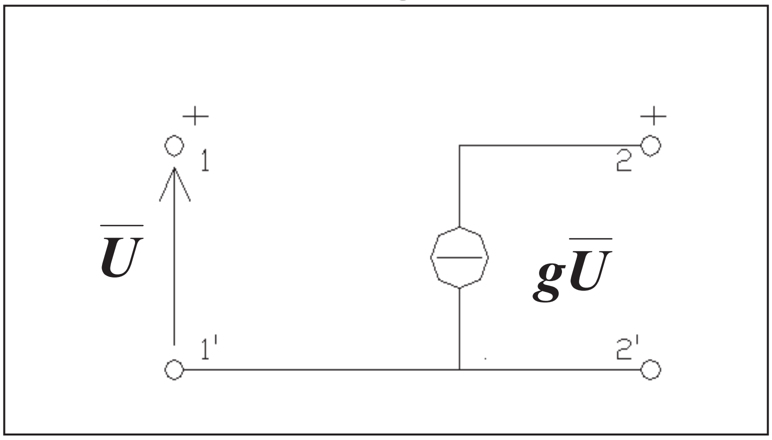
Generatore ideale di corrente controllato

- ✓ Generatore di corrente pilotato in corrente
  (CCCS:Current Controlled Current Source)



$\alpha[ad]$

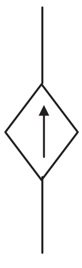
- ✓ Generatore di corrente pilotato in tensione
  (VCCS: Voltage Controlled Current Source)



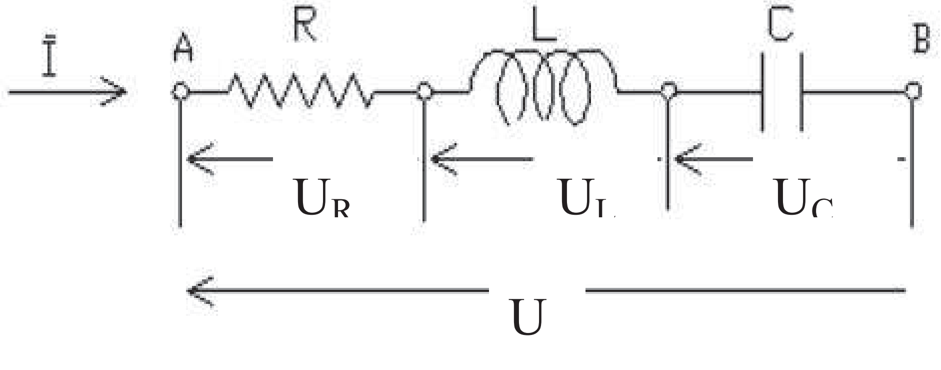
$g[Siemens\ ]$

transammettenza

Altro simbolo previsto dalle norme:



BIPOLO RLC



$$\overline{U}_{AB} = \overline{U}_R + \overline{U}_L + \overline{U}_C \qquad (1)$$

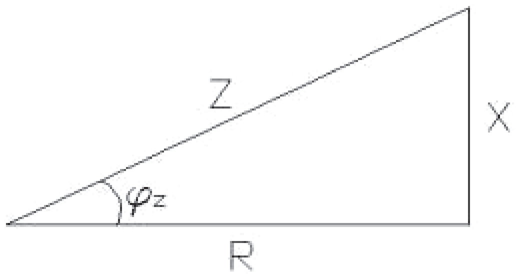
$$\overline{U}_{AB} = R\overline{I} + jX_L\overline{I} - jX_C\overline{I} = [R + j(X_L - X_C)]\overline{I} \qquad (2)$$

Introducendo il concetto di **impedenza** avremo:

$$\overline{U}_{AB} = \dot{Z}\overline{I} \quad \text{(N.B. } \dot{Z} \text{ è un operatore complesso)} \qquad (3)$$

$$\dot{Z} = Z\angle\varphi \longrightarrow Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad \text{modulo di } \dot{Z} \qquad (4)$$

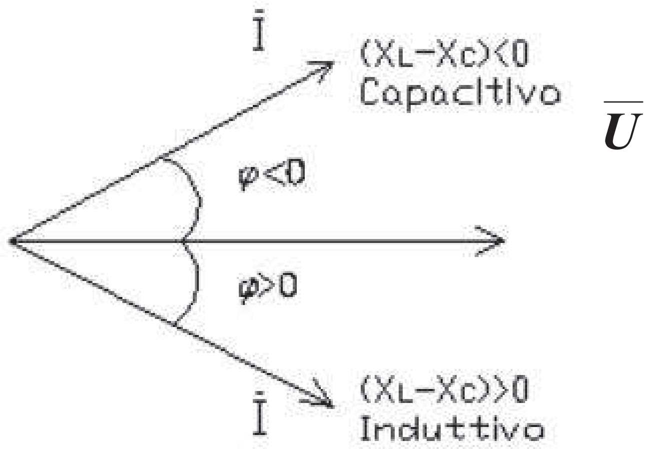
$$\varphi_Z = \arctan\frac{X_L - X_C}{R} \quad \text{argomento di } \dot{Z} \qquad (5)$$



R = Z cosφ_z (6)

X = Z sinφ_z= R tanφ_z (7)

- Se $\mathbf{X_L}$-$\mathbf{X_C}$ **>0** prevale il fenomeno induttivo e la corrente è in ritardo rispetto alla tensione
- Se $\mathbf{X_L}$-$\mathbf{X_C}$ **<0** prevale il fenomeno capacitivo e la corrente è in anticipo rispetto alla tensione



Ammettenza

$$\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}} = G + jB; \quad (8)$$

G = ***conduttanza*** (Siemens)

B = ***suscettanza*** (Siemens)

$\dot{Y} = Y\angle\varphi_Y$ (con notazione fasoriale)

ATTENZIONE:

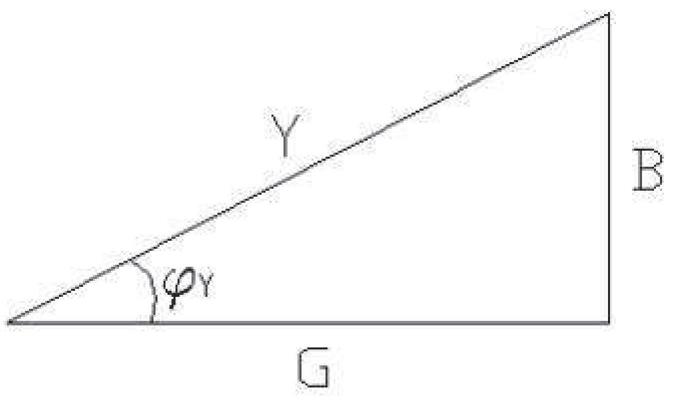
$$\dot{Y} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2} - j\frac{X}{Z^2} \neq \frac{1}{R} + j\frac{1}{X} \qquad (9)$$

$$Y = \sqrt{\frac{R^2}{Z^4} + \frac{X^2}{Z^4}} = \sqrt{\frac{Z^2}{Z^4}} = \sqrt{\frac{1}{Z^2}} = \frac{1}{Z} \qquad (10)$$

$$\varphi_Y = arctan\frac{-\frac{X}{Z^2}}{+\frac{R}{Z^2}} = arctan-\frac{X}{R} = -arctan\frac{X}{R} = -\varphi \qquad (11)$$

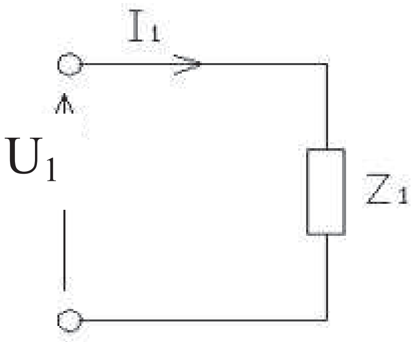
Quindi: $$\boxed{Y = \frac{1}{Z}; \qquad \varphi_Y = -\varphi_Z} \qquad (12)$$

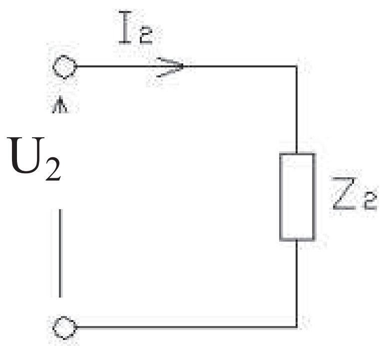
Analogamente a quanto fatto per le impedenze, si definisce un ***triangolo delle ammettenze:***



In regime sinusoidale due bipoli si dicono equivalenti se presentano ai loro morsetti la stessa impedenza equivalente, ossia il rapporto fra il fasore della tensione e quello della corrente é lo stesso.

$$\dot{Z}_1 = \frac{\bar{U}_1}{\bar{I}_1}$$





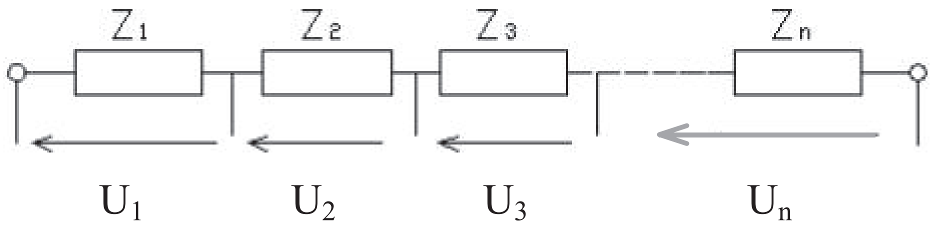
$$\dot{Z}_2 = \frac{\bar{U}_2}{\bar{I}_2}$$

Se $\bar{U}_1 = \bar{U}_2 = \bar{U} \longrightarrow \bar{I}_1 = \bar{I}_2 = \bar{I} \longrightarrow \dot{Z}_1 = \dot{Z}_2$

IMPEDENZE IN SERIE E IN PARALLELO

Come in corrente continua, valgono relazioni analoghe a quelle viste per il partitore di tensione e di corrente realizzati in regime permanente con i resistori.

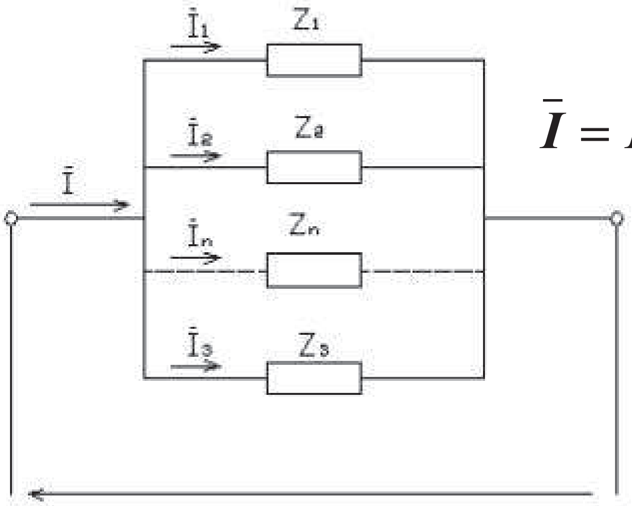
- ✓ ***Serie***: $\dot{Z}_{eq} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + ... + \dot{Z}_n = \sum_{i=1}^{n} \dot{Z}_i$ (1)



$$\bar{U}_i = \frac{\dot{Z}_i}{\sum_{i=1}^{n} \dot{Z}_i} \bar{U} \qquad (2)$$

✓ **Parallelo**: $$\frac{1}{\dot{Z}_{eq}} = \frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3} + \ldots + \frac{1}{\dot{Z}_n} \tag{3}$$

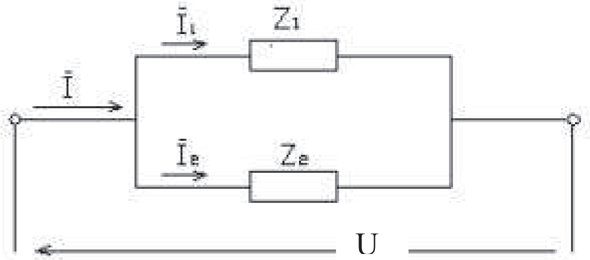
$$\dot{Y}_{eq} = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 + \ldots + \dot{Y}_n \tag{4}$$



$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 + \ldots + \bar{I}_n \tag{5}$$

$$\bar{I}_i = \frac{\dot{Y}_i}{\sum_{i=1}^{n} \dot{Y}_i} \bar{I} \tag{6}$$

Nel caso particolare di due sole impedenze in parallelo avremo:

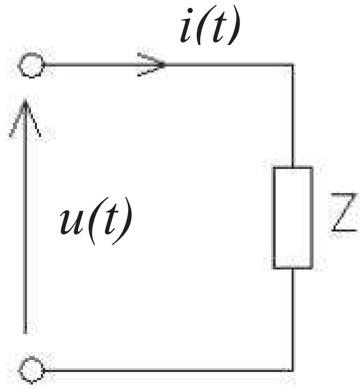


$$\bar{I}_1 = \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \bar{I} = \frac{\dot{Y}_1}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2} \bar{I} \tag{7}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \bar{I} = \frac{\dot{Y}_2}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2} \bar{I}$$

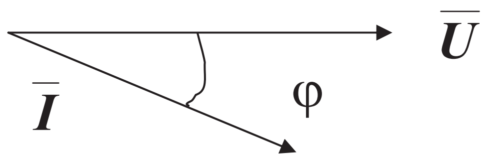
$$\dot{Z}_{eq} = \frac{\dot{Z}_1 * \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \tag{8}$$

POTENZA ISTANTANEA IN UN BIPOLO



Se si alimenta un bipolo passivo in regime sinusoidale le tensioni e le correnti relative saranno:

$$u(t) = U_M \sin \omega t$$
$$i(t) = I_M \sin(\omega t - \varphi)$$



Si definisce *potenza istantanea p(t)*:

$$p(t) = u(t) i(t) = U_M I_M \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) \tag{1}$$

essendo $\sin\alpha \sin\beta = -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right] \tag{2}$$

$$p(t) = \frac{U_M I_M}{2}\cos\varphi - \frac{U_M I_M}{2}\cos(2\omega t - \varphi) =$$

$$= \frac{U_M}{\sqrt{2}}\frac{I_M}{\sqrt{2}}\cos\varphi - \frac{U_M}{\sqrt{2}}\frac{I_M}{\sqrt{2}}\cos(2\omega t - \varphi) =$$

$$= UI\cos\varphi + UI\sin\left(2\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \tag{3}$$

essendo: $-\cos\alpha = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ (4)

- $\underline{UI\cos\varphi}$: é costante e coincide con il ***valor medio della potenza istantanea p(t) nel semiperiodo***, essa é ***la potenza attiva o reale*** e $\underline{\cos\varphi}$ è il ***fattore di potenza***.

  La potenza attiva si indica con **P**. Si ha:

  $$\mathbf{P \geq 0} \quad \text{per} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

  $$\mathbf{P < 0} \quad \text{per} \quad \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$$

- $\underline{UI\sin\left(2\pi t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)}$ è la ***potenza fluttuante di pulsazione doppia 2ω*** rispetto alla potenza attiva. Questo termine non da contributo di potenza attiva.

POTENZA ATTIVA, REATTIVA, APPARENTE E COMPLESSA

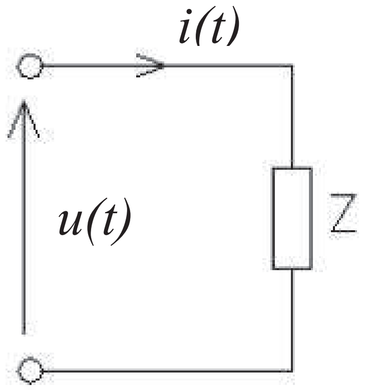
Potenza attiva $\quad P = UI\cos\varphi \quad [Watt] \quad [W] \qquad (1)$

Potenza reattiva $\quad Q = UI\sin\varphi\,[VAR]$ o [VoltAmpereReattivi] $\qquad (2)$

Potenza apparente $\quad S = UI\,[VoltAmpere] \quad [VA] \qquad (3)$

Potenza complessa $\quad \dot{S} = P + jQ = \bar{U}\,\bar{I}^{*} \qquad [VA] \qquad (4)$

Dimostrazione:



$$\dot{Z} = R + jX = \left|\dot{Z}\right| e^{j\varphi}$$

Se $\bar{I} = Ie^{j\varphi_I} \longrightarrow \bar{I}^{*} = Ie^{-j\varphi_I}$

allora $\bar{U} = \dot{Z}\,\bar{I} = (ZI)e^{j\varphi}e^{j\varphi_I}$

$$\dot{S} = P + jQ = UI^{*} = (Ue^{j\varphi}e^{j\varphi_I})Ie^{-j\varphi} = UIe^{j\varphi}$$
$$= UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi$$

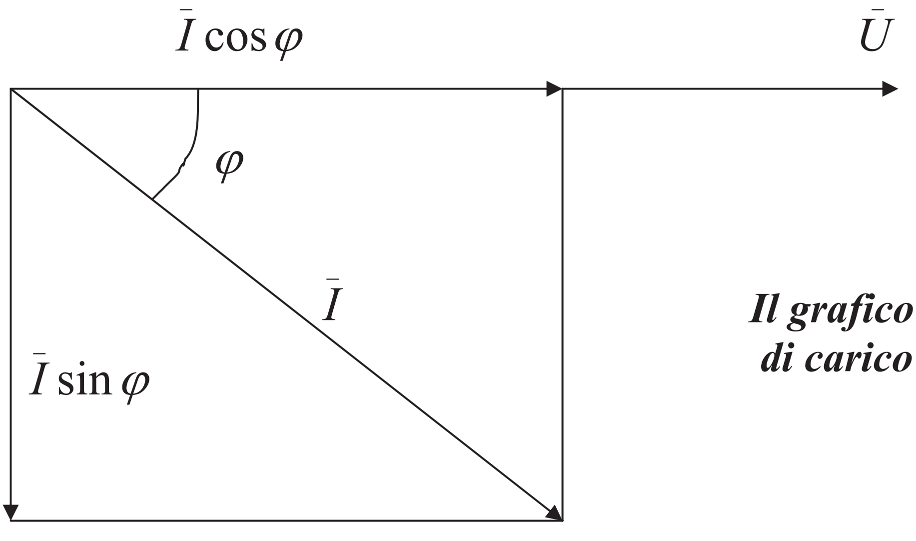
Altre relazioni utili:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{U^2 I^2 \cos^2\varphi + U^2 I^2 \sin^2\varphi} = UI \qquad (5)$$

$$P = UI\cos\varphi = S\cos\varphi \longrightarrow S = \frac{P}{\cos\varphi} \qquad (6)$$

$$Q = UI\sin\varphi = S\sin\varphi \longrightarrow S = \frac{Q}{\sin\varphi} \qquad (7)$$

$$Q = P\tan\varphi \qquad (8)$$

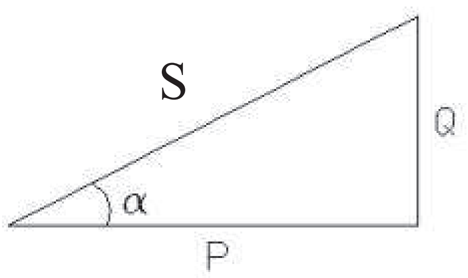


Il grafico si riferisce alla ipotesi di carico ohmico-induttivo

La potenza attiva $\boldsymbol{P = VI\,cos\,\varphi}$ sarà il prodotto della tensione per la componente della corrente nella direzione della tensione: $\boldsymbol{\bar{I}\,cos\,\varphi}$

La potenza reattiva $\boldsymbol{Q = VI\,sin\,\varphi}$ sarà il prodotto della tensione per la componente della corrente nella direzione perpendicolare (o in quadratura) alla tensione: $\boldsymbol{\bar{I}\,sin\,\varphi}$

Analogamente a quanto fatto per impedenze e ammettenze si definisce un ***triangolo delle potenze***:



Potenze istantanea, attiva, reattiva e apparente nel caso si bipoli puramente resistivi, induttivi o capacitivi.

1. Potenze in un bipolo puramente resistivo

Se il bipolo è resistivo non c'è sfasamento fra tensione e corrente: **φ=0** (9)

$$p(t) = UI\cos\varphi + UI\sin\left(2\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = UI + UI\sin\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$P = \int_0^T p(t)dt = UI\cos\varphi = RI^2 = \frac{U^2}{R} \qquad (10)$$

$$Q = UI\sin\varphi = UI\sin 0 = 0 \longrightarrow S = P \qquad (11)$$

2. Potenze in un bipolo puramente induttivo

Se il bipolo è induttivo lo sfasamento fra tensione e corrente: $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (12)

$$p(t) = UI\cos\varphi + UI\sin\left(2\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = UI \cdot 0 + UI\sin(2\omega t - \pi)$$

$$P = \int_0^T p(t)dt = UI\cos\varphi = 0 \qquad (13)$$

$$Q = UI\sin\varphi = UI\sin\frac{\pi}{2} = UI = \omega LI^2 = \frac{U^2}{\omega L} \rightarrow S = Q_L \qquad (14)$$

3. **Potenze in un bipolo puramente capacitivo**

Se il bipolo è capacitivo lo sfasamento fra tensione e corrente: $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ (15)

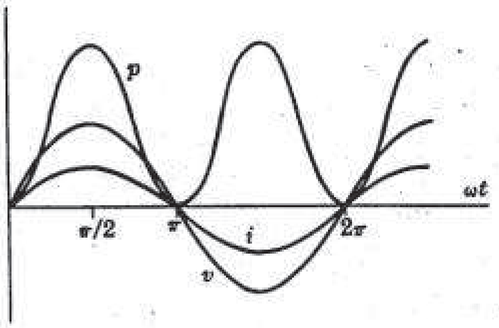
$$p(t) = UI\cos\varphi + UI\sin\left(2\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = UI \cdot 0 + UI\sin(2\omega t)$$

$$P = \int_0^T p(t)dt = UI\cos\varphi = 0 \tag{16}$$

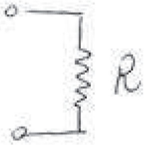
$$Q = UI\sin\varphi = UI\sin -\frac{\pi}{2} = -UI = -\frac{1}{\omega C}I^2 = \omega CU^2 \rightarrow S = Q_C$$

(17)

$$p(t) = UI\cos\varphi + UI\sin\left(2\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$



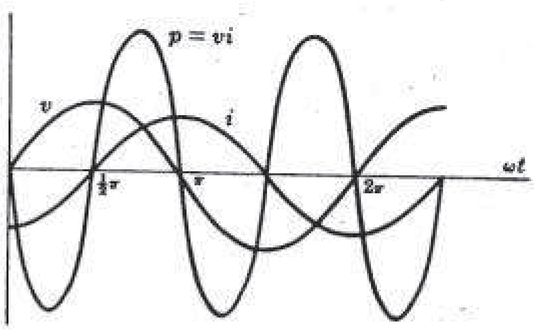
Rete costituita da pura *R*



$\varphi = 0$

$\cos\varphi = 1$

$$p(t) = UI + UI\sin\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right.$$

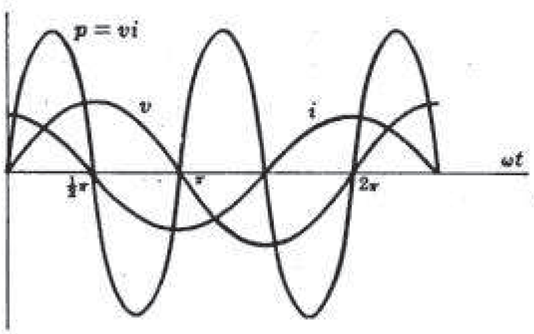


Rete costituita da pura *L*

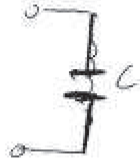
$\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$\cos\varphi = 0$

$$p(t) = UI + UI\sin\left(2\omega t - \pi\right)$$



Rete costituita da pura *C*



$\varphi = \frac{\pi}{2}$

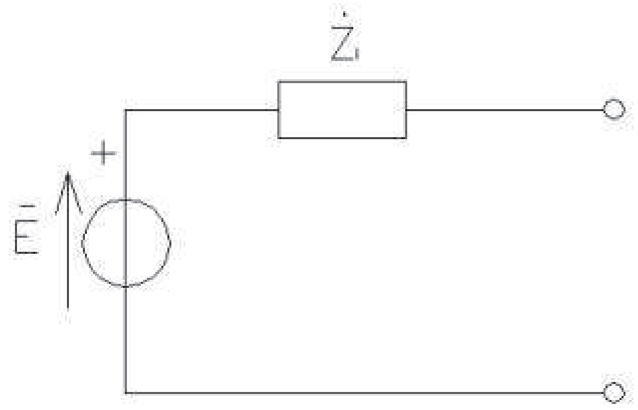
$\cos\varphi = 0$

$$p(t) = UI + UI\sin\left(2\omega t\right)$$

GENERATORI REALI

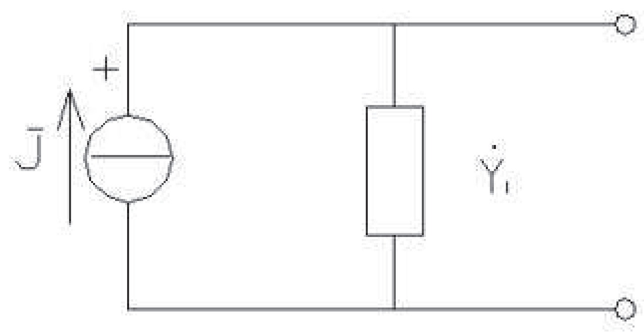
Generatore reale di tensione.

Può essere simulato con un generatore ideale di tensione con in serie l'impedenza interna.



Generatore reale di corrente.

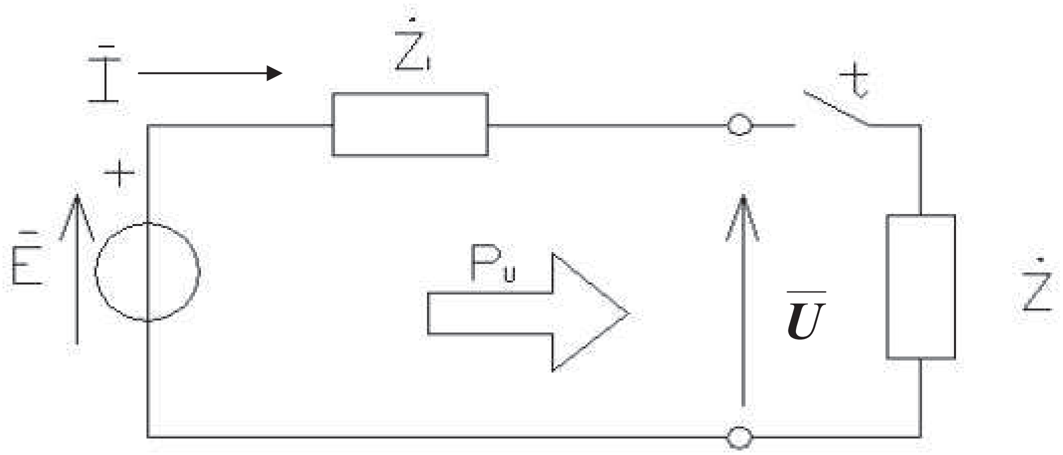
Può essere simulato con un generatore ideale di corrente con in parallelo l'ammettenza interna.



$$\bar{J} = \bar{E}\,\dot{Y}_i = \frac{\bar{E}}{\dot{Z}_i}$$

è la relazione che consente di passare da un generatore di tensione a un generatore di corrente equivalente o viceversa, in base ai teoremi di Thevenin e Norton.

<u>CONDIZIONI DI MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA</u>



$$\dot{Z}_i = R_i + jX_i \tag{1}$$

$$\dot{Z} = R + jX \tag{2}$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\dot{Z}_i + \dot{Z}} \tag{3}$$

La potenza trasferita dalla resistenza al carico sarà:

$$P_u = RI^2 = R\frac{E^2}{(R+R_i)^2+(X+X_i)^2}$$
(4)

Tale potenza sarà massima per:

$R = R_i$ e per $X = -X_i$ ossia per $\dot{Z} = \dot{Z}_i^*$

Per dimostrarlo basta esprimere P_u in funzione di R considerando costante X, e poi in funzione di X considerando costante R, derivare le due espressioni e quindi uguagliarle a zero.

$\frac{dP_u}{dR} = 0 \longrightarrow R = R_i$ con **X = cost**

$\frac{dP_u}{dX} = 0 \longrightarrow X = -X_i$ con **R = cost**

Il rendimento complessivo η sarà ridotto del **50%:**

$$\eta = \frac{\textit{potenza utilizzata}}{\textit{potenza erogata}} = \frac{P_u}{P_e} = \frac{RI^2}{2RI^2}$$

TEOREMA DI TELLEGEN

$\dot{S} = P + jQ = \bar{U}\,\bar{I}^*$ è la potenza complessa.

Per una rete lineare in regime sinusoidale vale il teorema di Tellegen secondo il quale:

$$\sum_{i=1}^{l} \bar{U}\,\bar{I}^{*} = \sum_{i=1}^{l} \left(P_i + jQ_i\right) = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{l} \bar{S}_i = 0 \qquad (1)$$

Poiché deve essere valida la (1) sarà:

$$\sum_{i=1}^{l} P_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{l} Q_i = 0 \qquad (2)$$

Le relazioni (2) esprimono il teorema di conservazione della potenza attiva e reattiva, chiamato **Teorema di Boucherot.**

Separando i generatori dagli altri bipoli elementari passivi, il teorema di Tellegen può essere così enunciato:

la somma delle potenze attive (o reattive) generate deve essere uguale alla somma delle potenze attive (o reattive) assorbite.

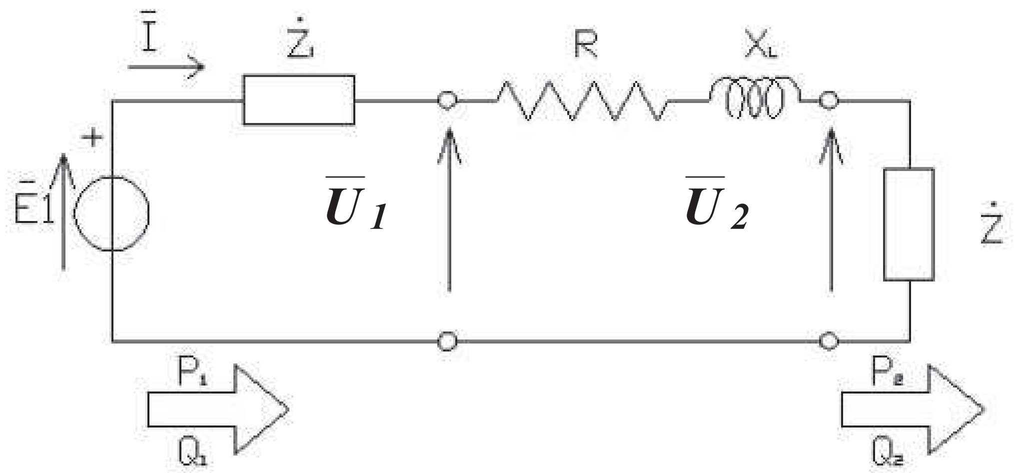
Con l sono stati indicati i lati della rete a cui è associato un grafo con l lati orientati.

In altre parole *il teorema mostra come il vettore delle tensioni e delle correnti sono fra loro ortogonali, infatti se*

$\bar{U}\,\bar{I}^* = 0$, *allora* ***i vettori*** $\bar{U}$ *e* $\bar{I}^*$ ***sono ortogonali***.

Il teorema di Tellegen è una delle espressioni del principio di conservazione dell'energia, da esso discende che la somma delle potenze attive (reattive) erogate è uguale alla somma delle potenze attive (reattive) assorbite.

Applicazione del TEOREMA DI BOUCHEROT



$\overline{U}_1$ = tensione ai morsetti dell'alimentazione
$\overline{U}_2$ = tensione ai morsetti dell'utilizzatore

P_1 = potenza attiva erogata
Q_1= potenza reattiva erogata
P_2 = potenza attiva assorbita dall'utilizzatore
Q_2= potenza reattiva assorbita dall'utilizzatore
P_R = potenza attiva assorbita dalla linea
Q_X= potenza reattiva assorbita dalla linea

$$P_1 = P_R + P_2 = RI^2 + P_2 \qquad (1)$$

$$Q_1 = Q_X + Q_2 = X_L I^2 + Q_2 \qquad (2)$$

Poiché $S_2 = \sqrt{P_2^{\,2} + Q_2^{\,2}} = U_2 I_2 \longrightarrow I_2 = \dfrac{S_2}{U_2} = I$ (3)

Da cui $S_1 = \sqrt{P_1^{\,2} + Q_1^{\,2}} = U_1 I_1 \longrightarrow U_1 = \dfrac{S_1}{I}$ (4)

Lo sfasamento fra **U_1** e **I_1** è dato da :

$$\varphi_1 = arctan \frac{Q_1}{P_1} \qquad (5)$$

ANALOGIE FRA I METODI DI RISOLUZIONE DELLE RETI IN REGIME CONTINUO E SINUSOIDALE

La risoluzione delle reti sinusoidali è basata sui teoremi visti per le reti in corrente continua, valgono quindi:

- ✓ La legge di Ohm
- ✓ Il principio di sovrapposizione degli effetti
- ✓ I teoremi di Thevenin e Norton
- ✓ Il metodo di risoluzione delle correnti di maglia
- ✓ Il metodo di risoluzione dei potenziali di nodo
- ✓ Il teorema di Millman.

Quindi le espressioni analitiche delle leggi, teoremi e principi sono generalmente analoghe a quelle valide per il regime permanente, basta far corrispondere le grandezze corrispondenti secondo il seguente schema:

grandezze in	
corrente continua	*corrente alternata*
U tensione	$\bar{U}$ tensione
I corrente	$\bar{I}$ corrente
R resistenza	$\dot{Z}$ impedenza
G conduttanza	$\dot{Y}$ ammettenza