Fasci di rette ~~nel~~ in un piano affine e fasci di iperpiani.

In uno spazio di dim 3:

a) Cond. di parallelismo retta-piano.

b) pos. reciproca di 2 rette

es. 4, 6

c) Pos. reciproca di 3 piani

stella di piani propria e impropria

es. 1, es. 5

Applicazioni affini.

A, A' ~~vettori~~ spazi affini su V, V', K-sp. vettoriali

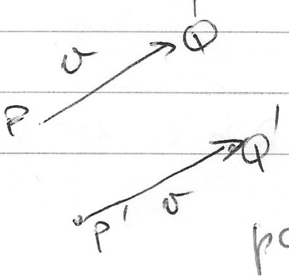
Def. $f: A \to A'$ è un'applicazione affine se $\forall\ P, Q \in A$ $\overrightarrow{f(P)f(Q)} = f(Q) - f(P) = \varphi(\overrightarrow{PQ})$ dove φ è un'applicazione lineare $\varphi: V \to V'$, detta parte lineare di f, o appl. lineare soggiacente f.

In partic. f è un isom. affine se f è biettiva e φ è un isomorfismo $V \to V'$: $A \simeq A'$ (isomorfi)

f è un'affinità se in più $A' = A$.

In tal caso $\varphi: V \to V$ è un autom. di V. $\varphi \in GL(V)$ gruppo lineare di V.

Oss. Segue dalla def. che φ è univocamente det. da f. Infatti, sia $v \in V$; allora v può essere scritto come $v = \overrightarrow{PQ}$. Allora $\varphi(v) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$. Osserviamo che se $v = \overrightarrow{P'Q'}$ altra espress. di v, si deve avere $\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{f(P')f(Q')}$



$\Rightarrow$

$f(P) \longrightarrow f(Q)$

$f(P') \longrightarrow f(Q')$

$$\boxed{\begin{gathered}\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'} \\ \Downarrow \\ \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{f(P')f(Q')}\end{gathered}}$$

parallelogramma $\Rightarrow$ parallelogramma

~~Es~~ Prop 6. 1. $1_A : A \to A$ è isom, con $\varphi = 1_V$.

2. $f: A \to A'$ isom. $\Rightarrow$ $f^{-1}: A' \to A$ è isom.
Se φ è l'isom. assoc. a f, $\exists\, \varphi^{-1}: V' \to V$.
Allora sia $P' = f(P)$, $Q' = f(Q)$, $\underbrace{\overrightarrow{f(P)f(Q)}}_{\overrightarrow{P'Q'}} = \varphi(\overrightarrow{PQ})$.

Allora $f^{-1}(P') = P$, $f^{-1}(Q') = Q$, $\varphi^{-1}(\overrightarrow{P'Q'}) = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{f^{-1}(P')f^{-1}(Q')}$

3. Se $f: A \to A'$ e $g: A' \to A''$ sono isom.
anche $g \circ f$ è isom, con parte lin. il prod. delle parti lineari di f e g.
Dim. esercizio.

Conseguenza: isom. è relaz. d'equivalenza.

Esempi

1. $(O, e_1, \dots, e_n)$ rif. aff. in A.
Allora posso def. $f: A \xrightarrow{\sim} A^n(K)$
$P(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (x_1, \dots, x_n)$
$\overrightarrow{OP} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

Sia $Q(y_1, \dots, y_n)$, ossia $\overrightarrow{OQ} = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$; allora

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ ha coord. $y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n$.
$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = (y_1, \dots, y_n) - (x_1, \dots, x_n) = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)$.

Allora $\varphi: V \to K^n$ è l'isom. che associa a
a ogni vettore le sue coord. risp a $B = (e_1, \dots, e_n)$.
$A \simeq A^n(K)$ isom. non canonico

2) traslazione di vettore v
$t_v : A \longrightarrow A$
$P \longrightarrow \underset{t_v(P)}{P + v}$ = unico punto R t.c. $v = \overrightarrow{PR}$

$Q \to Q+v =$ unico punto S t.c. $v = \overrightarrow{QS}$.
$\overset{\|}{t_v(Q)}$

Allora $t_v(Q) - t_v(P) = S - R = \overrightarrow{RS} =$
$= \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} =$
$= -v + \overrightarrow{PQ} + v = \overrightarrow{PQ}$

Quindi t_v è un'aff. con parte lin. 1_V.

Viceversa se $f: A \to A$ è un'aff. con $\varphi: V \to V$
$\varphi = 1_V$

allora f è una traslazione.

Infatti $f(Q) - f(P) = Q - P \Rightarrow$

$f(Q) - Q = f(P) - P$ è un vettore costante v
e $f = t_v$.

Teorema Determinazione di un'affinità.
Dati $O, O' \in A$ e $\varphi: V \to V'$, $\varphi \in GL(V)$,

$\exists!\ f: A \to A$ affine t.c. $f(O) = O'$ e l'appl. lin. soggiacente è φ.

Dim. Se f esiste, si deve avere $\forall P$ $\overrightarrow{f(O)f(P)} = \varphi(\overrightarrow{OP})$
$\overrightarrow{f(O)f(P)} = \overrightarrow{O'f(P)}$

$f(P) - f(O) = f(P) - O'$
$\| $
$\varphi(P-O)$. Dunque si ha $f(P) = O' + \varphi(P-O) = O' + \varphi(\overrightarrow{OP})$

Allora definisco f ponendo $\forall P \in A$
$$\boxed{f(P) = O' + \varphi(P-O) = O' + \varphi(\overrightarrow{OP})}$$

In particolare si ottiene così:
$f(O) = O' + \varphi(O-O) = O' + \varphi(0) = O'$.

Inoltre, $\forall Q \in A$, $f(Q) - f(P) \underset{I}{=} (f(Q) - O') - (f(P) - O') =$

$= (f(Q) - f(O)) - (f(P) - f(O)) \overset{\text{Chasles}}{=} \varphi(Q-O) - \varphi(P-O) \overset{\varphi \text{ lin.}}{=}$

$= \varphi((Q-O)-(P-O)) \underset{\text{Chasles}}{=} \varphi(Q-P)$: f è ben def.

ed è affinità con φ soggiacente.

Cor. Date 2 (n+1)-uple di punti affinem. indip., ecc.

Def. Gruppo affine di A: $Aff(A)$.

L'insieme delle affinità di A con l'operazione interna di composizione di applicazioni è un gruppo.

È un esempio di gruppo di trasformazioni.

L'insieme $T(A) = \{ f \in Aff(A) \mid f = t_v, v \in V \}$ è un sottogruppo. Infatti sono le aff. con parte lineare identica: Traslazioni o movimenti rigidi di A. $T(A) \underset{\text{isom. di gruppi}}{\simeq} V$ gruppo additivo di V

Altro esempio di gruppo di trasf.: $GL(V)$, $GL(n, K)$

Affinità che fissano un punto O:

$\underbrace{\{ f \in Aff(A) \mid f(O) = O \}}_{Aff_O(A)}$: è un sottogruppo di $Aff(A)$

Una tale f è determinata da φ, e si ha $\boxed{f(P) = O + \varphi(P-O) = O + \varphi(\overrightarrow{OP})}$

Poniamo def. un'applicazione

$$\phi_O : Aff(A)_O \longrightarrow GL(V)$$
$$f \longrightarrow \varphi$$

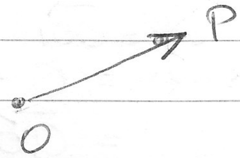
è un isomorfismo di gruppi.

Più in generale $\phi : Aff(A) \longrightarrow GL(V)$ ha
$f \longrightarrow \varphi$

come nucleo $T(A)$: è un sottogruppo normale

In $GL(V)$ ci sono le omotetie: $\forall c \in K$
ω_c = omotetia di rapporto c è def. da $\omega_c(v) = cv$; la matrice associata in qualunque base è cI_n, matrice scalare.
Le omotetie corrispondono in ϕ_O alle omotetie di rapporto (o fattore c) e centro O:

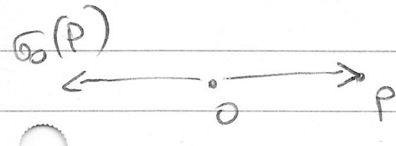
$$\omega_{O,c} : P \longrightarrow O + \omega_c(\overrightarrow{OP}) = O + c\overrightarrow{OP}$$



In particolare, se $c = -1$, $\varphi = -1_V$ e $\omega_{O,-1} = \sigma_O$: simmetria di centro O.

$$\sigma_O(P) = O - \overrightarrow{OP}$$

$\sigma_O \overset{def.}{=}$ simmetria di centro O



Oss. $\sigma_O \circ \sigma_O = \sigma_O^2 = 1_A$.

Prop. 7 Sia $O \in A$ un punto fissato.
Ogni affinità è composta di una traslazione e una affinità di Aff_O, nei 2 sensi: data f, $\exists$ unici $v \in V$, $g \in Aff_O$ t.c.
$f = g \circ t_v$
ed esistono unici $w \in V$, $h \in Aff_O$ t.c.
$f = t_w \circ h$.
Dim.
Sia $f(O) = O'$: ~~allora~~ se $f = t_w \circ h$, con $h(O) = O$, si ha $f(O) = O' = t_w(h(O)) = h(O) + w = O + w$,

dunque nec. $\overset{\text{dev'essere}}{V}$ $w = \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{Of(O)}$. Determinato w,
Poi si ~~fa~~ pone $h = t_w^{-1} \circ f = t_{-w} \circ f = t_{\overrightarrow{O'O}} \circ f$.

L'altra è ~~analoga!~~ con $g(O)=O$
se $f = g \circ t_v$, considero $f(O) = O_1$, $f(O_1) = O$.
Per individuare v, considero f^{-1}!
~~$f(O_1) = O = g(t_v(O_1)) = g(O_1 + v)$~~
$[g = f \circ t_{-v}^{-1}]$ e $f^{-1} = (g \circ t_v)^{-1} = t_{-v} \circ g$ $\Rightarrow$
$[g(O) = O = f(t_{-v}(O)) = f(O - v)$, allora$]$

$O_1 = f^{-1}(O) = \overset{t_{-v}(g(O)) = g(O) - v =}{\cancel{f(O-v)}} O - v \Rightarrow \overset{-v = \overrightarrow{OO_1}}{v = O - O_1} = \overrightarrow{O_1O}$.

Equazioni di un'affinità in un rif. affine:
$(O, e_1, \ldots, e_n) = (O, B)$
Sia $f : A \to A$, φ l'appl. lin. associata.
Supp. $\boxed{f(O) = O'}$. Allora $\forall P$ $f(P) = O' + \varphi(\overrightarrow{OP})$.

Le coord. siano:
$O(0, \ldots, 0)$ perché è l'origine del rif.
$O' = (c_1, \ldots, c_n)$
Supp. che φ sia rappr. rispetto alla base B
dalla matrice $M = M^B_B(\varphi)$. $M \in GL(n, K)$

$\varphi(v) = M \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ se v ha coord. $v_1 \ldots v_n$ risp. a B.

Allora sia $P(x_1 \ldots x_n)$ punto generico.

$f(P) = f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ossia dim $A = 2$ $\begin{cases} y_1 = m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + c_1 \\ y_2 = m_{21}x_1 + m_{22}x_2 + c_2 \end{cases}$ $Y = MX + C$, diventa

$Aff(A) \simeq \{$matrici di $GL(3,K)$ con prima riga$(1\,0\,0)\}$

$$f(0) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & \multicolumn{2}{c}{M} \\ c_2 & & \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$Y = MX + C$$

$$\begin{cases} y_1 = m_{11}x_1 + \dots + m_{1n}x_n + c_1 \\ \vdots \\ y_n = m_{n1}x_1 + \dots + m_{nn}x_n + c_n \end{cases}$$

La φ^{-1} è data da invertendo formalmente:

$$MX = Y - C$$

$$X = M^{-1}(Y - C) = M^{-1}Y - (M^{-1}C)$$

$-M^{-1}C$ rappresenta il punto $\varphi^{-1}(0)$.

Se $A = E_n$ ottengo le traslazioni:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + c_1 \\ \vdots \\ y_n = x_n + c_n \end{cases}$$

Se $f \in Aff_0$ $\quad Y = AX$ che conferma $Aff_0 \simeq GL(V) \simeq GL(n,K)$.

Se $f = \sigma_0$: $M = -I_n$, $C = 0$

$$y_1 = -x_1$$
$$\vdots$$
$$y_n = -x_n.$$

Se $f = \sigma_B$, simmetria risp. a un punto $B(b_1 \dots b_n)$:

$$\sigma_B(P) = B \cancel{+} - \overrightarrow{BP}$$

$P(x_1 \dots x_n)$, $\quad \overrightarrow{BP}(x_1 - b_1, \dots, x_n - b_n)$ $\quad \overrightarrow{PB} = (b_1 - x_1, \dots, b_n - x_n)$

$$\sigma_B(P) = (b_1 \dots b_n) - (x_1 - b_1, \dots, x_n - b_n) = (2b_1 - x_1, \dots, 2b_n - x_n)$$

$$\sigma_B(0) = (2b_1, \dots, 2b_n).$$