Proprietà affini

Sono le proprietà che si conservano per affinità. Insiemi o figure affinemente equivalenti: se c'è un'affinità che manda una nell'altra. $\boxed{\text{Geometria affine}}$.

Prop. 8.
Se f è un'applicazione affine $f: A \to A'$, e $S \subset A$ è un sottospazio $S = P + W$, allora $f(S) = f(P+W) = f(P) + \varphi(W)$, è sottosp. aff. di giac. $\varphi(W)$

Dim. Sia $Q = P + w$, $w \in W$, allora $w = \overrightarrow{PQ}$, e $\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ}) = \varphi(w)$ allora

$$f(Q) = f(P) + \varphi(w) \in f(P) + \varphi(W).$$

Vicev. se $Q' \in f(P) + \varphi(W)$, $Q' = f(P) + \varphi(w)$ con $w = \overrightarrow{PQ}$
Allora $\overrightarrow{f(P)Q'} = \varphi(w) = \varphi(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$

$$\Rightarrow Q' = f(Q) \quad \text{con } Q = P + w \in S.$$

Conseguenza
1) ~~2 sottosp. affini~~ essere sottosp. è prop. aff.
2) la dim si conserva per affinità; (rette vanno in rette)
3) parallelismo è prop. affine: se $W \subseteq W' \Rightarrow \varphi(W) \subseteq \varphi(W')$.
4) due sottosp. della stessa dim sono affinem. equiv.: se $S = P + W$, $S' = P' + W'$, con $\dim W = \dim W'$, def f imponendo che $f(P) = P'$ e che φ sia

Dati 3 punti P_0, P_1, P_2 su una retta il rapporto semplice è $\frac{\overrightarrow{P_0P_2}}{\overrightarrow{P_0P_1}}$; si conserva per affinità di equaz. $t \to at+b$, t coord. sulla retta.

un automorf. di V t.c. $\varphi(w)=w'$.

<u>Le affinità sono collineazioni.</u>

<u>Teor.</u> Se A è uno sp. affine di dim n, e se $P_0, \dots, P_n$ e $Q_0, \dots, Q_n$ sono 2 $(n+1)$-uple di punti affinem. indip. allora $\exists!$ f affin. t.c. $f(P_i)=Q_i$ $\forall i=0, \dots, n$.

<u>Dim.</u>

$P_1-P_0, \dots, P_n-P_0$ sono lin. indip.

$Q_1-Q_0, \dots, Q_n-Q_0$ ———

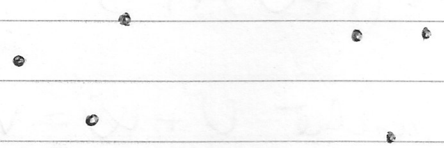
$\exists!$ φ isom. t.c. $\varphi(P_i-P_0)=Q_i-Q_0$.

Def. f come l'unica aff. t.c. $f(P_0)=Q_0$ e φ è la parte lin.:

- f è suriett. } segue da φ isom.
- f è iniett. }
- $f(P_i)=Q_0+\varphi(\overrightarrow{P_0P_i}) = Q_0+\overrightarrow{Q_0Q_i}=Q_i$.

<u>Cor.</u> 2 k-uple di punti aff. indip. sono sempre <u>affinem. equivalenti</u>, $\forall k \le n+1$.

Per es. nel piano 2 terne di punti non allineati;



2 triangoli sono sempre aff. equiv.;

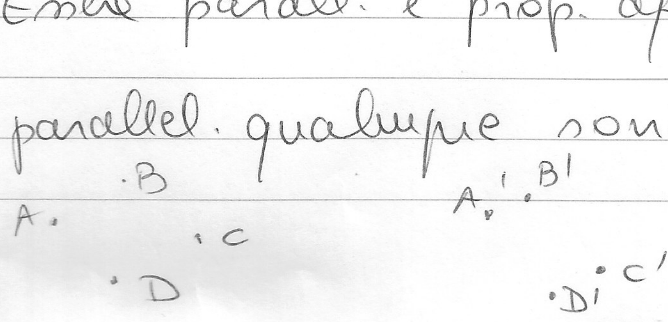
in A^3 2 quaterne di punti non complanari.

<u>Cor.</u> Se A, B, C, D sono vertici di un parallelogramma, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ $\varphi(\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{f(A)f(B)}=\overrightarrow{f(D)f(C)}=\varphi(\overrightarrow{DC})$ anche $f(A), f(B), f(C), f(D)$ è un parall.

Essere parall. è prop. affine. Ma:

2 parallel. qualunque sono affin. equiv.

Sia f l'aff.



t.c. $f(A)=A'$, $f(B)=B'$, $f(C)=C'$. Sia D il quarto vertice del parall., allora $A', B', C', f(D)$ è parall. dunque $f(D)=D'$.

Esempio di applicazione affine – proiezione parallela a un sottospazio.

Dati in V 2 sottospazi supplementari U, W: $V = U \oplus W$, ogni vettore $v \in V$ ha un'unica espressione $v = u + w$. Sono def. due appl. lineari, dette proiezioni:

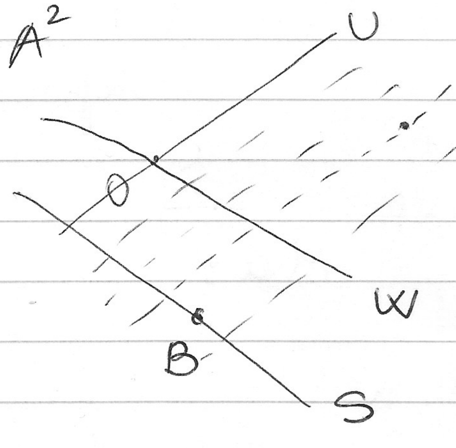
$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\pi_1} & U \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_2} & & \\ W & & \end{array} \qquad \cancel{V \xrightarrow{\pi_2} W} \qquad \begin{array}{ccc} v = u + w & \longrightarrow & u \\ \downarrow & & \\ w & & \end{array}$$

tali che

Sia A spazio affine su V, sia $S = B + W$ un sottosp. di giacitura W. Def. la proiezione parallela a U

$$P_U : A \longrightarrow S$$
$$P \longrightarrow (P+U) \cap S \; ;$$

Oss. che $(P+U) \cap S \neq \emptyset$ perché $U + W = V$, e di dim 0 perché $U \cap W = (0)$: P_U è ben def.



P_U risulta un'appl. affine avente π_2 come appl. lineare associata.

Scegliamo un sistema di rif. in cui:

$U = \langle e_1, \dots, e_r \rangle$, $\quad W = \langle e_{r+1}, \dots, e_n \rangle$

$U: x_{r+1} = \dots = x_n = 0$, $\quad W: x_1 = \dots = x_r = 0$

$v(v_1, \dots, v_n) \xrightarrow{\pi_1} (v_1, \dots, v_r)$ $\quad v \xrightarrow{\pi_2} (v_{r+1}, \dots, v_n)$

Se $B = (b_1, \dots, b_n)$, $\quad B + W = \{(b_1, \dots, b_r, b_{r+1} + t_{r+1}, \dots, b_n + t_n)\}$

Se $P(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, $\quad P + U = \{(\bar{x}_1 + t_1, \dots, \bar{x}_r + t_r, \bar{x}_{r+1}, \dots, \bar{x}_n)\}$

$(P+U) \cap (B+W) = \{(b_1, \dots, b_r, \bar{x}_{r+1}, \dots, \bar{x}_n)\}$

$$p_U: (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (b_1, \dots, b_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \; 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice è $\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 0 \; 1 & \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{pmatrix}$; $\quad C = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si può dim. che se $n \geq 2$, $K = \mathbb{R}$, le affinità sono tutte e sole le collineazioni, cioè le appl. biettive che mandano rette in rette.

Su $\mathbb{C}$ no, per esempio $f: A^2_{\mathbb{C}} \to A^2_{\mathbb{C}}$ $(x,y) \to (\bar{x}, \bar{y})$ è coll. ma non affine

---

Spazi affini reali:

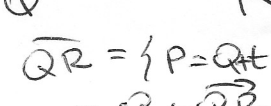
Su $\mathbb{R}$ c'è relazione d'ordine, questo permette di dare le nozioni di semiretta, triangolo, ecc.

<u>Def.</u> Sia $Q \in A$, $v \in V$, la <u>semiretta</u> di origine Q e direzione v è $\{P = Q + tv \mid t \geq 0\} \subset Q + \langle v \rangle$ contenuta nella retta. Non cambia se sost. a v λv con $\lambda > 0$.

$\Rightarrow$ Se $Q \neq R$, il segmento $\overline{QR}$ è $\{P = Q + t\overrightarrow{QR} \mid 0 \leq t \leq 1\}$ $\quad \overrightarrow{QP} = t\overrightarrow{QR}$

Il segmento contiene il punto medio di Q e R: $\quad M := Q + \frac{1}{2}(R - Q) = Q + \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$

M verifica $\overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MR} = \overrightarrow{QR}$ con $\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{MR}$



questa def. di punto medio

$\Rightarrow$ $\overline{QR} = \{P = Q + t\overrightarrow{QR} \mid t \geq 0\} \cap \{P = R + \lambda\overrightarrow{RQ} \mid \lambda \geq 0\}$; $\quad Q + t\overrightarrow{QR} = R + \lambda\overrightarrow{RQ} =$

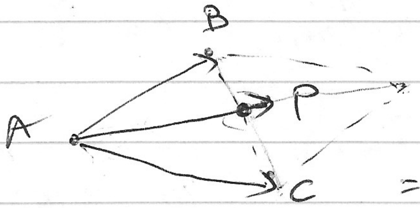
$= Q + \overrightarrow{QR} - \lambda\overrightarrow{QR} = Q + (1 - \lambda)\overrightarrow{QR}$ $\Rightarrow 1 - \lambda \leq 1 \Leftrightarrow \lambda \geq 0$

ha senso se car $K \neq 2$.

Dati 3 punti non allin. A, B, C si def. il <u>triangolo</u> di vertici A, B, C come

$$\{P \in A \mid \vec{AP} = t\vec{AB} + u\vec{AC},\ t, u \geq 0,\ t+u \leq 1\}$$

è detto anche 2-simplesso



Il punto medio di BC è

$A + \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AB}$; $B + \frac{1}{2}\vec{BC} =$

$= A + \vec{AB} + \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{AC}) = A + (1-\frac{1}{2})\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$

<u>Invece il parallelogramma</u> individuato da A, B, C è $\{P \in A \mid \vec{AP} = t\vec{AB} + u\vec{AC},\ 0 \leq t, u \leq 1$

$\vec{AP} = t\vec{AB} + u\vec{AC} + v\vec{AD},\ 0 \leq t+u+v \leq 1$

Analogam. si def. il tetraedro (e il parallelepipedo) di vertici A, B, C, D non complanari, e più in generale <u>k-simplesso</u>, che estende triangolo e tetraedro.

$0 \leq t, u, v \leq 1$

poligono $\to$ poliedro $\to$ politopo

triangolo $\to$ tetraedro $\to$ simplesso

paralleloedro. Un'aff. manda semirette in semirette e quindi segmenti in segmenti. 2 segm. sono aff. equivalenti.

<u>Insieme convesso</u>: se contiene tutti i segmenti di estremi 2 suoi punti.

<u>I</u> simplessi sono convessi. Intersez. di ins. convessi è convesso.

Inviluppo convesso.

Convessità è prop. affine.

<u>cambiamento di coord. affini:</u>

Dati 2 rif. affini in A

$(O, e_1, \dots, e_n)$ $\qquad B = (e_1 \dots e_n)$

$(O', e_1', \dots, e_n')$ $\qquad B'$

Sia $M = M^{B}_{B'} = (a_{ij})$ matrice del cambiam. di base da B a B': $M^B_{B'} = M^B_{B'}(id_V)$

I colonna: coord. di e_1 risp. a B' ecc.

$$\begin{cases} e_1 = a_{11}e_1' + \dots + a_{n1}e_n' \\ \vdots \\ e_n = a_{1n}e_1' + \dots + a_{nn}e_n' \end{cases}$$

$$A = M^B_{B'}(1_V)$$

Allora se $v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n = \cancel{x}y_1'e_1' + \dots + \cancel{x}y_n'e_n'$ si ha $X' = AX$

$$\begin{cases} \cancel{x}y_1' = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ \cancel{x}y_n' = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

Se $P(x_1 \dots x_n)$, $\vec{OP} = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ risp. a (O, B), $\vec{O'P} = y_1e_1' + \dots + y_ne_n'$ $\Rightarrow$ P ha coord. $y_1 - y_n$ risp. a (O', B').

$\vec{O'P} = \vec{O'O} + \vec{OP}$ rel. di Chasles $\Big)$ risp. alla base B' si traduce in

$$(y_1, \dots, y_n) = \underbrace{(c_1 \dots c_n)}_{\text{coord. di } O \text{ in } (O', B')} + \underbrace{(x_1', \dots, x_n')}_{\text{coord. di } \vec{OP} \text{ risp. a } B'}$$

$\vec{O'O} = c_1e_1' + \dots + c_ne_n'$

Si ha perciò

$$Y = X' + C = AX + C.$$

Se $O = O'$ $\quad Y = AX$

Se $B = B'$, $A = I_n \Rightarrow Y = X + C$.

Vicev. $X = \underbrace{A^{-1}Y}_{\text{passaggio da } B' \text{ a } B} - \underbrace{A^{-1}C}_{\text{coord. di } O' \text{ nel rif. } (O, B)}$