ESERCIZI DI GEOMETRIA 2 - FOGLIO 3

Trieste, 8 aprile 2018

1. Dati in uno spazio affine $\mathbb{A}$ di dimensione n due sottospazi $H_1 = P_1 + W_1$ e $H_2 = P_2 + W_2$ di dimensioni r_1 e r_2 rispettivamente ($1 \leq r_1 \leq r_2 < n$) , esistono sempre sottospazi affini propri H di $\mathbb{A}$ di dimensione r con $r_1 \leq r \leq r_2$ paralleli a entrambi? E sottospazi H^* e H^{**} di una qualche dimensione (arbitraria), con $1 \leq r^* < r_1$ e $r_2 < r^{**} < n$, paralleli a entrambi? (Si pensi, per questo secondo caso, ad esempio in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, al caso di due rette, di una retta e un piano, e di due piani, e si generalizzi. . .)

Determinare, nello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$, con coordinate x, y, z, u, un sottospazio del tipo H, uno del tipo H^* e uno del tipo H^{**} (qualora esistenti) nei tre casi:

$$H_1 = (1, 0, 3, -1) + \langle(1, 2, -1, 0)\rangle, H_2 = (0, 0, 0, 0) + \langle(1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 0)\rangle;$$
$$H_1' = (1, 0, 3, -1) + \langle(1, 2, -1, 0)\rangle, H_2' : x - y - z + u + 3 = 0;$$
$$H_1'' = (1, 0, 3, -1) + \langle(1, 2, -1, 0)\rangle, H_2'' : x + y - 2u + 1 = 0.$$

2. a) Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dimensione 3 in cui è fissato un riferimento affine. Sia $g : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ l'applicazione definita da:

$$\begin{cases} x' = x + y - z + 2 \\ y' = -x + y + z - 2 \\ z' = x - y + z \end{cases}$$

Verificare che g è un'affinità e determinare l'insieme dei suoi punti fissi, ossia i punti P tali che $g(P) = P$.

b) Sia f un'applicazione affine di uno spazio affine $\mathbb{A}$ in sé. Mostrare che l'insieme dei punti fissi di f è un sottospazio affine di $\mathbb{A}$.

3. Dimostrare che il non allineamento è una proprietà affine, ossia che, se in uno spazio affine sono dati tre punti non allineati, anche i loro corrispondenti in un'affinità non sono allineati.

4. Sia A uno spazio affine di dimensione 3. Determinare le eventuali rette incidenti simultaneamente alle quattro rette:

$$r_1 \begin{cases} x = 2z \\ y = 1 \end{cases}, \quad r_2 \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 3/2 \end{cases}, \quad r_3 \begin{cases} x - z = 0 \\ y = z \end{cases}, \quad r_4 \begin{cases} x - z = 3 \\ y = z \end{cases}.$$