Value at Risk e altre misure di rischio

Misure di Rischio

- obbiettivo: misurazione dei rischi finanziari al fine del loro controllo
- rischi: di mercato (tasso, cambio, ...), credito, operativo, ...
- utilizzo:
  - stabilire requisiti di capitale (interni o imposti dall'autorità di sorveglianza), e.g. Basilea, Solvency, ...
  - ordinare i vari fattori di rischio in base alla loro importanza
  - comunicazione con i clienti
  - valutazione dell'efficacia di una strategia di copertura
  - stabilire margini nei mercati dei futures e delle opzioni
  - ...
- misure di rischio più comuni
  - varianza
  - Value-at-Risk
  - expected shortfall
  - ...
- Proprietà/relazioni di queste misure?

Profitto/perdita

- Sia $P(u)$ il valore/prezzo di un'attività al tempo u
  - stocks
  - bonds
  - commodities (merci)
  - derivati
  - ...
  - portafoglio di attività
- consideriamo il periodo $[t, T]$ (holding period) di lunghezza $T - t$:
  - ipotesi: l'attività viene posseduta sul periodo $[t, T]$
  - eventuali flussi generati dal possesso dell'attività sono reinvestiti/finanziati nell'attività stessa
  - $T - t = 1$: 1 anno
  - $T - t = 1/365$: 1 giorno
  - $T - t = 1/250$: 1 giorno (contando solo i giorni in cui i mercati sono aperti)
- ipotesi: $P(u) \geq 0$ per ogni $u > t$ (responsabilità limitata) e $P(t) > 0$ (valore corrente positivo)

Profitto/perdita

- il profitto/perdita sul periodo $[0, T]$ (holding period P&L) è dato da
$$\text{P\&L} \equiv \text{P\&L}(t, T) = P(T) - P(t)$$
  variazione di valore dell'attività
- $\text{P\&L}(t, T)$ rappresenta il guadagno/perdita se si prende una posizione lunga (acquista) il sottostante in t e si liquida la posizione in T
- interpretazione

$$\text{P\&L} > 0 \Rightarrow \text{P\&L} = \text{guadagno}$$

$$\text{P\&L} < 0 \Rightarrow -\text{P\&L} = \text{perdita}$$

- La perdita sul periodo $[t, T]$ è semplicemente

$$L \equiv L(t, T) = -\text{P\&L}(t, T) = P(t) - P(T).$$

Profitto/perdita

- il rendimento viene usualmente misurato su base
  - semplice o composto
  - periodale o annuo
- Rendimento periodale semplice

$$I \equiv I(t,T) = \frac{\text{P\&L}(t,T)}{P(t)} = \frac{P(T)}{P(t)} - 1$$

cioè

$$P(T) = P(t)(1 + I(t,T))$$

  - su base annua, il rendimento equivalente è

$$I'(t,T) = \frac{I(t,T)}{T-t} = \frac{1}{T-t}\left(\frac{P(T)}{P(t)} - 1\right)$$

  - riesce $-1 \leq I(t,T) < +\infty$

Profitto/perdita

- Rendimento periodale composto

$$R \equiv R(t,T) = \log\frac{P(T)}{P(t)}$$

cioè

$$P(T) = P(t)\mathrm{e}^{R(t,T)}$$

  - su base annua, il rendimento equivalente è

$$R'(t,T) = \frac{R(t,T)}{T-t} = \frac{1}{T-t}\log\frac{P(T)}{P(t)}$$

  - riesce $-\infty \leq R(t,T) < +\infty$

Profitto/perdita

▷ Relazioni tra rendimenti semplici e composti

$$I = \mathrm{e}^{R} - 1$$

$$R = \log(1 + I)$$

▷ se $|R|$ è 'piccolo' (tipicamente quando $T - t$ è piccolo) allora

$$R \approx I$$

e viceversa (formula di Taylor)

▷ ESEMPIO: $R = 0.1\% \Rightarrow I = 0.09995\%$
$R = 1\% \Rightarrow I = 0.99503\%$
$R = 10\% \Rightarrow I = 9.53102\%$
(vedi confronto in slide 306)

Rendimenti composti: proprietà temporali

▷ Time aggregation of compound returns: il rendimento periodale composto sul periodo (t, T) è la somma dei rendimenti periodali composti sui sotto-periodi $(t_0, t_1), \ldots, (t_{n-1}, t_n)$, con $t_0 = t < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T$

$$R(t, T) = R(t_0, t_1) + \ldots + R(t_{n-1}, t_n)$$

- ⋆ rendimento annuo è somma dei rendimenti giornalieri
- ⋆ nel caso di rendimenti semplici il risultato non è vero

$$1 + I(t, T) = (1 + I(t_0, t_1)) \cdot \ldots \cdot (1 + I(t_{n-1}, t_n))$$

- ⋆ nel caso di rendimenti composti/annui?

Rendimenti semplici e composti

- ▷ Modellizzare rendimenti semplici o composti non è equivalente
- ▷ è tipico assumere che i rendimenti siano distribuiti normalmente
- ▷ visto il range di $R(t,T)$ e $I(t,T)$ questa ipotesi è più adatta ai rendimenti composti
- ▷ se $R(t,T) \sim N(\mu, \sigma^2)$ allora $I(t,T) = \mathrm{e}^{R(t,T)} - 1$ si distribuisce come lognormale traslata
- ▷ la distribuzione sarà simile se $T - t$ è piccolo, mentre potrà essere molto diversa quando l'ampiezza dell'intervallo aumenta

Tassi di Cambio

- ▷ vantaggio dei rendimenti composti: sia $P(t)$ il tasso di cambio f/d (foreign/domestic)
- ▷ $P(t)$ = quantità di moneta domestica per acquistare 1 unità di valuta straniera al tempo t $\rightsquigarrow$ $\frac{1}{P(t)}$ = quantità di moneta straniera per acquistare 1 unità di valuta domestica al tempo t
- ▷ rendimento composto per un investitore domestico:

$$R^d(t,T) = \log \frac{P(T)}{P(t)}$$

- ▷ rendimento composto per un investitore straniero:

$$R^f(t,T) = \log \frac{P(t)}{P(T)} = -R^d(t,T)$$

Rendimenti composti: proprietà temporali

- conseguenze dell'additività temporale dei rendimenti composti
- normalità: se la distribuzione congiunta di $R(t_0, t_1), \ldots, R(t_{n-1}, t_n)$ è normale, allora $R(t, T)$ è normale
- momenti, non correlazione seriale
  - $E[R(t_{i-1}, t_i)] = \mu_i$, $\text{var}[R(t_{i-1}, t_i)] = \sigma_i^2$
  - rendimenti su intervalli disgiunti, $R(t_0, t_1), \ldots, R(t_{n-1}, t_n)$, sono incorrelati ($\Rightarrow$ indipendenti)

$$\text{cov}[R(t_{i-1}, t_i), R(t_{j-1}, t_j)] = 0 \qquad \text{per } i \neq j$$

- segue che

$$E[R(t, T)] = \mu_1 + \ldots + \mu_n$$
$$\text{var}[R(t, T)] = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2$$

- Se i rendimenti sono correlati?

Gestione del Rischio Finanziario

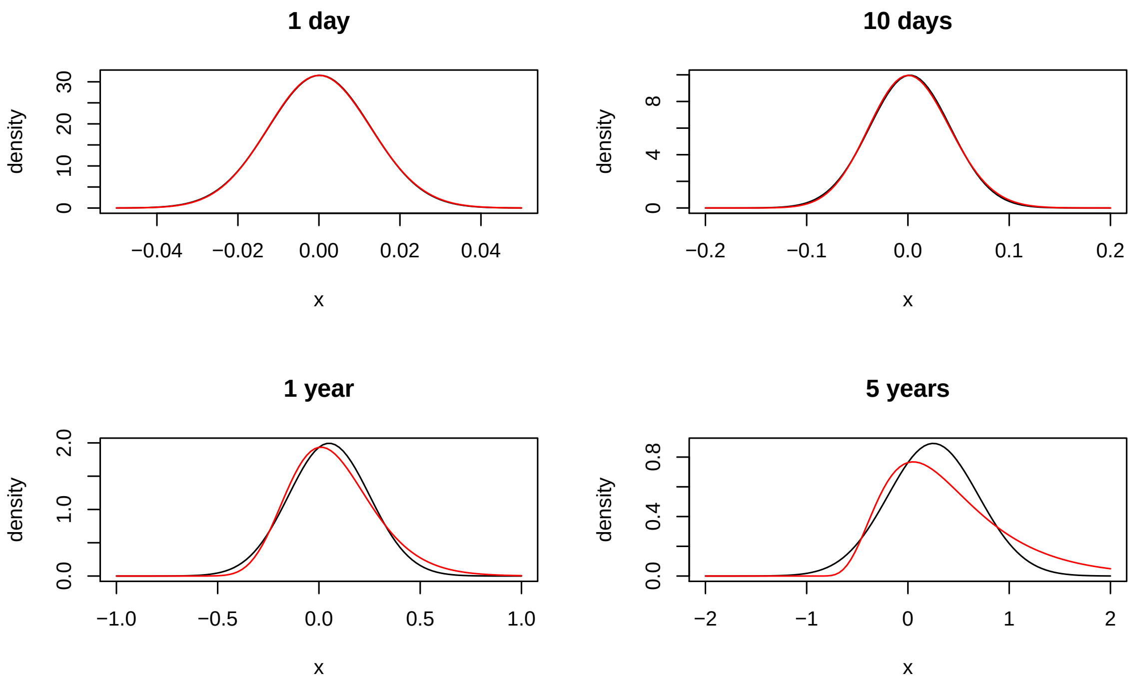
Rendimenti composti: proprietà temporali

- nel caso di intervalli di ugual ampiezza e distribuzioni stazionarie:
  - $t_i - t_{i-1} = \Delta$ per $i = 1, \ldots, n$, cioè $t_i = t + i\Delta$
  - $\mu_i = \mu$, $\sigma_i^2 = \sigma^2$
- riesce allora: media e varianza dei rendimenti composti crescono linearmente col tempo
  - $E[R(t, t + n\Delta)] = n\mu$
  - $\text{var}[R(t, t + n\Delta)] = n\sigma^2$
- "standard deviation rule":

$$\text{sd}[R(t, t + n\Delta)] = \sigma\sqrt{n}$$

  la deviazione standard cresce con la radice del tempo
- tale ipotesi può essere testata per verificare la consistenza della non correlazione seriale (e.g. "variance ratio test")
- Nella slide successiva: confronto tra R e I per diversi orizzonti temporali con rendimento atteso 5% e deviazione standard 20% (su base annua)

Rendimenti composti: proprietà temporali



P&L di portafoglio

▷ Rendimento di portafoglio: se il portafoglio è composto da N attività con prezzi/valori unitari $P_j(u)$, $j = 1, \ldots, N$ al tempo u e quantità q_j, $j = 1, \ldots, N$, il valore del portafoglio al tempo u è

$$V(u) = \sum_{j=1}^{N} q_j P_j(u)$$

- ⋆ ipotesi: la composizione del portafoglio non varia sul periodo (t, T)
- ⋆ profitto/perdita di portafoglio:

$$\mathrm{P\&L}_P(t,T) = V(T) - V(t) = -L_P(t,T) = \sum_{j=1}^{N} q_j \mathrm{P\&L}_j(t,T)$$

- ⋆ rendimento semplice e composto di portafoglio

$$I_P(t,T) = \frac{V(T)}{V(t)} - 1, \qquad R_P(t,T) = \log \frac{V(T)}{V(t)}$$

P&L DI PORTAFOGLIO

- percentuale di ricchezza investita nel titolo j:

$$w_j = \frac{q_j P_j(t)}{V(t)} = \frac{q_j P_j(t)}{\sum_{j=1}^N q_j P_j(t)}$$

  riesce $\sum_{j=1}^N w_j = 1$
- rendimento semplice di portafoglio è la media aritmetica ponderata dei rendimenti semplici (additivity across assets)

$$I_P(t,T) = \sum_{j=1}^N w_j I_j(t,T)$$

- rendimento composto di portafoglio è la media ponderata esponenziale dei rendimenti composti

$$R_P(t,T) = \log\left(\sum_{j=1}^N w_j \mathrm{e}^{R_j(t,T)}\right)$$

Gestione del Rischio Finanziario

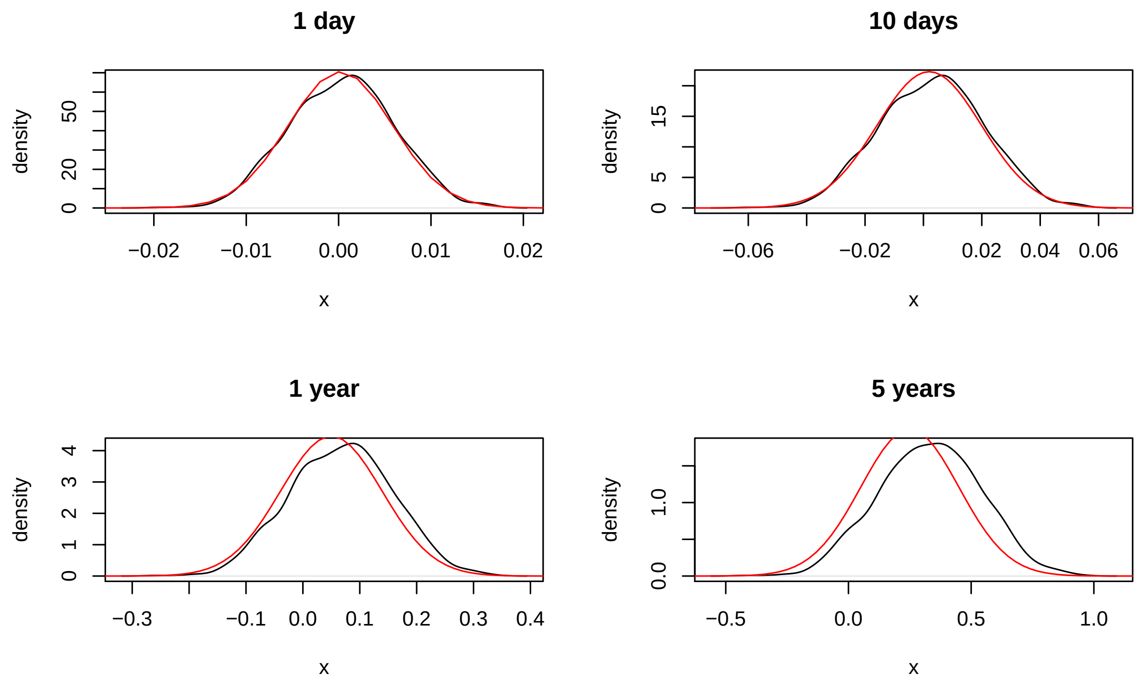
P&L DI PORTAFOGLIO

- Se i rendimenti delle attività componenti il portafoglio sono "'piccole", allora vale l'approssimazione (usare $\mathrm{e}^x \approx 1 + x$ e $\log(1+x) \approx x$ quando $x \to 0$)

$$R_P(t,T) \approx \sum_{j=1}^N w_j R_j(t,T)$$

  - ⋆ se la distribuzione congiunta di $R_1(t,T), \ldots, R_N(t,T)$ è normale, in generale non è nota la distribuzione di $R_P(t,T)$ (logaritmo di una combinazione lineare di lognormali)
  - ⋆ tuttavia, l'approssimazione sopra consente di assumere normalità delle componenti e del portafoglio allo stesso tempo
  - ⋆ l'approssimazione è valida per orizzonti temporali limitati

Rendimenti di portafoglio



Value-at-Risk

- Value-at-Risk: la massima perdita che si può verificare
  - su un certo intervallo temporale (t, T)
  - con un certo livello di confidenza $0 < \alpha < 1$
- Value-at-Risk: importo (capitale) che se detenuto (riservato) permette di evitare perdite sull'orizzonte temporale con un certo livello di confidenza
- Ricordiamo che $L \equiv L(t, T) = -\text{P\&L}(t, T)$ è la perdita; per un dato capitale allocato x, siamo interessati all'evento

$$(L \leq x) = (\text{P\&L} + x \geq 0)$$

  cioè il capitale allocato assorbe le perdite
- la probabilità di tale evento non deve essere inferiore a α

$$\text{Prob}(L \leq x) \geq \alpha$$

- si sceglie poi il "minimo" capitale che garantisce tale condizione:

$$\text{VaR}_\alpha^{\text{P\&L}} = \inf\{x \in \mathbb{R} : \text{Prob}[L \leq x] \geq \alpha\}$$