PEREQUAZIONE CON LEGGI DI SOPRAVVIVENZA

Siano

$$\hat{q}_x, \qquad x = a, a+1, \dots, \omega - 1$$

le stime delle probabilità di morte q_x, $x = a, a+1, \dots, \omega - 1$, di un modello di sopravvivenza non parametrico ottenute secondo un approccio di stima di tipo non parametrico.

Tali stime presentano usualmente delle irregolarità spesso imputabili alla limitata numerosità della popolazione, in particolare in alcune classi di età.

Tali irregolarità possono essere rimosse mediante opportune procedure di perequazione.

Due obiettivi sono alla base della scelta di una procedura di perequazione:

- la <u>regolarità</u> (o smoothness) delle stime perequate al variare dell'età;
- l'<u>accostamento</u> (o goodness of fit) delle stime perequate alle stime originali.

La perequazione con leggi di sopravvivenza o perequazione analitica consiste nel sostituire alle stime iniziali le stime ottenute mediante un modello analitico di mortalità (per es. il modello di Gompertz).

Il procedimento di perequazione analitica si articola in due fasi:

1. verifica (mediante analisi grafica) della possibilità di accostamento fornita dalla legge di sopravvivenza considerata
2. stima dei parametri della legge di sopravvivenza scelta

Analisi grafica di modelli di sopravvivenza

Si devono individuare dei legami di tipo lineare, per esplorare mediante grafici le possibilità di accostamento del modello ai dati.

Modello di Gompertz

$$\mu(x) = \beta\, e^{\alpha\, x} \qquad\qquad \alpha > 0 \qquad \beta > 0 \qquad\qquad x > 0$$

Si ha

$$\log \mu(x) = \log \beta + \alpha\, x$$

Si considera allora il grafico dei punti

$$(x, \log \hat{m}_x) \qquad\qquad x = a, a+1, \dots, \omega - 1$$

essendo $\hat{m}_x$ le stime delle intensità istantanee di mortalità ottenute in un approccio non parametrico;

se il grafico dei punti presenta un andamento approssimativamente lineare, il modello di Gompertz si presta a descrivere la mortalità nella collettività in esame.

Il coefficiente angolare e l'intercetta della retta interpolante forniscono delle stime preliminari per i parametri $\alpha > 0$ e $\beta > 0$

Un altro legame lineare può essere ottenuto considerando le probabilità di sopravvivenza p_x

Dalla

$$S(x) = \exp\left(\frac{\beta}{\alpha}\left(1 - e^{\alpha x}\right)\right) \qquad x \geq 0, \qquad \text{si ha} \qquad p_x = \frac{S(x+1)}{S(x)} = \exp\left(\frac{\beta}{\alpha}\left(1 - e^{\alpha}\right) e^{\alpha x}\right)$$

e quindi

$$\log(-\log p_x) = \log\left(\frac{\beta}{\alpha}\left(e^{\alpha} - 1\right)\right) + \alpha x$$

Si considera allora il grafico dei punti

$$\left(x, \log(-\log \hat{p}_x)\right) \qquad x = a, a+1, \dots, \omega - 1$$

Il coefficiente angolare e l'intercetta della retta interpolante forniscono delle stima preliminari per i parametri $\alpha > 0$ e $\beta > 0$

Un altro grafico che può indicare se il modello di Gompertz si presta a descrivere la mortalità nella collettività in esame è il seguente

$$\left(x, \frac{\log \hat{p}_{x+1}}{\log \hat{p}_x}\right) \qquad x = a, a+1, \dots, \omega - 2$$

infatti

$$\frac{\log p_{x+1}}{\log p_x} = e^{\alpha}$$

quindi se i punti del grafico hanno un andamento approssimativamente costante, il modello di Gompertz potrebbe essere adatto.

Modello di Makeham

$$\mu(x) = \delta + \beta\, e^{\alpha\, x} \qquad \alpha > 0 \quad \beta > 0 \quad \delta > 0 \qquad x > 0$$

Si ha

$$\log(\mu(x+1) - \mu(x)) = \log\left(\beta\left(e^{\alpha} - 1\right)\right) + \alpha\, x$$

Se il grafico dei punti

$$\left(x, \log\left(\hat{m}_{x+1} - \hat{m}_x\right)\right) \qquad x = a, a+1, \dots, \omega - 1$$

presenta un andamento approssimativamente lineare, il modello di Makeham si presta a descrivere la mortalità nella collettività in esame.

Il coefficiente angolare e l'intercetta della retta interpolante forniscono delle stima preliminari $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ per i parametri α e β,rispettivamente.

Per una stima preliminare di δ si può considerare una media delle quantità

$$\hat{m}_x - \hat{\beta}\, e^{\hat{\alpha}\, x} \qquad x = a, a+1, \dots, \omega - 1$$

Un altro legame lineare può essere ottenuto considerando le probabilità di sopravvivenza p_x

Dalla

$$S(x) = \exp\left(\frac{\beta}{\alpha}\left(1 - e^{\alpha x}\right) - \delta x \right) \qquad x \geq 0,$$

si ha

$$p_x = \frac{S(x+1)}{S(x)} = \exp\left(\frac{\beta}{\alpha}\left(1 - e^{\alpha}\right) e^{\alpha x} - \delta \right)$$

Indicato con $\Delta \log p_x = \log p_{x+1} - \log p_x$ si ha

$$\frac{\Delta \log p_{x+1}}{\Delta \log p_x} = e^{\alpha}$$

Se il grafico dei punti $\left(x, \frac{\Delta \log \hat{p}_{x+1}}{\Delta \log \hat{p}_x} \right)$ $x = a, a+1, \dots, \omega - 1$

presenta un andamento approssimativamente costante, il modello di Makehanm si presta a descrivere la mortalità nella collettività in esame.

Come stima preliminare di α si può considerare il logaritmo della media di valori

$$\frac{\Delta \log \hat{p}_{x+1}}{\Delta \log \hat{p}_x} \qquad x = a, a+1, \dots, \omega - 2$$

Dalla $$\Delta \log p_x = \log p_{x+1} - \log p_x = -\frac{\beta}{\alpha}\left(1 - e^{\alpha}\right)^2 e^{\alpha x}$$

si individua come stima preliminare di β la media dei seguenti valori

$$-\frac{\Delta \log \hat{p}_x \cdot \hat{\alpha}}{\left(1 - e^{\hat{\alpha}}\right)^2 e^{\hat{\alpha} x}} \qquad x = a, a+1, \dots, \omega - 1$$

Infine, dalla

$$\log p_x = \frac{\beta}{\alpha}\left(1 - e^{\alpha}\right) e^{\alpha x} - \delta$$

Si ottiene come stima preliminare di δ la media dei seguenti valori

$$\frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}}\left(1 - e^{\hat{\alpha}}\right) e^{\hat{\alpha} x} - \log \hat{p}_x \qquad x = a, a+1, \dots, \omega - 1$$

ALTRE FORMULE DI PEREQUAZIONE UTILIZZATE IN AMBITO ATTUARIALE

Formula di Barnett

$$\frac{q_x}{1-q_x} = A + H\,x + B\,c^x \qquad\qquad A, H, B, c > 0$$

Le quantità

$$\frac{q_x}{1-q_x}$$

sono dette odds.

Formula di Wilkie

$$\frac{q_x}{1-q_x} = \exp\big(pol(x)\big)$$

dove $pol(x)$ è un polinomio in x, spesso lineare o di grado 2

Tali espressioni, che esprimono legami funzionali tra gli odds e le età, possono essere viste come formule perequative che costituiscono casi particolari della seguente espressione più generale:

<u>Formula Gompertz-Makeham di tipo</u> (r, s)

$$GM_{\boldsymbol{\alpha}}^{r,s}(x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \, x^{i-1} + \exp\left(\sum_{i=r+1}^{r+s} \alpha_i \, x^{i-r-1} \right)$$

dove r e s sono interi positivi

$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+s})$ è un vettore di coefficienti

Se $r = 0$ si ha solamente il termine esponenziale

$$GM_{\boldsymbol{\alpha}}^{0,s}(x) = \exp\left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \, x^{i-1} \right)$$

Se $s = 0$ si ha solamente il termine polinomiale

$$GM_{\boldsymbol{\alpha}}^{r,0}(x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \, x^{i-1}$$

Se $(r, s) = (0, 2)$ si ha $$GM_{\alpha}^{0,2}(x) = \exp(\alpha_1 + \alpha_2\, x)$$

e si trova quindi una formula di tipo Gompertz

$$GM_{\alpha}^{0,2}(x) = \exp(\alpha_1 + \alpha_2\, x) = e^{\alpha_1} e^{\alpha_2 x} = \beta\, e^{\alpha\, x}$$

Se $(r, s) = (1, 2)$ si ha $$GM_{\alpha}^{1,2}(x) = \alpha_1 + \exp(\alpha_2 + \alpha_3\, x)$$

e si trova quindi una formula di tipo Makeham

$$GM_{\alpha}^{1,2}(x) = \alpha_1 + \exp(\alpha_2 + \alpha_3\, x) = \alpha_1 + e^{\alpha_2} e^{\alpha_3 x} = \delta + \beta\, e^{\alpha\, x}$$

Se $(r, s) = (2, 2)$ si ha $$GM_{\alpha}^{2,2}(x) = \alpha_1 + \alpha_2\, x + \exp(\alpha_3 + \alpha_4\, x)$$

e si trova quindi una formula di tipo Barnett

$$GM_{\alpha}^{2,2}(x) = \alpha_1 + \alpha_2\, x + \exp(\alpha_3 + \alpha_4\, x) = \alpha_1 + \alpha_2\, x + e^{\alpha_3} e^{\alpha_4 x} = A + H\, x + B\, C^{\,x}$$

Se $(r, s) = (0, n)$ si ha $$GM_{\alpha}^{0,n}(x) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x^{i-1}\right)$$

e si trova quindi la formula di Wilkie.

STIMA DEI PARAMETRI DI UNA FORMULA DI PEREQUAZIONE

Dopo avere individuato una legge di sopravvivenza adatta a descrivere la mortalità nella collettività, oppure una formula adatta per perequare le stime iniziali

$$\hat{q}_x \quad \text{oppure} \quad \hat{m}_x \qquad x = a, a+1, \dots, \omega - 1$$

si devono stimare i parametri.

Metodo dei minimi quadrati

$$\min_{\alpha, \beta, \dots} F(\alpha, \beta, \dots) \qquad \text{con} \quad F(\alpha, \beta, \dots) = \sum_{x=a}^{\omega-1} w_x [\hat{u}_x - f(x;\ \alpha, \beta, \dots)]^2$$

essendo

$w_x = \dfrac{n'_x}{\hat{q}_x}$ nel caso di minimi quadrati pesati, con n'_x esposizione nella classe di età x

$\hat{u}_x$ una opportuna trasformazione dei $\hat{q}_x$ oppure degli $\hat{m}_x$ tale che la funzione f sia lineare nei parametri del modello; infatti se f è lineare, le stime dei minimi quadrati dei parametri si ottengono agevolmente risolvendo un sistema lineare.

Per esempio, nel caso del modello di Gompertz si ha

$$\log \mu(x) = \log \beta + \alpha\, x$$

Quindi si può considerare il seguente problema

$$\min_{\alpha, \beta} \sum_{x=a}^{\omega-1} w_x \left[\log \hat{m}_x - \log \beta - \alpha\left(x + \frac{1}{2} \right) \right]^2$$

Si noti che, poiché $\hat{m}_x$ ha il significato di stima dell’intensità istantanea di mortalità costante nella classe di età $]x, x+1]$, dovendo “attribuirla” ad una precisa età nella classe $]x, x+1]$ si considera l’età $x + \frac{1}{2}$

<u>Metodo della massima verosimiglianza</u>

Tratteremo la stima dei parametri mediante il metodo della massima verosimiglianza nell’ambito dei GLM.