

Esercizi Analisi Matematica II  
Anno accademico 2017-2018

Foglio 5

1. **P** Calcolare la matrice Jacobiana della funzione composta  $g \circ f$  dove le funzioni  $g$  e  $f$  sono date da:

- (a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dove

$$f(x, y) = (2xy, x^2 + y, \sin(y)) \quad \text{e} \quad g(x, y, z) = (e^{x+y}, z^2x)$$

Suggerimento: considerare

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y), w(x, y)) = (2xy, x^2 + y, \sin(y))$$

e  $g$  data da  $g(u, v, w) = (e^{u+v}, w^2u)$

- (b)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  e  $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dove

$$f(x, y) = (x + y, x - y, xy, 2) \quad \text{e} \\ g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\cos(x_1^2x_3), x_4^5x_2, \sin(x_2x_3))$$

- (c)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dove

$$f(t) = (t^3, t^2, t) \quad \text{e} \quad g(x, y, z) = x^2 + y^4 + \cos(xyz)$$

- (d)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dove

$$f(x, y, z) = x^2 + y^4 + \cos(xyz) \quad \text{e} \quad g(t) = (t^3, t^2, t)$$

2. **P** Siano  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dove

$$f(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos^2(t)) \quad \text{e} \quad g(x, y, z) = xy + z^2.$$

Calcolare

$$\frac{d}{dt}(g \circ f)(t)$$

3. **P** Siano  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  dove  $f(x, y) = (x^2y, xy, 2y^2)$  e

$$g(x, y, z) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z), g_3(x, y, z), g_4(x, y, z)) = \\ (3x^2y, z^3 + \sin(xy), z^4, x^8 + y^9).$$

Calcolare

$$\frac{\partial}{\partial y}(g_2 \circ f)(x, y)$$

4. **P** Siano  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dove  $f(x, y, z) = (x^2, z^2y, y^2x)$  e

$$g(x, y, z) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z)) = (e^{xz}y, y^2).$$

Calcolare

$$\frac{\partial}{\partial z}(g_1 \circ f)(x, y, z)$$

5. **P\*** Sia dato un fluido contenuto in una regione  $\Omega$ ,  $\Omega$  sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^3$ . Supponiamo che il vettore velocità  $v = (v_1, v_2, v_3)$  con cui si muove il fluido dipenda dalla temperatura  $T$  e dalla densità  $\sigma$  tramite la legge  $v = F(T, \sigma)$  dove  $F : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una funzione differenziabile. Supponiamo che la temperatura  $T$  e la densità  $\sigma$  varino con la posizione  $x \in \Omega$  in maniera differenziabile e che in un punto  $x^0 \in \Omega$  la temperatura,  $T(x^0)$ , sia pari a 30 e la densità,  $\sigma(x^0)$ , sia pari a 10. Supponiamo che  $v(30, 10) = (1, 0, -1)$  e che

$$\frac{\partial v}{\partial T}(30, 10) = \frac{\partial F}{\partial T}(30, 10) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial v}{\partial \sigma}(30, 10) = \frac{\partial F}{\partial \sigma}(30, 10) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e

$$\nabla T(x^0) = [5 \ 4 \ 1] \quad \text{e} \quad \nabla \sigma(x^0) = [1 \ 4 \ -1].$$

Sia  $\|v\|^2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione tale che  $\|v\|^2(x) = \|v(x)\|^2$  per ogni  $x \in \Omega$ . Calcolare  $\nabla(\|v\|^2)(x^0)$ .

6. **P\*** Sia dato un fluido contenuto in una regione  $\Omega$ ,  $\Omega$  sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^3$ . Supponiamo che il vettore velocità  $v = (v_1, v_2, v_3)$  con cui si muove il fluido dipenda dalla temperatura  $T$ , dalla densità  $\sigma$  e anche esplicitamente dalla posizione tramite la legge  $v = F(T, \sigma, x, y, z)$  dove  $F : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una funzione differenziabile. Supponiamo che la temperatura  $T$  e la densità  $\sigma$  varino con la posizione  $x \in \Omega$  in maniera differenziabile e che in un punto  $x^0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$  la temperatura,  $T(x^0)$ , sia pari a 30 e la densità,  $\sigma(x^0)$ , sia pari a 10. Supponiamo che  $v(30, 10, x^0) = (1, 0, -1)$  e che

$$\frac{\partial v}{\partial T}(30, 10, x^0) = \frac{\partial F}{\partial T}(30, 10, x^0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma}(30, 10, x^0) = \frac{\partial F}{\partial \sigma}(30, 10, x^0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{bmatrix}(30, 10, x^0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\nabla T(x^0) = [5 \ 4 \ 1] \quad \text{e} \quad \nabla \sigma(x^0) = [1 \ 4 \ -1].$$

Per ogni  $t \in (-r, r)$ , sia  $f(t) = \|v\|^2(x^0 + tw) = \|v(x^0 + tw)\|^2$  dove  $w = (3, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$ . Calcolare  $f'(0)$ .

7. **T** Sia  $L : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ ,  $N, M \geq 1$ , una applicazione lineare. Definiamo

$$\|L\| = \sup_{\|v\|_{\mathbb{R}^N} = 1} \|L[v]\|_{\mathbb{R}^M}.$$

Dimostrare che

- l'estremo superiore viene raggiunto, cioè

$$\|L\| = \max_{\|v\|_{\mathbb{R}^N}=1} \|L[v]\|_{\mathbb{R}^M};$$

- la funzione  $\|\cdot\|$  definisce una norma sullo spazio vettoriale  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M) = \{L : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M : L \text{ è lineare}\}$ .

Suggerimento: per il primo punto, osservare che  $\{v \in \mathbb{R}^N : \|v\|_{\mathbb{R}^N} = 1\} = \partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^N$  e che  $L$  è continua. Per il secondo punto, le uniche difficoltà sono per la disuguaglianza triangolare. Prese  $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ , scegliere  $\tilde{v} \in \mathbb{R}^N$  con  $\|\tilde{v}\|_{\mathbb{R}^N} = 1$  tale che

$$\|L_1 + L_2\| = \|(L_1 + L_2)[\tilde{v}]\|_{\mathbb{R}^M} = \|L_1[\tilde{v}] + L_2[\tilde{v}]\|_{\mathbb{R}^M} \leq \|L_1[\tilde{v}]\|_{\mathbb{R}^M} + \|L_2[\tilde{v}]\|_{\mathbb{R}^M}$$

da cui si può facilmente concludere.

8. **T** Sia  $f : A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  dove  $A$  è un aperto connesso. Supponiamo che  $f$  sia differenziabile in ogni punto di  $A$ . Caratterizzare le funzioni  $f$  di questo tipo il cui differenziale sia costante, cioè tali che esista  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$  per cui

$$Df(x) = L \quad \text{per ogni } x \in A.$$

9. **T** Siano  $X$  e  $Y$  due spazi metrici. Dimostrare che una funzione  $f : X \rightarrow Y$  Lipschitziana è continua. Ricordiamo che  $f$  è Lipschitziana se esiste  $C > 0$  tale che

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq C d_X(x_1, x_2) \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in X.$$

10. **T** Sia  $X$  uno spazio metrico e sia data una funzione  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^M$  con componenti  $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, M$ . Dimostrare che  $f$  è Lipschitziana se e solo se lo sono tutte le sue componenti.

Suggerimento: usare il fatto che su  $\mathbb{R}^M$  la norma euclidea e la norma  $\|\cdot\|_\infty$  sono topologicamente equivalenti, cioè che per ogni  $y \in \mathbb{R}^M$  si ha

$$\|y\|_\infty \leq \|y\|_2 \leq \sqrt{M} \|y\|_\infty.$$

11. **T** Sia  $I$  un intervallo di  $\mathbb{R}$  e sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in ogni punto di  $I$ . Dimostrare allora che  $f$  è Lipschitziana su  $I$  se e solo se  $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione limitata.
12. **T** Sia  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$  una funzione Lipschitziana. Dimostrare che esistono costanti  $A_1$  e  $A_2$ ,  $A_1, A_2 \geq 0$ , tali che

$$\|f(x)\|_{\mathbb{R}^M} \leq A_1 + A_2 \|x\|_{\mathbb{R}^N} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N.$$

13. **T** Sia  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ . Dimostrare che  $L$  è Lipschitziana su  $\mathbb{R}^N$ , cioè che esiste  $C > 0$  tale che

$$\|L[x] - L[y]\|_{\mathbb{R}^M} \leq C \|x - y\|_{\mathbb{R}^N} \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Dimostrare in particolare che si può scegliere  $C = \|L\|$ .

Suggerimento: per linearità è sufficiente considerare il caso in cui  $y = 0$ . Il caso  $x = 0$  è banale. Allora per ogni  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $x \neq 0$ , abbiamo che  $x = \|x\|_{\mathbb{R}^N} v$  con  $v$  direzione, cioè  $\|v\|_{\mathbb{R}^N} = 1$ . Quindi

$$\|L[x]\|_{\mathbb{R}^M} = \|L[\|x\|_{\mathbb{R}^N} v]\|_{\mathbb{R}^M} = \| \|x\|_{\mathbb{R}^N} L[v] \|_{\mathbb{R}^M} = \|x\|_{\mathbb{R}^N} \|L[v]\|_{\mathbb{R}^M}$$

da cui si può facilmente concludere.

14. **T\*** Sia  $f : A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile in  $A$ ,  $A$  aperto. Siano  $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^N$  tali che  $[x^1, x^2]$ , il segmento di vertici  $x^1$  e  $x^2$ , sia contenuto in  $A$ . Dimostrare che

$$|f(x^2) - f(x^1)| \leq \left( \sup_{x \in [x^1, x^2]} \|\nabla f(x)\| \right) \|x^2 - x^1\|.$$

Suggerimento: usare il Teorema del Valor Medio (con  $x^1 \neq x^2$ ). Infatti, per qualche  $\tilde{x} \in [x^1, x^2]$ ,

$$|f(x^2) - f(x^1)| = \left| \frac{\partial f}{\partial v}(\tilde{x}) \right| \|x^2 - x^1\|,$$

dove  $v = (x^2 - x^1)/\|x^2 - x^1\|$ . Osservando che  $\|v\| = 1$  e che

$$\left| \frac{\partial f}{\partial v}(\tilde{x}) \right| = |\langle \nabla f(\tilde{x}), v \rangle|$$

si può concludere.

15. **T\*** Sia  $f : A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$  una funzione di classe  $C^1$  in  $A$ ,  $A$  aperto. Dimostrare che  $f$  è localmente Lipschitziana in  $A$ , cioè per ogni  $x^0 \in A$  esistono costanti positive  $r_0$  e  $C$  tali che  $B_{r_0}(x^0) \subset A$  e vale

$$\|f(x^2) - f(x^1)\| \leq C \|x^2 - x^1\| \quad \text{per ogni } x^1, x^2 \in B_{r_0}(x^0).$$

Suggerimento: considerare dapprima il caso  $M = 1$ . Fissato  $x^0$ , scegliere  $r_0 > 0$  tale che  $\overline{B_{r_0}(x^0)} \subset A$  e dimostrare che esiste una costante  $C$  tale che  $\|\nabla f(x)\| \leq C$  per ogni  $x \in \overline{B_{r_0}(x^0)}$ . Applicare infine l'esercizio precedente.

Per  $M > 1$  è sufficiente ragionare componente per componente, ad esempio dimostrando che  $f$  è localmente Lipschitziana se e solo se lo sono tutte le sue componenti.

16. **T\*** Sia  $C \subset \mathbb{R}^N$ ,  $C$  aperto convesso. Ricordiamo che un insieme  $C \subset \mathbb{R}^N$  è *convesso* se per ogni  $x, y \in C$  il segmento di estremi  $x$  e  $y$ ,  $[x, y]$ , è contenuto in  $C$ .

Sia  $f : C \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$  una funzione differenziabile in  $C$ . Dimostrare che  $f$  è Lipschitziana se e solo se  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : C \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione limitata per ogni  $i = 1, \dots, M$  e ogni  $j = 1, \dots, N$ .

**Legenda:**

**T** esercizio teorico; **P** esercizio pratico; **F** esercizio facoltativo; **\*** esercizio difficile