Quantile

▷ Data una variabile aleatoria X con funzione di ripartizione F_X, il q-quantile sinistro $(0 < q < 1)$ è dato dall'inversa generalizzata

$$F_X^{-1}(q) = F_X^{-1,+}(q) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \ F_X(x) \geq q\}$$

il quantile $F_X^{-1,-}(q)$ lascia alla sua sinistra una probabilità almeno uguale a q

▷ il q-quantile destro $(0 < q < 1)$ è

$$F_X^{-1,+}(q) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \ F_X(x) > q\}$$

▷ In generale

$$F_X^{-1,-}(q) \leq F_X^{-1,+}(q)$$

e $F_X^{-1,-}(q) < F_X^{-1,+}(q)$ se e solo se la funzione di ripartizione è costante sull' intervallo $[F_X^{-1,-}(q), F_X^{-1,+}(q))$; in questo caso, ogni numero di questo intervallo è chiamato q-quantile della distribuzione

Gestione del Rischio Finanziario

Quantile

▷ Proprietà del quantile sinistro $F_X^{-1}(q) \equiv F_X^{-1,-}(q)$, noto anche come inversa generalizzata della funzione di ripartizione F_X

- ⋆ $q \to F_X^{-1}(q)$ è non-decrescente, continua a sinistra
- ⋆ limiti:

$$\lim_{q \downarrow 0} F_X^{-1}(q) = \sup\{x \in \mathbb{R} : \ F_X(x) = 0\} =: \text{estremo inferiore di } X,$$

$$\lim_{q \uparrow 1} F_X^{-1}(q) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \ F_X(x) = 1\} =: \text{estremo superiore di } X$$

- ⋆ per ogni $0 < q < 1$ riesce $F_X(F_X^{-1}(q)) \geq q$; vale l'uguaglianza se F_X è continua in $x = F_X^{-1}(q)$

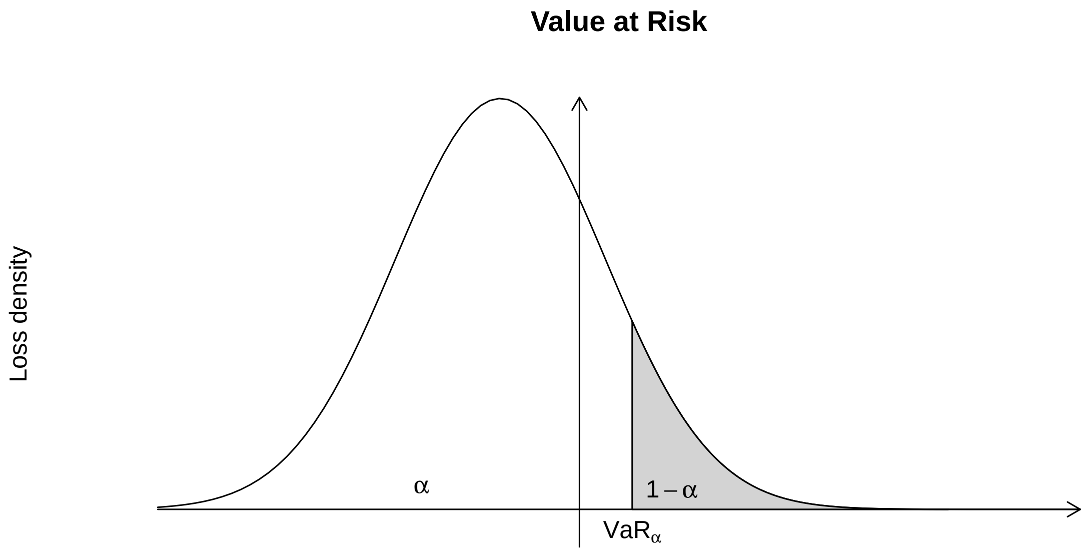
Quantile

- Altre proprietà
  - per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $0 < q < 1$,
    $$F_X^{-1}(q) \leq x \Leftrightarrow q \leq F_X(x)$$
  - discontinuità di F_X corrispondono a tratti di costanza di F_X^{-1}, e viceversa
  - se F_X è strettamente crescente e continua, allora tale è F_X^{-1} e coincide con l'inversa di F_X, definita da $F_X(x) = q \Leftrightarrow x = F_X^{-1}(q)$
  - se g è non decrescente, continua a sinistra, allora
    $$F_{g(X)}^{-1}(q) = g(F_X^{-1}(q))$$
    "il quantile di una trasformata è la trasformata del quantile"
- Proprietà simili sono verificate dal quantile destro

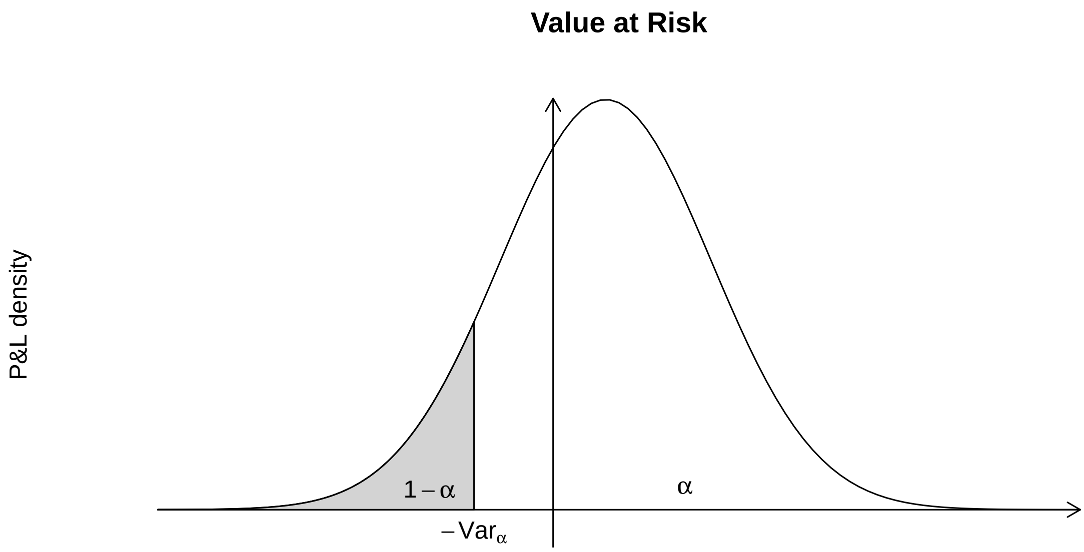
Value-at-Risk

- Il Value-at-Risk è quindi un quantile della distribuzione della perdita L/inversa generalizzata di L:
  $$\mathrm{VaR}_\alpha^{\mathrm{P\&L}} = \inf\{x \in \mathbb{R} : \; F_L(x) \geq \alpha\} = F_L^{-1}(\alpha)$$
- usando la distribuzione di P&L, è
  $$\mathrm{VaR}_\alpha^{\mathrm{P\&L}} = -\sup\{x \in \mathbb{R} : \; \mathrm{Prob}[\mathrm{P\&L} < x] \leq 1 - \alpha\}$$
  perdite superiori a VaR_α si possono verificare con probabilità inferiore a $1 - \alpha$
- nel caso in cui la distribuzione di P&L sia invertibile, la definizione richiede
  $$\mathrm{Prob}[L \leq \mathrm{VaR}_\alpha^{\mathrm{P\&L}}] = \alpha$$
  o
  $$\mathrm{Prob}[\mathrm{P\&L} \leq -\mathrm{VaR}_\alpha^{\mathrm{P\&L}}] = 1 - \alpha$$
  cioè
  $$\mathrm{VaR}_\alpha^{\mathrm{P\&L}} = F_L^{-1}(\alpha) = -F_{\mathrm{P\&L}}^{-1}(1 - \alpha)$$

Value-at-Risk



Value-at-Risk



Value-at-Risk

- relazione tra Value-at-Risk in termini monetari:

$$\mathrm{VaR}_\alpha^{\mathrm{P\&L}} = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathrm{Prob}[-\mathrm{P\&L} \le x] \ge \alpha\} = F^{-1}_{-\mathrm{P\&L}}(\alpha)$$

e Value-at-Risk in termini di rendimento (composto)

$$\mathrm{VaR}_\alpha^{R} = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathrm{Prob}[-R \le x] \ge \alpha\} = F^{-1}_{-R}(\alpha)$$

dove $-R = \log \frac{P(t)}{P(T)}$ è la perdita in termini composti

- P&L è una funzione crescente di R e viceversa; si trovano le relazioni

$$\mathrm{VaR}_\alpha^{R} = -\log\left(1 - \frac{\mathrm{VaR}_\alpha^{\mathrm{P\&L}}}{P(t)}\right)$$

$$\mathrm{VaR}_\alpha^{\mathrm{P\&L}} = P(t)\left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{VaR}_\alpha^{R}}\right)$$

Gestione del Rischio Finanziario

Value-at-Risk

- Elementi costituenti il Value-at-Risk:
  - ⋆ orizzonte temporale $T - t$
  - ⋆ livello di confidenza α
  - ⋆ distribuzione di probabilità del profitto/perdita P&L o del rendimento R (o I)
- Orizzonte temporale: scelto dall'utilizzatore in base al business
  - ⋆ scelte tipiche: 1 giorno, 10 giorni (2 settimane), 1 anno
  - ⋆ portafogli frequentemente ribilanciati: 1 giorno
  - ⋆ trading desks: intraday VaR, 1 ora
  - ⋆ Solvency: 1 anno
  - ⋆ tipicamente, VaR cresce con l'orizzonte temporale

Value-at-Risk

- Livello di confidenza: dipende dall'appetito per il rischio o fissato dal autorità di sorveglianza
  - usualmente $90\% < \alpha < 100\%$
  - trading floors: $\alpha = 90\%$
  - calcolo del margine di solvibilità/capitale economico: 95%, 99.5% ("1 su 20", "1 su 200")
  - il Value-at-Risk cresce con α
- la costruzione della distribuzione di probabilità di L o R è lasciata all'utilizzatore: approcci più comuni
  - parametrico
  - non parametrico (historical VaR, bootstrapping)
  - semi-parametrico (teoria dei valori estremi)

Gestione del Rischio Finanziario

Value-at-Risk

- Approccio parametrico: scegliere una distribuzione da una famiglia parametrica (normale, lognormale, t-student, ...) poi calcolare il Value-at-Risk analiticamente o numericamente risolvendo

$$\mathrm{VaR}_\alpha^{\mathrm{P\&L}} = F_L^{-1}(\alpha) \quad \text{o} \quad \mathrm{Prob}[L \leq \mathrm{VaR}_\alpha^{\mathrm{P\&L}}] = \alpha$$

- VaR con distribuzione normale: $R \sim N(\mu, \sigma^2)$
  - indicando con Φ e Φ^{-1} la funzione di ripartizione e la sua inversa (quantile) della normale standard

$$\mathrm{VaR}_\alpha^R = -\left(\mu + \sigma\Phi^{-1}(1-\alpha)\right)$$

  $\rightsquigarrow$ proporzionale a σ
  - in termini monetari:

$$\mathrm{VaR}_\alpha^{\mathrm{P\&L}} = P(t)\left(1 - \mathrm{e}^{\mu+\sigma\Phi^{-1}(1-\alpha)}\right)$$

  - Value-at-Risk $\downarrow \mu$, $\uparrow \sigma$ (se $\alpha > 50\%$)

Value-at-Risk

▷ VaR con distribuzione normale: $(t, T) = (t, t + n\Delta)$, $R(t_{i-1}, t_i) \sim N(\mu, \sigma^2)$, rendimenti incorrelati

- ⋆ $E[R(t, t + n\Delta)] = n\mu$, $\text{sd}[R(t, t + n\Delta)] = \sigma\sqrt{n}$
- ⋆ il Value-at-Risk sull'orizzonte temporale $(t, t + n\Delta)$ è

$$\text{VaR}_\alpha^{R(t,t+n\Delta)} = -\left(\mu n + \sigma\sqrt{n}\Phi^{-1}(1-\alpha)\right)$$

Se $\mu = 0$, allora

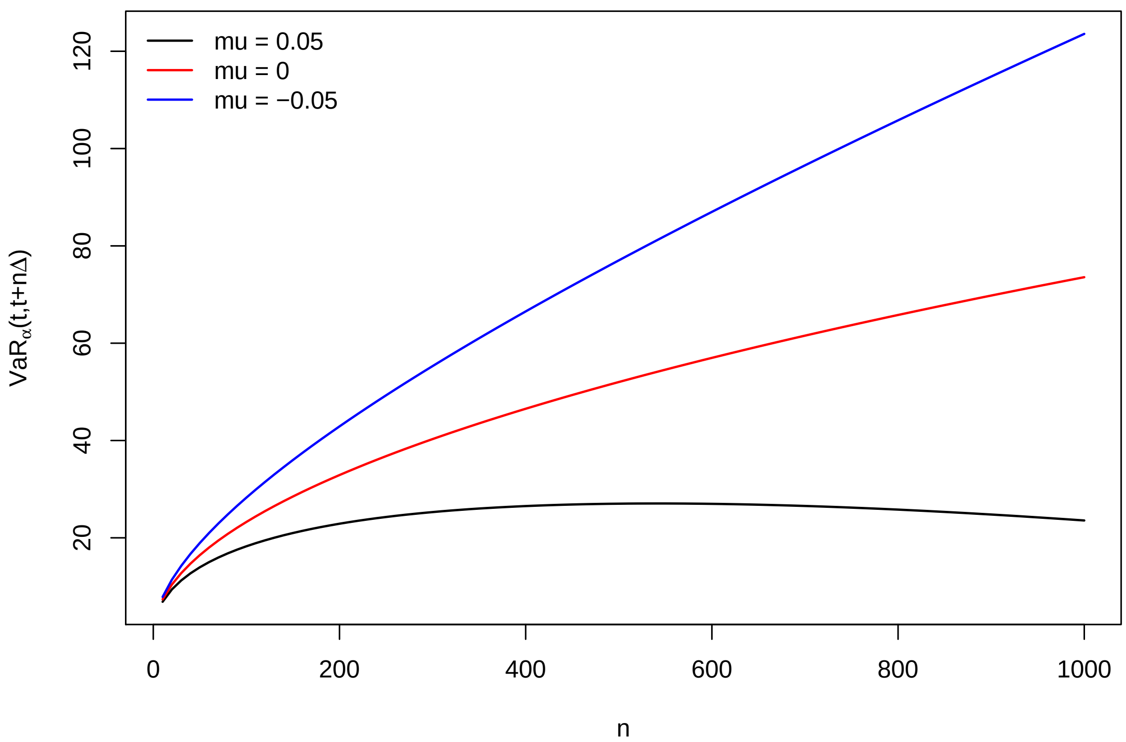
$$\text{VaR}_\alpha^{R(t,t+n\Delta)} = \sqrt{n}\,\text{VaR}_\alpha^{R(t,t+\Delta)}$$

- ⋆ andamento rispetto all'orizzonte temporale n (se $\alpha > 50\%$)?

$$\text{VaR} \uparrow n \quad \text{se} \quad \mu \leq 0$$

$$\text{VaR} \quad \text{prima crescente, poi decrescente, se} \quad \mu > 0$$

Value-at-Risk



Value-at-Risk

- Un'alternativa alla distribuzione normale è la distribuzione t di Student, con code più pesanti rispetto alla normale (cmq simmetrica)
- VaR con distribuzione t di Student: $R \sim \mu + \sigma t_\nu$, dove t_ν distribuzione t di Student con $\nu > 1$ gradi di libertà
  - ⋆ se ν intero, allora

$$t_\nu \sim \frac{Z}{\sqrt{\frac{Z_1^2+\ldots+Z_\nu^2}{\nu}}} \sim \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi_\nu^2}{\nu}}}$$

    dove $Z, Z_1, \ldots, Z_\nu$ sono normali standard indipendenti
  - ⋆ in generale, la densità di t_ν è

$$f_{t_\nu}(x) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}, \; x \in \mathbb{R}$$

    Più piccolo è ν, più pesanti sono le code
  - ⋆ momenti: $E[t_\nu] = 0$, $var[t_\nu] = \frac{\nu}{\nu-2}$ per $\nu > 2 \Rightarrow E[R] = \mu$, $var[R] = \frac{\sigma^2\nu}{\nu-2}$

Value-at-Risk

- VaR con distribuzione t di Student: $R \sim \mu + \sigma t_\nu$
  - ⋆ essendo t simmetrica, la perdita è $-R \sim -\mu - \sigma t_\nu \sim -\mu + \sigma t_\nu$
  - ⋆ con calcolo simile al caso normale,

$$\mathrm{VaR}_\alpha^R = -(\mu + \sigma F_{t_\nu}^{-1}(1-\alpha))$$

α	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.9975	0.999
normal	0.21	0.28	0.34	0.42	0.47	0.51	0.57
ν							
10.00	0.22	0.31	0.40	0.50	0.58	0.67	0.78
5.00	0.25	0.35	0.46	0.62	0.76	0.90	1.13
2.50	0.30	0.46	0.66	1.02	1.38	1.86	2.71
2.10	0.32	0.52	0.77	1.26	1.78	2.51	3.92
2.01	0.33	0.53	0.81	1.33	1.92	2.74	4.36

Value-at-Risk: approccio parametrico

- vantaggi
  - solo due (o tre) parametri da stimare
  - si estende a periodi di lunghezza n via la regola della radice quadrata (nel caso normale)
  - si estende al caso di portafogli
- svantaggi
  - scelta di un modello che consenta code pesanti e asimmetria?
  - rischio di parametro: il metodo richiede la stima dei parametri μ, σ (e ν nel caso t di Student) $\Rightarrow$ intervalli di confidenza per il Value-at-Risk
  - rischio di modello: il metodo richiede la scelta di un modello $\Rightarrow$ ogni modello è sbagliato

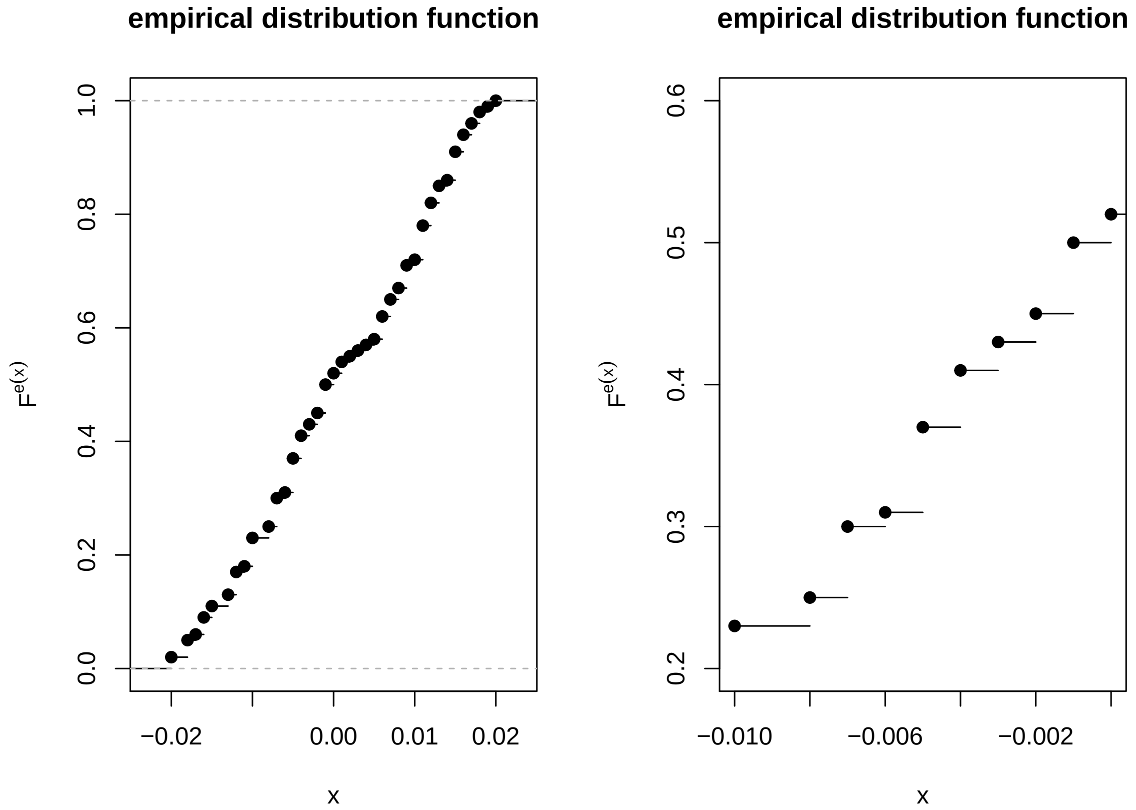
Value-at-Risk: historical simulation

- approccio non parametrico: historical simulation
  - approccio molto semplice: usa la funzione di ripartizione empirica costruita da un campione casuale $x_1, \dots, x_m$

$$F^e(x) = \frac{\text{numero di } i : \; x_i \leq x}{m}$$

  - indicato con $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(m)}$ la statistica d'ordine, se gli x_i sono tutti distinti riesce $F^e(x_{(i)}) = \frac{i}{m}$: salti in corrispondenza agli $x_{(i)}$ pari a $1/m$, costante tra due $x_{(i)}$
  - se gli x_i non sono tutti distinti: se $x_{(i-1)} < x_{(i)} = x_{(i+1)} = \dots = x_{(i+k-1)} < x_{(i+k)}$ il salto in corrispondenza a $x_{(i)}$ è pari a k/m, per il resto costante a tratti

Value-at-Risk: historical simulation



Value-at-Risk: historical simulation

- approccio non parametrico: historical simulation
  - dati $r_1, \ldots, r_m$ un campione casuale di m rendimenti composti relativi a periodi di uguale ampiezza Δ (e.g. giornalieri) e $l_i = -r_i$ le corrispondenti perdite
  - si costruisce la statistica d'ordine $l_{(1)} \leq \ldots \leq l_{(m)}$ e la corrispondente funzione di ripartizione empirica F^e
  - il Value-at-Risk è

$$\mathrm{VaR}_\alpha^R = \inf\{x \in \mathbb{R} : F^e(x) \geq \alpha\}$$

  - se αm è un intero, allora

$$\mathrm{VaR}_\alpha^R = l_{(\alpha m)} = -r_{((1-\alpha)m)}$$

  - se αm non è necessariamente un intero, allora

$$\mathrm{VaR}_\alpha^R = l_{(\lceil \alpha m \rceil)}$$

dove $\lceil x \rceil$ = minimo intero maggiore o uguale a x