Analisi Matematica II | Lezione 4

DIFFERENZIALE DELLA FUNZIONE COMPOSTA E TEOREMA DEL VALOR MEDIO

DIFFERENZIALE DELLA FUNZIONE COMPOSTA

TEOREMA $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A APERTO

$g: B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, B APERTO, $f(A) \subseteq B$

$x^0 \in A$; $\quad y^0 = f(x^0) \in B$

SIA f DIFFERENZIABILE IN x^0 CON DIFFERENZIALE $Df(x^0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

SIA g DIFFERENZIABILE IN y^0 CON DIFFERENZIALE $Dg(y^0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$

ALLORA $g \circ f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ È DIFFERENZIABILE IN x^0 E VALE

$$D(g \circ f)(x^0) = Dg(f(x^0)) \circ Df(x^0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l)$$

COROLLARIO $$\boxed{J(g \circ f)(x^0) = Jg(f(x^0)) \cdot Jf(x^0)}$$ PRODOTTO RIGHE PER COLONNE

$$A = Jf(x^0) = [a_{kj}]_{k,j=1}^{m,n} \in M^{m \times n}(\mathbb{R}) \qquad a_{kj} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x^0)$$

$$B = Jg(f(x^0)) = [b_{ik}]_{i,k=1}^{l,m} \in M^{l \times m}(\mathbb{R}) \qquad b_{ik} = \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x^0))$$

$$C = J(g \circ f)(x^0) = [c_{ij}]_{i,j=1}^{l,n} \in M^{l \times n}(\mathbb{R}) \qquad c_{ij} = \frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(x^0) = \frac{\partial (g_i \circ f)}{\partial x_j}(x^0)$$

$$C = B \cdot A \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{kj} \quad \forall i = 1, \dots, l \quad \forall j = 1, \dots, n$$ (2)

QUINDI

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(x^0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x^0)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x^0)$$

DIMOSTRAZIONE

IPOTESI

- $f(x^0+h) = f(x^0) + Df(x^0)[h] + R_1(h) \quad \forall x = x^0+h \in A, \ h \in \mathbb{R}^n$

con $\lim_{h \to 0} \frac{\|R_1(h)\|}{\|h\|} = 0$

- $g(y^0+k) = g(y^0) + Dg(y^0)[k] + R_2(k) \quad \forall y = y^0+k \in B, \ k \in \mathbb{R}^m$

con $\lim_{k \to 0} \frac{\|R_2(k)\|}{\|k\|} = 0$

TESI

$(g \circ f)(x^0+h) = (g \circ f)(x^0) + (Dg(f(x^0)) \circ Df(x^0))[h] + R(h) \quad \forall x = x^0+h \in A,$
$h \in \mathbb{R}^n$, con $\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{\|R(h)\|}{\|h\|} = 0 \quad (1)}$

Sia $h \in \mathbb{R}^n$ tale che $x = x^0+h \in A$ e

$k = k(h) = f(x^0+h) - f(x^0) = Df(x^0)[h] + R_1(h)$ cioè

$$y = f(x^0+h) = f(x^0) + K(h) = y^0 + K(h) \in B$$

CALCOLIAMO $R(h)$

$$(g\circ f)(x^0+h) = g(f(x^0+h)) = g(f(x^0)) + Dg(y^0)[K(h)] + R_2(K(h)) =$$

$$= (g\circ f)(x^0) + Dg(y^0)[Df(x^0)[h] + R_1(h)] + R_2(K(h)) =$$

$$= (g\circ f)(x^0) + (Dg(f(x^0))\circ Df(x^0))[h] + Dg(y^0)[R_1(h)] + R_2(K(h))$$

QUINDI

$$R(h) = Dg(y^0)[R_1(h)] + R_2(K(h))$$

OSSERVIAMO CHE

$$\|R(h)\| \le \|Dg(y^0)[R_1(h)]\| + \|R_2(K(h))\|$$

QUINDI SE DIMOSTRIAMO CHE

$$(2) \quad \lim_{h\to 0} \frac{\|Dg(y^0)[R_1(h)]\|}{\|h\|} = 0$$

E

$$(3) \quad \lim_{h\to 0} \frac{\|R_2(K(h))\|}{\|h\|} = 0$$

SEGUE IMMEDIATAMENTE CHE VALE (1) E IL TEOREMA È DIMOSTRATO

DIMOSTRIAMO (2)

$$\frac{\|Dg(y^0)[R_1(h)]\|}{\|h\|} = \left\|Dg(y^0)\left[\frac{R_1(h)}{\|h\|}\right]\right\| \xrightarrow{h\to 0} 0$$ (4)

PER LA PROPRIETÀ DI R_1 E LA CONTINUITÀ DI $Dg(y^0)$, USANDO IL LIMITE DELLA FUNZIONE COMPOSTA. QUINDI VALE (2)

DIMOSTRIAMO (3)

INTRODUCIAMO LA FUNZIONE AUSILIARIA

$$\tilde{R}_2(K) = \begin{cases} \frac{R_2(K)}{\|K\|} & K \neq 0, \quad y = y^0 + K \in B, \quad K \in \mathbb{R}^m \\ 0 & K = 0 \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

PER LA PROPRIETÀ DI R_2, SI HA CHE

- $\tilde{R}_2$ È CONTINUA IN $0 \in \mathbb{R}^m$

INOLTRE VALE

- $R_2(K) = \tilde{R}_2(K)\|K\| \quad \forall K \in \mathbb{R}^m$ TALE CHE $y = y^0 + K \in B$

(INCLUSO $K=0$!)

QUINDI $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, CON $x = x^0 + h \in A$ SI HA

$$\frac{\|R_2(K(h))\|}{\|h\|} = \|\tilde{R}_2(K(h))\| \frac{\|K(h)\|}{\|h\|}$$

DIMOSTRIAMO CHE ESISTONO $C>0$ E $\delta>0$ TALI CHE

(*) $\|K(h)\| \leq C\|h\| \quad \forall \|h\| \leq \delta$

INFATTI $\forall h \neq 0$

$$\frac{\|K(h)\|}{\|h\|} \leq \frac{\|Df(x^0)[h]\|}{\|h\|} + \frac{\|R_1(h)\|}{\|h\|} =$$

$$= \left\|Df(x^0)\left[\frac{h}{\|h\|}\right]\right\| + \frac{\|R_1(h)\|}{\|h\|} \leq \underbrace{\max_{\|v\|=1} \|Df(x^0)[v]\|}_{=C_0} + \frac{\|R_1(h)\|}{\|h\|}$$

$\xrightarrow{h \to 0} 0$

ESISTE $\delta > 0$ TALE CHE $\forall 0 < \|h\| \leq \delta$ SI HA

$$\frac{\|R_1(h)\|}{\|h\|} \leq 1$$

QUINDI $\forall \; 0 < \|h\| \leq \delta$ SI HA

$$\frac{\|K(h)\|}{\|h\|} \leq (C_0 + 1) \quad \text{E QUINDI} \quad \|K(h)\| \leq (C_0+1)\|h\|$$

CHIARAMENTE QUEST'ULTIMA DISUGUAGLIANZA VALE ANCHE PER $h=0$ E $(*)$ È DIMOSTRATA CON $C = C_0 + 1$

DA $(*)$ DEDUCIAMO IMMEDIATAMENTE CHE $\lim_{h \to 0} K(h) = 0$.

PER LA CONTINUITÀ DI $\widehat{R}_2$ IN 0, USANDO IL LIMITE DELLA FUNZIONE COMPOSTA, ABBIAMO CHE

$$\lim_{h \to 0} \|\widehat{R}_2(K(h))\| = 0 \qquad \left[h \to K(h) \to \|\widehat{R}_2(K(h))\| \right]$$

ALLORA $\forall\, 0 < \|h\| \le \delta$ SI HA

$$\frac{\|R_2(K(h))\|}{\|h\|} = \|\tilde{R}_2(K(h))\| \frac{\|K(h)\|}{\|h\|} \le$$

$$\le C \|\tilde{R}_2(K(h))\| \xrightarrow{h \to 0} 0$$

QUINDI VALE (3) $\square$

<u>ESEMPIO</u> 1) SIA $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ UNA <u>CURVA</u>

$$\mathbb{R} \ni t \to \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$$

SIA $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \to x^2+y^2+z^2 = \|(x,y,z)\|^2 = F(x,y,z)$$

CALCOLARE

$$\frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(t)$$

$$F \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} \ni t \to F(\cos t, \operatorname{sen} t, t) = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + t^2 = 1 + t^2$$

$$\frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(t) = 2t$$

$$\frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(t) = (F \circ \gamma)'(t) = J(F \circ \gamma)(t) = JF(\gamma(t)) \cdot J\gamma(t)$$

$$J\gamma(t) = \frac{d}{dt}\gamma(t) = \gamma'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \\ 1 \end{bmatrix}$$

<u>VETTORE</u> <u>TANGENTE</u> ALLA <u>CURVA</u> γ IN $\gamma(t)$

3×1

$$JF(x,y,z) = \nabla F(x,y,z) = [2x \quad 2y \quad 2z] \qquad 1\times 3$$

$$JF(\gamma(t)) = JF(x(t), y(t), z(t)) = [2x(t), \; 2y(t), \; 2z(t)] =$$

$$= [2\cos t \quad 2\operatorname{sen} t \quad 2t]$$

$$\frac{d}{dt}(F\circ\gamma)(t) = [2\cos t \quad 2\operatorname{sen} t \quad t]\begin{bmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \\ 1 \end{bmatrix} = -2\cos t \operatorname{sen} t + 2\operatorname{sen} t\cos t + 2t = 2t$$

2) SIA $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \to f(x,y) = e^{x+2y}$$

SIA $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R} \ni t \to g(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t)) = (e^t, t, t^2)$$

CALCOLARE $J(g\circ f)(x,y)$

NOTAZIONE

$$g(t) = (x(t), y(t), z(t)) \qquad n=3$$

$$g(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) = (g_1(t), \dots, g_n(t)) \qquad n \geq 2$$

LA PRIMA NOTAZIONE CONFONDE LE COORDINATE x,y,z DELLO SPAZIO DI ARRIVO CON LE COORDINATE x,y DEL DOMINIO DI f!

— x —

$$g\circ f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$J(g\circ f)(x,y) = Jg(f(x,y)) \cdot Jf(x,y)$$

$$J_f(x,y) = \nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} e^{x+2y} & 2e^{x+2y} \end{bmatrix} \quad 1\times 2$$ ⑧

$$J_g(t) = g'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \\ g_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ 1 \\ 2t \end{bmatrix} \quad 3\times 1$$

$$J_g(f(x,y)) = J_g(\underset{t}{\underset{\shortparallel}{e^{x+2y}}}) = \begin{bmatrix} e^{e^{x+2y}} \\ 1 \\ 2e^{x+2y} \end{bmatrix}$$

$$J(g\circ f)(x,y) = \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} e^{e^{x+2y}} \\ 1 \\ 2e^{x+2y} \end{bmatrix}} \underset{1\times 2}{\begin{bmatrix} e^{x+2y} & 2e^{x+2y} \end{bmatrix}} = \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} e^{e^{x+2y}} e^{x+2y} & 2e^{e^{x+2y}} e^{x+2y} \\ e^{x+2y} & 2e^{x+2y} \\ 2(e^{x+2y})^2 & 4(e^{x+2y})^2 \end{bmatrix}}$$

3) Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \to f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z)) = (x+z^2, y^2-x^2)$

Sia $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$

$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \to g(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y), g_3(x,y), g_4(x,y)) = (x^2, y^2, 2xy, 2x)$

Notazione

$f(x,y,z) = (u(x,y,z), v(x,y,z)) = (x+z^2, y^2-x^2)$

$g(u,v) = (g_1(u,v), g_2(u,v), g_3(u,v), g_4(u,v)) = (u^2, v^2, 2uv, 2u)$

Oppure

$$f(x_1,x_2,x_3)=(y_1(x_1,x_2,x_3),y_2(x_1,x_2,x_3))=(x_1+x_3^2,\ x_2^2-x_1^2)$$ ⑨

$$g(y_1,y_2)=(z_1(y_1,y_2),z_2(y_1,y_2),z_3(y_1,y_2),z_4(y_1,y_2))=(y_1^2,y_2^2,2y_1y_2,2y_1)$$

—×—

$$g\circ f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$$

$$J(g\circ f)(x,y,z)=Jg(f(x,y,z))\cdot Jf(x,y,z)$$

$$Jf(x,y,z)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2z\\ -2x & 2y & 0\end{bmatrix}\qquad 2\times 3$$

$$Jg(u,v)=\begin{bmatrix}2u & 0\\ 0 & 2v\\ 2v & 2u\\ 2 & 0\end{bmatrix}\qquad 4\times 2$$

$$Jg(f(x,y,z))=Jg(u(x,y,z),v(x,y,z))=\begin{bmatrix}2u(x,y,z) & 0\\ 0 & 2v(x,y,z)\\ 2v(x,y,z) & 2u(x,y,z)\\ 2 & 0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}2(x+z^2) & 0\\ 0 & 2(y^2-x^2)\\ 2(y^2-x^2) & 2(x+z^2)\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

$$J(g\circ f)(x,y,z)=$$

$$\begin{bmatrix} 2(x+z^2) & 0 \\ 0 & 2(y^2-x^2) \\ 2(y^2-x^2) & 2(x+z^2) \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2z \\ -2x & 2y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(x+z^2) & 0 & 4z(x+z^2) \\ -4x(y^2-x^2) & 4y(y^2-x^2) & 0 \\ 2(y^2-x^2)-4x(x+z^2) & \boxed{4y(x+z^2)} & 4z(y^2-x^2) \\ 2 & 0 & 4z \end{bmatrix}$$

4×2 $\qquad$ 2×3 $\qquad$ 4×3

OSSERVAZIONE $\quad g_3(u,v) = 2uv$

$$\boxed{c_{32}} = \frac{\partial (g_3 \circ f)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(g_3 \circ (u,v)\Big)(x,y,z) =$$

$$= \frac{\partial g_3}{\partial u}\Big(u(x,y,z), v(x,y,z)\Big) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial g_3}{\partial v}\Big(u(x,y,z), v(x,y,z)\Big) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(x,y,z) =$$

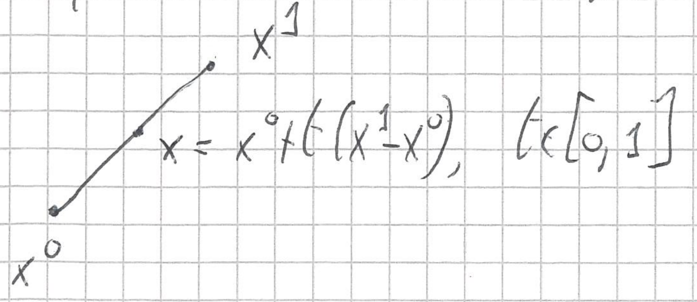
$$= 2v(x,y,z) \cdot 0 + 2u(x,y,z) \cdot 2y = \boxed{4y(x+z^2)}$$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO

NOTAZIONE $\quad$ Siano $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n$

$[x^0, x^1] = \{x = x^0 + t(x^1 - x^0),\ t \in [0,1]\} \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad$ SEGMENTO DA x^0 A x^1

$(x^0, x^1) = \{x = x^0 + t(x^1 - x^0),\ t \in (0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad$ SEGMENTO DA x^0 A x^1 ESCLUSI GLI ESTREMI

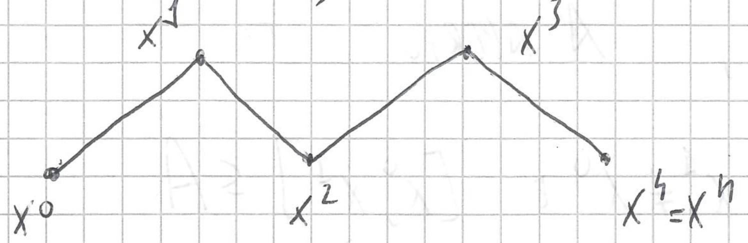


CHIAMIAMO <u>CURVA SPEZZATA</u> O <u>POLIGONALE</u> IN $\mathbb{R}^n$ DI VERTICI (11)

$x^0, x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R}^n$ L'UNIONE DEI SEGMENTI

$$[x^0, x^1], [x^1, x^2], \dots, [x^{n-1}, x^n]$$

(x^0 PRIMO VERTICE, x^n ULTIMO VERTICE)



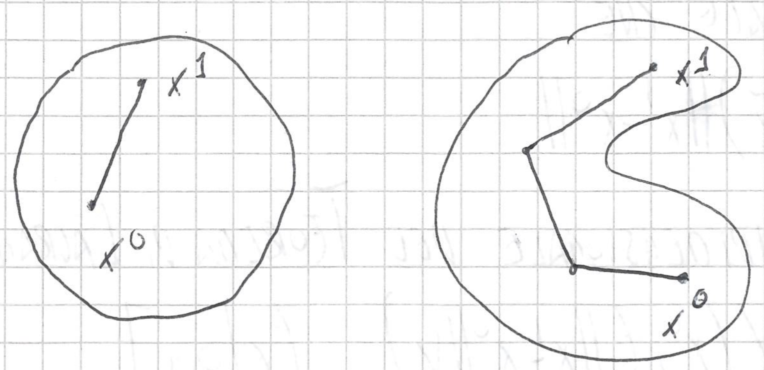
<u>DEFINIZIONE</u> UN INSIEME <u>APERTO</u> $A \subseteq \mathbb{R}^n$ SI DICE <u>CONNESSO</u> (<u>PER POLIGONALI</u>) SE $\forall\, x^0, x^1 \in A$ ESISTE UNA CURVA SPEZZATA <u>CONTENUTA IN A</u> CON PRIMO VERTICE x^0 E ULTIMO VERTICE x^1

<u>ESEMPI</u> • $\mathbb{R}^n$ CONNESSO;

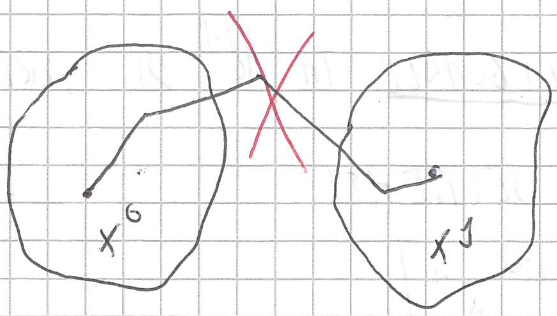
• $B_r(x)$ CONNESSO $\forall x \in \mathbb{R}^n\ \forall r > 0$

$$\left(x^0, x^1 \in B_r(x^0) \implies [x^0, x^1] \subseteq B_r(x^0) \right)$$

• $A \subseteq \mathbb{R}$, A APERTO È CONNESSO SE E SOLO SE A È UN INTERVALLO



<u>CONNESSI</u>



non connesso

Teorema del valor medio

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \boxed{\mathbb{R}}, \qquad A \text{ aperto}$$

Siano $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n$ tali che $x^1 \neq x^0$ e $[x^0; x^1] \subseteq A$

Sia $v = \dfrac{x^1 - x^0}{\|x^1 - x^0\|}$ direzione $(\|v\| = 1)$

Supponiamo che

- f sia continua in $x = x^0 + t(x^1 - x^0)$ $\forall t \in [0,1]$ cioè in ogni $x \in [x^0; x^1]$
- f ammetta $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x)$ in $x = x^0 + t(x^1 - x^0)$ $\forall t \in (0,1)$ cioè in ogni $x \in (x^0; x^1)$

Allora esiste $\rho \in (0,1)$ tale che

$$f(x^1) - f(x^0) = \frac{\partial f}{\partial v}\left(x^0 + \rho(x^1 - x^0)\right)\|x^1 - x^0\|$$

cioè esiste $\tilde{x} \in (x^0; x^1)$ tale che

$$f(x^1) - f(x^0) = \frac{\partial f}{\partial v}(\tilde{x})\|x^1 - x^0\|$$

Osservazione versione multidimensionale del Teorema di Lagrange

Dimostrazione Sia $g(t) = f(x^0 + t\|x^1 - x^0\| v)$, $t \in [0,1]$

- g continua in $[0,1]$
- g derivabile in $(0,1)$ e $g'(t) = \|x^1-x^0\| \frac{\partial f}{\partial v}(x^0 + t\|x^1-x^0\| v) \quad \forall t \in (0,1)$

Per Lagrange, esiste $\rho \in (0,1)$ tale che

$$g(1) - g(0) = g'(\rho)(1-0)$$

$$f(x^1) - f(x^0) = \|x^1-x^0\| \frac{\partial f}{\partial v}(x^0 + \rho\|x^1-x^0\| v)(1-0) = \|x^1-x^0\| \frac{\partial f}{\partial v}(x^0 + \rho(x^1-x^0))$$

$\square$

Corollario Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso.

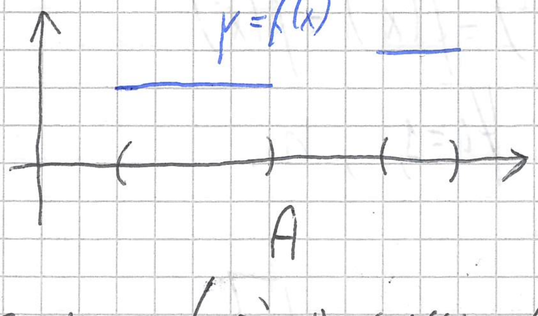
Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Supponiamo esista $Jf(x) = 0 \in M^{m \times n}(\mathbb{R}) \quad \forall x \in A$

Allora f è costante su A, cioè esiste $c \in \mathbb{R}^m$ tale che

$$f(x) = c \quad \forall x \in A$$

Osservazione A connesso è essenziale



$f'(x) = 0 \quad \forall x \in A$ ma

f non è costante

Dimostrazione f è di classe C^1, in particolare è differenziabile

Ragionando componente per componente, è sufficiente considerare il caso $m = 1$, cioè

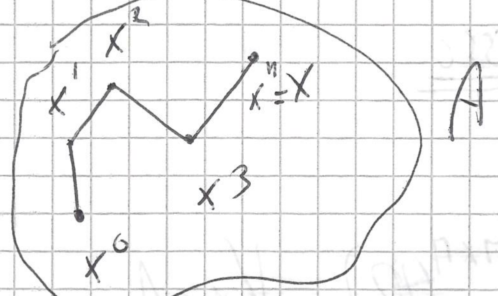
$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $\nabla f(x) = 0 \in \mathbb{R}^n \ \forall x \in A$ (14)

In particolare, per la differenziabilità, abbiamo che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = 0 \quad \forall x \in A \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \ \|v\| = 1$$

Fisso $x^0 \in A$ e dimostriamo che $f(x) = f(x^0) \ \forall x \in A$

Sia $x \in A$; consideriamo la curva poligonale contenuta in A che congiunge x^0 a x, di vertici $x^0, x^1, \dots, x^n = x$



Per il Teorema del valor medio, per qualche $\rho \in (0,1)$ si ha

$$f(x^1) - f(x^0) = \frac{\partial f}{\partial v}(x^0 + \rho(x^1 - x^0)) \|x^1 - x^0\| = 0$$

Analogamente,

$$f(x^2) - f(x^1) = 0 \quad \text{quindi} \quad f(x^2) = f(x^1) = f(x^0)$$

Per induzione, $f(x^i) = f(x^0) \quad \forall i = 1, \dots, n.$

In particolare

$$f(x) = f(x^n) = f(x^0) \qquad \square$$

<u>Definizione</u> (X, d_X), (Y, d_Y) <u>spazi</u> <u>metrici</u>

$f: X \to Y$ si dice <u>Lipschitziana</u> o di <u>Lipschitz</u>

SE ESISTE $C \geq 0$, DETTA COSTANTE DI LIPSCHITZ, TALE CHE

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq C\, d_X(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X$$

ESERCIZIO DIMOSTRARE CHE SE f È LIPSCHITZIANA ALLORA È CONTINUA IN X.

DEFINIZIONE SIA $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A APERTO

f SI DICE LOCALMENTE LIPSCHITZIANA SE PER OGNI $x^0 \in A$ ESISTONO $r_0 > 0$ E $C \geq 0$ (DIPENDENTI DA x^0!) TALI CHE $B_{r_0}(x^0) \subseteq A$ E SI HA

$$\|f(x^1) - f(x^2)\|_{\mathbb{R}^m} \leq C \|x^1 - x^2\|_{\mathbb{R}^n} \quad \forall x^1, x^2 \in B_{r_0}(x^0)$$

ESEMPIO SIA $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ LINEARE

ALLORA L È LIPSCHITZIANA

ESISTE $C \geq 0$ TALE CHE

$$\|L[x^1] - L[x^2]\|_{\mathbb{R}^m} \leq C \|x^1 - x^2\|_{\mathbb{R}^n} \quad \forall x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n \quad ?$$

VISTO CHE $\|L[x^1] - L[x^2]\|_{\mathbb{R}^m} = \|L[x^1 - x^2]\|_{\mathbb{R}^m}$ È SUFFICIENTE DIMOSTRARE CHE ESISTE $C \geq 0$ TALE CHE

$$(*) \qquad \|L[x]\|_{\mathbb{R}^m} \leq C \|x\|_{\mathbb{R}^n} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

SIA A LA MATRICE ASSOCIATA A L. PER OGNI $x \in \mathbb{R}^n$ SIA

$$y = L[x] = Ax$$

ALLORA $\forall i = 1, \dots, m \quad y_i = a_i \cdot x = \langle a_i, x \rangle$

DOVE a_i SONO I VETTORI RIGA DI A $\forall i = 1, \dots, m$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

QUINDI

$$\|L[x]\|_{\mathbb{R}^m} = \|Ax\|_{\mathbb{R}^m} = \|y\|_{\mathbb{R}^m} \leq \sqrt{m} \max_{i=1,\dots,m} |y_i| =$$

$$= \sqrt{m} \max_{i=1,\dots,m} |\langle a_i, x \rangle| \leq \underbrace{\sqrt{m} \max_{i=1,\dots,m} \|a_i\|_{\mathbb{R}^n}}_{= C} \|x\|_{\mathbb{R}^n}$$

OSSERVAZIONE LA COSTANTE C OTTIMALE IN $(*)$ È DATA DA

$$C = \|L\| = \sup_{\|v\|_{\mathbb{R}^n} = 1} \|L[v]\|_{\mathbb{R}^m} = \max_{\|v\|_{\mathbb{R}^n} = 1} \|L[v]\|_{\mathbb{R}^m}$$

INFATTI, SIA $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. ALLORA $x = \|x\|_{\mathbb{R}^n} v$, $v \in \mathbb{R}^n$ DIREZIONE $(\|v\|_{\mathbb{R}^n} = 1)$

$$\|L[x]\|_{\mathbb{R}^m} = \|L[\|x\| v]\|_{\mathbb{R}^m} = \|x\|_{\mathbb{R}^n} \|L[v]\|_{\mathbb{R}^m} \leq \boxed{\|L\| \, \|x\|_{\mathbb{R}^n}}$$

(IL CASO $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ È BANALE)

INFINE, SE VALE $(*)$ CON COSTANTE C, SCEGLIAMO $\tilde{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\tilde{v}\|_{\mathbb{R}^n} = 1$

TALE CHE $\|L[\tilde{v}]\|_{\mathbb{R}^m} = \|L\|$

ALLORA

$$\|L\| = \|L[\tilde{v}]\|_{\mathbb{R}^m} \underset{(*)}{\leq} C \|\tilde{v}\|_{\mathbb{R}^n} = C$$

$$\Longrightarrow \quad \|L\| \leq C$$