Spazi vettoriali euclidei (o unitari)

V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (o su $\mathbb{C}$)
V è euclideo se è assegnato un prod. scalare:
forma bilin. simmetrica su V def. positiva:
$\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$
(in partic. $\langle v,v \rangle = 0$).

su $\mathbb{C}$ sesquilin. hermitiana def. pos.

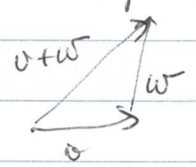
Vale la disuguaglianza di Schwartz:
$\forall\, v, w \in V$
$$\langle v,w \rangle^2 \le \langle v,v \rangle \langle w,w \rangle$$
Dim. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ consideriamo
$$(*)\quad \langle v+\lambda w, v+\lambda w \rangle = \langle v,v \rangle + 2\lambda \langle v,w \rangle + \lambda^2 \langle w,w \rangle$$

Oss. che se $w = 0$ la disug. è vera ed è uguagl.
Supp. allora $w \neq 0$.
L'espres. (*) è un pol. in λ, di 2° grado, ~~che~~ a coeff. reali, che assume valori sempre ≥ 0;
perciò $\Delta \le 0$ (o $\frac{\Delta}{4}$).
Si ha $\frac{\Delta}{4} = \langle v,w \rangle^2 - \langle v,v \rangle \langle w,w \rangle \le 0$.

Inoltre: vale l'uguaglianza, se e solo se v e w sono lin. dipendenti.
Supp. che valga l'uguaglianza, cioè
$\langle v,w \rangle^2 = \langle v,v \rangle \langle w,w \rangle$, con $w \neq 0$.
Allora $\Delta = 0$, dunque (*) si annulla per un particolare valore λ_0 di λ, ossia
$$\lambda_0 = -\frac{\langle v,w \rangle}{\langle w,w \rangle} \qquad \left(-\frac{b}{2a}\right)$$
Di conseguenza anche $\langle v+\lambda_0 w, v+\lambda_0 w \rangle = 0$,

e perciò $v + \lambda w = 0 \Rightarrow v, w$ sono lin. dip.
Viceversa se v, w sono lin. dip. con $w \neq 0$,
$v = \lambda w$
$\langle v,w\rangle = \cancel{\langle \lambda w, \lambda w\rangle} = \cancel{\lambda\langle v,w\rangle}\ \lambda\langle w,w\rangle$
$\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle = \langle \lambda w, \lambda w\rangle\langle w,w\rangle = \lambda^2\langle w,w\rangle$
e quindi
$\langle v,w\rangle^2 = \lambda^2\langle w,w\rangle^2 = \langle v,v\rangle\langle w,w\rangle$. ■

La disug. si può riscrivere $|\langle v,w\rangle| \le \|v\|\,\|w\|$.
Si def. la norma (o lunghezza) di un vettore, associata al prod. scalare $\langle\ ,\ \rangle$, ponendo:
$\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$.
Si ha: 1) $\|v\| \ge 0 \quad \forall v \in V$ e $\|v\| = 0 \iff v = 0$;
2) $\|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\| \quad \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$
3) $\|v + w\| \le \|v\| + \|w\|$: disuguaglianza triangolare;



Dim. 3) $\|v + w\|^2 = \langle v,v\rangle + 2\langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle =$
$= \|v\|^2 + 2\langle v,w\rangle + \|w\|^2 \le$ ~~Schwarz~~ valore ass.
$\le \|v\|^2 + 2|\langle v,w\rangle| + \|w\|^2 \le$ Schwarz
$\le \|v\| + 2\|v\|\,\|w\| + \|w\|^2 =$
$= (\|v\| + \|w\|)^2$. Ora basta estrarre la radice.

In 3. vale $=$ $\iff$ v, w sono paralleli: $w = \lambda v$ con $\lambda > 0$
~~Infatti se $w = \lambda v$, $v + w = (1+\lambda)v$~~
~~$\|v + w\| = |1 + \lambda|\,\|v\|$~~
~~$\|v\| + \|w\| = \|v\| + \|\lambda v\| = \|v\| + |\lambda|\,\|v\| = (1 + |\lambda|)\|v\|$~~
Se vale l'$=$ $\Rightarrow$ vale l'$=$ in Schwarz e dunque sono paralleli. In un triang. un lato è

minore della somma degli altri 2.
V è uno sp. vettoriale normato.
Angolo convesso di 2 vettori non nulli, v, w:
è l'unico angolo ϑ, con $0 \leq \vartheta \leq \pi$ t.c.

$$\cos\vartheta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \, \|w\|}.$$

Vettori ortogonali se $\langle v, w \rangle = 0$ (anche vettore nullo).
Se v, w sono ortogonali, ~~dddd disug.~~ ~~triangolare~~
$$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w \rangle = \|v\|^2 + \cancel{2\langle v, w \rangle} + \|w\|^2$$
teorema di Pitagora.

v, w paralleli, $w = \lambda v$: $\cos\vartheta = \dfrac{\langle v, \lambda v \rangle}{|\lambda| \, \|v\|^2} = \dfrac{\lambda \|v\|^2}{|\lambda| \|v\|^2} =$

$= \pm 1$ $\vartheta = 0$ $\cos\vartheta = 1$, $\lambda > 0$
$\vartheta = \pi$, $\cos\vartheta = -1$, $\lambda < 0$.

Spazio affine euclideo.

E spazio affine su V, sp. vett. reale (o complesso)
E è sp. euclideo se V è sp. vett. euclideo, su V c'è prod. scalare. (analogam. sp. unitario)
Def. una metrica su E, definendo la distanza fra 2 punti $P, Q \in E$:
$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

Si ha:

1) $d(P,Q) \geq 0 \ \forall P,Q \in E$, se $d(P,Q)=0 \iff P=Q$

2) $d(P,Q) = d(Q,P)$

3) $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$ Chasles + disug. triang.

Se vale l'= sono allineati, ma non viceversa: es.

Così E diventa uno spazio metrico e si può def. una topologia, aperti, intorni ecc.

Def. dati due sottoinsiemi di E, S e T, si def. distanza fra S e T il numero reale

$$d(S,T) = \inf_{\substack{P\in S\\ Q\in T}} \{d(P,Q)\}$$

è l'inf di un insieme di numeri reali tutti ≥ 0.

Es. $\mathbb{R}^n$, con prod. scalare standard.

In uno sp. vett. euclideo (o unitario) esistono basi ortogonali e ortonormali, per es. procedim. di Gram-Schmidt.

Un sistema di rif. cartesiano in E ~~si ha~~ è un rif. affine $(O, e_1, \dots, e_n)$ in cui la base è ortonormale. In tal caso $v = \langle v, e_1\rangle e_1 + \dots + \langle v, e_n\rangle e_n$, e il prod. scalare ha forma canonica

Matrice del cambiam. di base tra basi ortonorm. è matrice ortogonale: $M\,{}^tM = {}^tM \cdot M = E_n$.

(o unitaria su $\mathbb{C}$: $M \cdot {}^t\overline{M} = E_n$)

In V, dato $W \subset V$, sottospazio ortogonale, $W^\perp = \{v \in V \mid \langle v, w\rangle = 0 \ \forall w \in W\}$: è un sottospazio di V, $W \cap W^\perp = (0)$: altrim. se $w \in W \cap W^\perp$ $\langle w, w\rangle = 0$.

Inoltre $W + W^{\perp} = V$: preso $v \in V$,
e una base di W: $w_1, \dots, w_r$, ortonormale,
considero $\forall i$ $\dfrac{\langle v, w_i \rangle}{\langle v, v \rangle} = a_v(w_i)$ coeff. di Fourier di w_i risp. a v

e $\langle v, w_i - a_v(w_i) v \rangle = \langle v, w_i \rangle - \dfrac{\langle v, w_i \rangle}{\langle v, v \rangle} \langle v, v \rangle = 0$

si può scrivere $v = w + u$, con $w \in W$, e $u \in W^{\perp}$, cioè t.c. $\langle u, w \rangle = 0$ $\forall w \in W$.
Cerco cioè u, unico, t.c. $v - u \in W$.
Fisso una base ortonormale di W: $w_1, \dots, w_r$; supp. che $w = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r$ sia come richiesto; allora $u = v - w \in W^{\perp}$ e
$\langle v - w, w_i \rangle = 0$ $\forall i$

$$\langle v - \alpha_1 w_1 - \dots - \alpha_r w_r, w_i \rangle = 0$$

$$\langle v, w_i \rangle - \alpha_i \langle w_i, w_i \rangle \Rightarrow \alpha_i = \frac{\langle v, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} = \langle v, w_i \rangle$$

Allora u è necessariamente uguale a
$u = v - \langle v, w_1 \rangle w_1 - \dots - \langle v, w_r \rangle w_r$.
E $v = u + w$ con
$w = \langle v, w_1 \rangle w_1 + \dots + \langle v, w_r \rangle w_r$ e
$u = v - w \in W^{\perp}$.
w = proiez. ortog. di v su W

$W^{\perp}$ supplem. ortogonale di W.

W, W' 2 sottosp. vettoriali di V sono **ortogonali** se $W' \subseteq W^\perp$ ossia $W \subseteq W'^\perp$; può accadere solo se $\dim W' \leq n - \dim W$, cioè $\dim W + \dim W' \leq n$.

Es. W iperpiano, $\dim W^\perp = 1$: retta
$W: a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$
Equaz. verif. ~~dal sottosp.~~ B dai vettori di W
$\Rightarrow (a_1, \dots, a_n) \in W^\perp$, dà la giacitura.
$W^\perp = \langle (a_1, \dots, a_n) \rangle = \langle n \rangle$

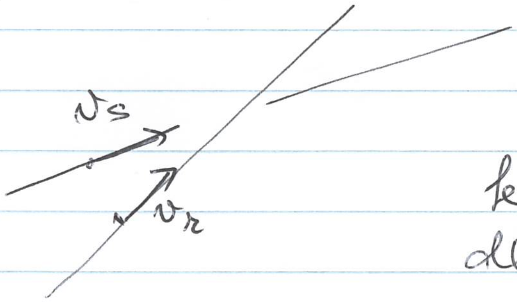
In A sp. euclideo, $S, T \subset A$ sottosp. affini. Si dicono **ortogonali** se lo sono le loro giaciture.

ES. Supp. fissato in A un rif. cartesiano, $H \subset A$ iperpiano affine $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$, $r \subset A$ retta, $v_r(l_1, \dots, l_n)$ vettore di direz.; $H \perp r \iff$ ~~$a_1l_1 + \dots + a_nl_n$~~ $v_r \in W^\perp$ dove $W^\perp = \langle n \rangle$ con $n = (a_1, \dots, a_n) \iff v_r$ e n sono prop.:
$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_n \\ a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} < 2$

Date 2 rette r $v_r = (l_1 \dots l_n)$
s $v_s = (m_1 \dots m_n)$
$r \perp s \iff \langle (l_1 \dots l_n) \rangle$ è ortog. a $\langle (m_1 \dots m_n) \rangle$
$\iff l_1m_1 + \dots + l_nm_n = 0$.

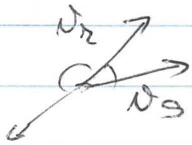
Angolo di 2 rette r, s: uno dei 2 angoli convessi formati da vettori di direz.

di r e s: sono supplementari, con coseni

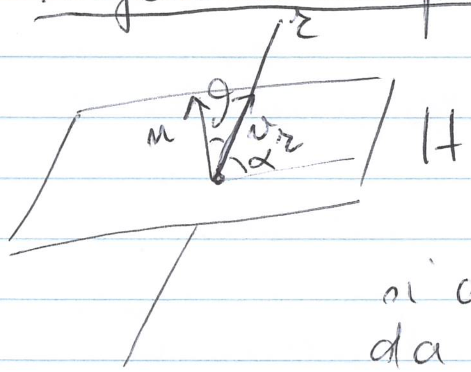


$$\frac{\pm\langle v_r, v_s\rangle}{\|v_r\|\,\|v_s\|} \quad \begin{cases} >0 & \text{acuto} \\ <0 & \text{ottuso} \end{cases}$$

Se voglio angolo completam. det., devo orientare le 2 rette.



Angolo retta-iperpiano



$v_r(l_1, \dots, l_n)$

$n(a_1, \dots, a_n)$

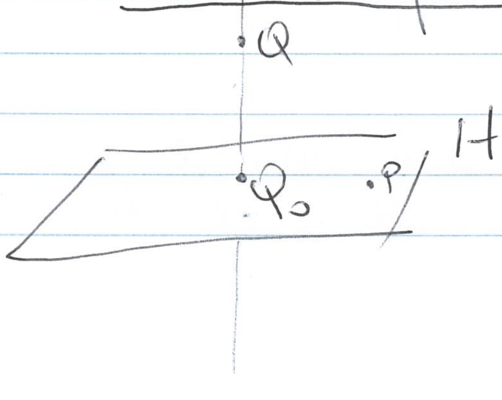
Se r, H non sono ortog. si considera l'angolo acuto ϑ formato da r e una retta ortog. ad H:

$$\cos\vartheta = \frac{|\langle n, v_r\rangle|}{\|n\|\,\|v_r\|}$$

Angolo di H e r è il complem. di ϑ, cioè l'angolo α con $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ t.c. $\alpha = \frac{\pi}{2} - \vartheta$, e dunque $\operatorname{sen}\alpha = \cos\vartheta$: α è acuto.

Distanza punto-iperpiano:

Q punto
H iperpiano



Consid. Q e H; se $Q \in H$ $d(Q,H)=0$.
Se $Q \notin H$, consideriamo la proiezione ortogonale di Q su H: Q_0, ossia $Q_0 = P_U(Q)$, dove $U = W^\perp$ e W è la giacitura di H.

Prop. $d(Q,H) = d(Q, Q_0)$

Dim. Se $P \in H$, qualunque, si ha:

$$\begin{matrix} P - Q_0 \in W \\ Q - Q_0 \in W^\perp \end{matrix} \Rightarrow \langle \overrightarrow{Q_0P}, \overrightarrow{Q_0Q} \rangle = 0.$$

sono ortogonali.

Inoltre $\underbrace{\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ_0} + \overrightarrow{Q_0Q}}_{\text{Chasles}} \Rightarrow \underbrace{\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \|\overrightarrow{Q_0Q}\|^2 + \|\overrightarrow{PQ_0}\|^2}_{\text{Pitagora}}$

$$\Rightarrow d(Q_0, Q) \leq d(P,Q). \quad \blacksquare$$

Per calcolare la distanza $d(Q,H)$, consid. n, versore ortog. ad H: allora si ha $n \parallel \overrightarrow{Q_0Q}$ e perciò

$$|\langle \overrightarrow{Q_0Q}, n \rangle| = \|\overrightarrow{Q_0Q}\| = d(Q,H)$$

D'altra parte: $\langle \overrightarrow{Q_0Q}, n \rangle \underset{P \in H}{=} \underbrace{\langle \overrightarrow{Q_0P}, n \rangle}_{=0} + \langle \overrightarrow{PQ}, n \rangle$,

dunque $d(Q,H) = |\langle \overrightarrow{PQ}, n \rangle|$, dove $P \in H$ è un qualunque punto.

Se $H: a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$

$$n = \frac{(a_1, \dots, a_n)}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$$

Se $P(y_1, \dots, y_n) \in H \Rightarrow a_1y_1 + \dots + a_ny_n = b$.

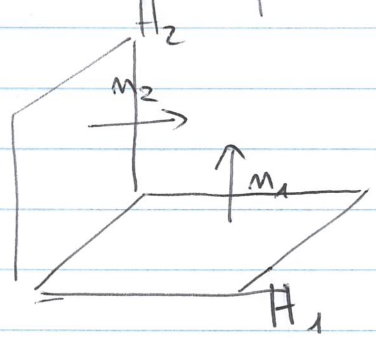
$Q(q_1, \dots, q_n)$

$$d(Q,H) = |\langle \overrightarrow{PQ}, n \rangle| = \left| \left((q_1 - y_1, \dots, q_n - y_n), \frac{(a_1, \dots, a_n)}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{a_1 q_1 + \dots + a_n q_n \overbrace{- a_1 y_1 - \dots - a_n y_n}^{b}}{\sqrt{}} \right| =$$

$$= \left| \frac{a_1 q_1 + \dots + a_n q_n - b}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} \right|$$

Sottospazi perpendicolari.



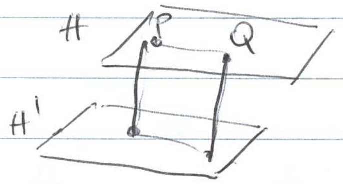
$S, T \subset E$ sottospazi affini
$S = P + W$, $T = Q + U$
Si dicono perpendicolari se $W^\perp$ e $U^\perp$ sono ortogonali, cioè se $W^\perp \subset (U^\perp)^\perp = U$ o $U^\perp \subset (W^\perp)^\perp = W$.
equiv.

Ossia se $\langle w', u' \rangle = 0 \quad \forall\, w' \in W^\perp, u' \in U^\perp$.
Questa nozione ha senso se $\dim W^\perp \leq \dim U$
ossia $n \leq \dim W + \dim U$.
Se $\dim U + \dim W = n$, le nozioni "ortogonali" e "perpendicolari" coincidono.
Es. piani perpendicolari in E^3.
H, H' perp. $\iff \langle n, n' \rangle = 0$
ma non ogni direz. parallela a H è ortog. a ogni direz. parallela a H'.
$H: a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$
$H': a_1' x_1 + \dots + a_n' x_n = b'$ perp $\iff a_1 a_1' + \dots + a_n a_n' = 0$

Angolo convesso tra 2 piani in A^3 è l'angolo conv. tra n_1 e n_2. Angolo di 2 rette orientate.

Distanza tra sottospazi.

- Sottosp. incid.: è 0.
- Sottospazi paralleli: è la distanza di un punto q-que del primo dal secondo



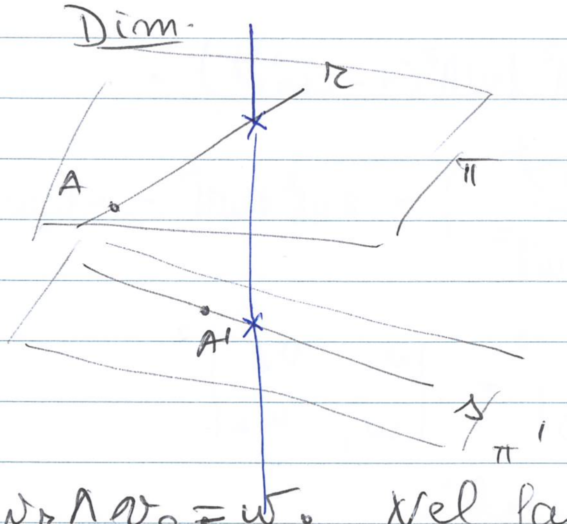
$d(P,H') = d(Q,H')$ perché la distanza si misura sulla per retta ortogonale. (*)

- 2 rette sghembe in E^3:

Date rette sghembe r, s:

1. la distanza tra r e s è uguale alla distanza fra i 2 piani paralleli che le contengono; infatti
2. $\exists !$ retta ~~perpendicolare~~ ortogonale incidente entrambe, in P e Q;
3. la distanza $d(P,Q)$ è uguale a $d(r,s)$.

Dim.



1. $\pi = A + \langle v_r, v_s \rangle$
   $\pi' = A' + \langle v_r, v_s \rangle$

2. la direz. ortog. a r e s è univocam. det: è $\langle v_r, v_s \rangle^\perp$, det da

$v_r \wedge v_s = w$. Nel fascio di piani di sostegno r, c'è 1! piano α parallelo a w (e v_r), dunque ortog. a s. nel fascio di piani di sostegno s, c'è 1! piano β parallelo a w (e v_s) (**), dunque ortog. a r. Allora $\alpha \cap \beta$ è una retta di direz. w, complanare con r e s e non parallela a r né a s, dunque è incidente entrambe.

(*) Distanza fra 2 iperp. paralleli: $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$, $a_1x_1 + \dots + b' = 0$ è $\frac{|b-b'|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$.

(**) cond. di parallelismo piano-vettore è una cond. lineare

La distanza $d(P,Q)$ è uguale alla dist. fra π e π'. $\overline{PQ}$ è il segmento di minima distanza tra r e s.