V sp. vett. euclideo o unitario

$f: V \to V$ endom. ortog./unitario

se f conserva il prod. scalare

$\Updownarrow$

f conserva la norma.

- f è nec. un autom.
- ogni autovalore λ di f ha $|\lambda| = 1$
- autosp. di autovalori distinti sono ortog.

La matrice assoc. a f risp. a una base ortonorm. è ortogonale, risp. unitaria.

$A^{-1} = {}^tA$ $\qquad$ $A^{-1} = {}^t\bar{A}$

$O(n, \mathbb{R}) = O(n)$ $\qquad$ $U(n, \mathbb{C}) = U(n)$

Se A è ortog./unitaria. $|\det A| = 1 \Rightarrow$

sottogruppi $SO(n)$, $SU(n)$

Isometrie di uno sp. aff. euclideo/unitario sono affinità t.c. φ sia un endom. ortog./unitario.

Risp. a un rif. cartesiano:

$Y = AX + C$, con A ortog./unitaria

Se $\varphi \in SO(n)$, o $SU(n)$: isometria <u>diretta</u>

altrim. isometria inversa.

Se f è un'isometria, conserva la distanza:

$$d(f(P), f(Q)) = \|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\| = \|\varphi(\overrightarrow{PQ})\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = d(P,Q).$$
(*)

<u>ES.</u>

1) Ogni traslaz. è isometria: $A = E_n$

2) Isometrie formano gruppo:

$$\begin{array}{c} Isom(E) \subset Aff(E) \\ \cup \\ Isom^+(E) \end{array}$$ isom. dirette

3) $\forall O \in E$ $Isom_O(E)$ isometrie che fissano O; è sottogruppo isomorfo a $O(V)$.

$$Isom_O^+(E) \simeq SO(V)$$

4) Simmetrie di una figura geometrica F: $Isom(F) \subset Isom(E)$

(*) Viceversa, se f è un'affinità che conserva le distanze, è un'isometria. Infatti, φ conserva la norma dei vettori. Sia $v \in V$. Fisso $O \in A$, scrivo $u = \overrightarrow{OP}$. Allora $\|v\| = \|\overrightarrow{OP}\| = d(O,P) = d(f(O), f(P)) = \|\overrightarrow{f(O)f(P)}\| = \|\varphi(\overrightarrow{OP})\| = \|\varphi(v)\|$: φ è ortog./unitario.

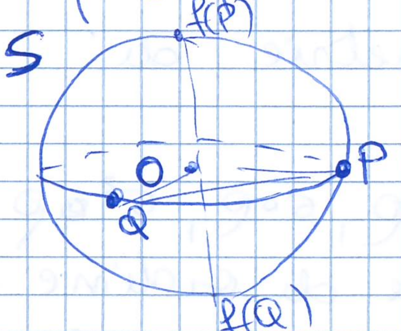
Simmetria di una figura F è un'isometria $f \in Isom(E)$ t.c. $f(F) = F$, ma non lascia necessariamente fissi i punti di F.
$Isom(F) \subset Isom(E)$: sottogruppo, gruppo delle simmetrie di F.
Quanto più grande è $Isom(F)$, tanto più regolare (o simmetrica) è F.

<u>Esempi</u>

1) simmetrie della sfera.
Sia S la sfera di centro O e raggio $r > 0$.
Per def. $S = \{P \in E \mid d(P,O) = r\}$.
Si ha $Isom(S) = Isom_O(E)$ ($\cong O(n)$ infinito)

<u>Dim.</u> Sia $f \in Isom_O(E)$: $f(O) = O$.
Sia $P \in S$: $d(P,O) = r$. Ma $d(P,O) \overset{f \text{ isom.}}{=} d(f(P), f(O)) = d(f(P), O) \Rightarrow f(P) \in S$.

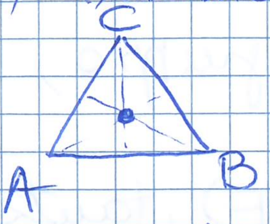
Viceversa sia $f \in Isom(S)$, vogliamo dire che $f(O) = O$



Siano P, Q due punti di S. Per la disug. triangolare:
$d(P,Q) \leq d(P,O) + d(O,Q) = 2r$
e, se $d(P,Q) = 2r$, i 3 punti P, Q, O sono allineati, cioè P, Q sono diametralmente opposti.
Supp. P, Q diametralmente opposti: $d(P,Q) = 2r = d(f(P), f(Q)) \Rightarrow$ anche $f(P), f(Q)$ sono diametralm. opposti. Ora: O è il punto medio del segmento PQ, f è isometria $\Rightarrow f(O)$ è il punto medio

del segmento $f(P)\,f(Q)$, dunque $f(O)=O$. ∎

2) simmetrie di un triangolo equilatero T



Isometrie di E^2 che mandano T in T.

- Rotazione di $\frac{2}{3}\pi$, σ, intorno a O centro di T (baricentro = incentro...), un terzo di giro

σ: $A \to B \to C \to A$ (verso antiorario)

- Rotazione di $\frac{4}{3}\pi$: σ^2

σ^2: $A \to C \to B \to A$

- Riflessione di asse uno dei lati: un vertice resta fisso

ρ:	$A \to A$	$B \leftrightarrow C$
$\sigma^2 \circ \rho$	$B \to B$	$A \leftrightarrow C$
$\sigma \circ \rho$:	$C \to C$	$A \leftrightarrow B$

Non ci sono altre simmetrie di T (vedremo)

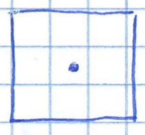
$\mathrm{Isom}\, T = \{ id_E, \sigma, \sigma^2, \rho, \sigma\circ\rho, \sigma^2\circ\rho \}$
$= D_6$ gruppo diedrale di ordine 6

Contiene 2 elem. di ordine 3: σ, σ^2
3 — " — 2: $\rho, \sigma\rho, \sigma^2\rho$
1 — " — 1

È generato da σ e ρ, con le relaz.
$\sigma^3 = 1$, $\rho^2 = 1$.

3) Considero un poligono regolare di n lati Π_n.

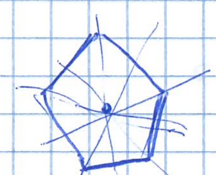
$Isom(\Pi_n) = D_{2n}$ gruppo diedrale con $2n$ elem. Segue dalla classif. delle isom. del piano.



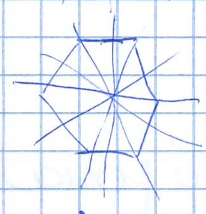
$n=4$ $\quad\sigma$ rotaz. di $\frac{2\pi}{4}$, $\sigma^4=1$

ρ riflessione con asse per O

$\rho^2=1$, ce ne sono 4



$n=5$ $\quad\sigma$ $\frac{2\pi}{5}$, 5 riflessioni ecc.



Def. Due figure F, F' sono congruenti se $\exists$ un'isometria $f: E \to E$ t.c. $F' = f(F)$.

Proprietà euclidee = proprietà che si conservano per congruenza: es. distanza, angolo. Le prop. affini si conservano per congruenza, dunque sono anche euclidee, ma non viceversa.

f con isometria: rombo $\to$ rombo

quadrato $\to$ quadrato

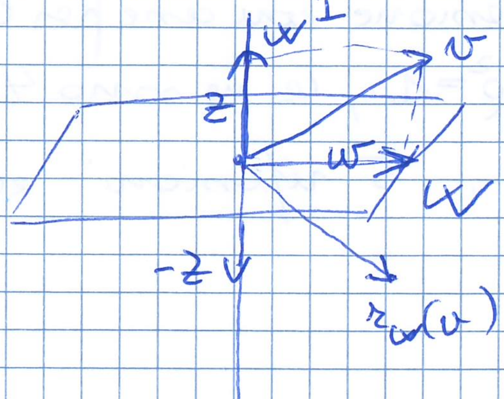
rettangolo $\to$ rettangolo, ecc.

V sp. vett. euclideo
$W \subset V$ iperpiano (vettoriale)
$V = W \oplus W^\perp$

Def. La riflessione o simmetria ortog. risp. a W è $r_W : V \longrightarrow V$

$$v = w + z \longrightarrow w - z$$

dove $w \in W$, $z \in W^\perp$



Oss. $r_W \circ r_W = id_V$
$\qquad \| $
$\quad r_W^2$

Prop r_W è un autom. ortogonale inverso.

Dim. a) r_W è un'appl. lineare

$v = w + z, \quad v' = w' + z' \Rightarrow v + v' = (w + w') + (z + z')$

$r_W(v) = w - z, \quad r_W(v') = w' - z'$

$r_W(v + v') = (w + w') - (z + z') = (w - z) + (w' - z')$

$r_W(\lambda v) = r_W(\lambda w + \lambda z) = \lambda w - \lambda z \ldots$

b) r_W conserva la norma

$\|v\|^2 = \|w + z\|^2 = \|w\|^2 + 2\underbrace{\langle w, z\rangle}_{=0} + \|z\|^2$

$\|r_W(v)\|^2 = \|w - z\|^2 = \|w\|^2 - 2\underbrace{\langle w, z\rangle}_{=0} + \|z\|^2$

c) r_W è inversa

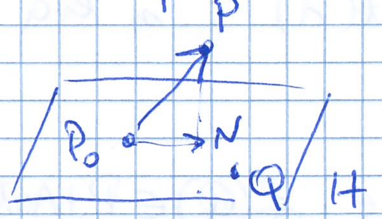
Fisso una base ortonorm. t.c. $v_1, \ldots, v_{n-1} \in W$ e $v_n \in W^\perp$. $r_W(v_i) = \begin{cases} v_i & \text{se } i = 1, \ldots, n-1 \\ -v_i & \text{se } i = n \end{cases}$

Allora $M_B(r_W) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$, $\det(r_W) = -1$.

$\Rightarrow r_W \in O^-(V)$.

<u>Oss</u>. $W, W^\perp$ sono i 2 autospazi di autovalori $1, -1$.

Ora nello spazio euclideo E su V,
Consid. H, iperp. affine di giacitura W.
La riflessione rispetto ad H: ρ_H, è l'isometria che fissa $P_0 \in H$ e ha r_W come appl. lin. soggiacente: $\rho_H(P_0) = P_0$
(ρ_H è det da una coppia di punti corrisp. e dalla sua parte lineare).



Oss. che $\forall Q \in H$ si ha $\rho_H(Q) = Q$.

Infatti: $\forall P \in E$ $\overrightarrow{\rho_H(P_0)\rho_H(P)} = r_W(\overrightarrow{P_0P})$.
Ora decomp. $\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{P_0N} + \overrightarrow{NP}$ con $\overrightarrow{P_0N} \in W, \overrightarrow{NP} \in W^\perp$.
Allora $r_W(\overrightarrow{P_0P}) = r_W(\overrightarrow{P_0N} + \overrightarrow{NP}) = \overrightarrow{P_0N} - \overrightarrow{NP} =$
$= \overrightarrow{P_0N} + \overrightarrow{NP'}$, dove P' è il simmetrico di P rispetto a N, perché $\overrightarrow{NP'} = \overrightarrow{PN}$; N proiez. ortog. di P su H.
Allora $\rho_H(P) = \rho_H(P_0) + r_W(\overrightarrow{P_0P}) = P_0 + \overrightarrow{P_0P'} = P'$.
In partic. se $P \in H$, $\rho_H(P) = P$.

<u>Def</u>. $f: A \to A$ affinità
$S \subset A$ sottosp. affine è <u>invariante</u> o fisso per f se $f(P) = P$ $\forall P \in S$.

S è detto <u>stabile</u> per f se $f(S) \subseteq S$, ossia $f(S) = S$ perché $\dim S = \dim f(S)$.

Se f è invariante è stabile, ma non viceversa.

<u>Prop.</u> Sia $f: A \to A$ un'affinità, $P_0 \in A$ un punto fisso di f. Allora:

1) Se λ è un autovalore di φ, considero l'autospazio $Aut(\lambda)$ e il sottosp. aff. $S = P_0 + Aut(\lambda)$: allora S è stabile per f.

2) se inoltre $\lambda = 1$, S è fisso per f.

Dim. sia $Q \in S$; se $\overrightarrow{P_0Q} \in Aut(\lambda)$, si ha

$$\varphi(\overrightarrow{P_0Q}) = \lambda \overrightarrow{P_0Q} \in Aut(\lambda)$$

$$\overrightarrow{f(P_0)f(Q)} = \overrightarrow{P_0 f(Q)}, \text{ dunque } f(Q) \in \underbrace{P_0 + Aut(\lambda)}_{= S}.$$

Perciò $f(S) \subseteq S$.

Se $\lambda = 1$: $\varphi(\overrightarrow{P_0Q}) = \overrightarrow{P_0Q}$, $\varphi(\overrightarrow{P_0Q}) = \overrightarrow{P_0 f(Q)}$ $\Rightarrow Q = f(Q)$

e quindi S è invariante.

<u>Cor.</u> Nella riflessione rispetto all'iperp. H, H è invariante; tutte le rette ortog. ad H sono stabili.

ISOMETRIE DI E^1.

ISOMETRIE DI E^2.