

esercizi sulle variabili aleatorie continue 1

1. Sia X una variabile aleatoria continua la cui densità è data da

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2), & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove C è una costante.

- a) Qual è il valore di C ?
b) Determinare $P(X > 1)$.
2. Il tempo di vita di un dato tipo di pile per la radio è una variabile aleatoria la cui densità è data da

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 100 \\ \frac{100}{x^2}, & x > 100 \end{cases}$$

Qual è la probabilità che esattamente 2 pile della radio su 5 debbano essere sostituite entro le 150 ore di attività? Si supponga che il tempo di vita di ciascuna pila sia indipendentemente dal tempo di vita delle altre pile.

3. Sia X una variabile aleatoria la cui densità di probabilità è così definita:

$$f(x) = \begin{cases} (n+1)x^n, & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $n \in \mathbb{N}$.

- a) Si calcoli $P\{X^2 < \frac{1}{4}\}$.

Si ricordi che

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx \quad \text{e} \quad \text{Var}[X] = E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 f(x) dx.$$

- b) Si calcoli $E[X]$ e $\text{Var}[X]$.

4. Un punto è scelto a caso su un intervallo di lunghezza L . Qual è la probabilità che il rapporto tra la lunghezza dell'intervallo corto e la lunghezza dell'intervallo lungo sia meno di $1/4$?
5. a) Sia Y una variabile aleatoria uniforme su intervallo $(0, 5)$, trovate la probabilità che $Y^2 - Y - 2 > 0$;
b) Qual è la probabilità che il polinomio $p(x) = 4x^2 + 4Yx + Y + 2 = 0$ abbia tutte le radici reali? Abbia due radici diverse?
6. a) Il comune vuole dislocare una stazione dei vigili del fuoco lungo una strada di lunghezza L . Supponiamo che un fuoco inizi in un punto dell'intervallo $(0, L)$ scelto in maniera uniforme. Dove si deve posizionare la stazione in modo tale che, la distanza media dalla stazione al fuoco sia minima, cioè trovare $l \in [0, L]$ in modo tale che $E[|X - l|]$ sia minimo, dove X è una variabile distribuita uniformemente su $(0, L)$?
b) Supponiamo ora che la strada sia un intervallo infinito $(0, \infty)$. Se la distanza da zero al fuoco è una variabile esponenziale con il parametro λ , dove si deve posizionare la stazione in modo tale che, la distanza media dalla stazione al fuoco sia minima?
7. Una pompa di benzina si rifornisce di carburante una volta a settimana. La quantità di benzina (in ettolitri) venduta ogni settimana dalla pompa è descritta da una variabile aleatoria X con la seguente densità di probabilità:

$$f(x) = \begin{cases} 6(1-x)^5, & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quanti ettolitri di carburante devono acquistare ogni settimana affinché la probabilità di esaurire le scorte sia pari 0.1?