

VALUE-AT-RISK: HISTORICAL SIMULATION

- ▷ approccio non parametrico: **historical simulation**
 - ★ spesso si usa una variante che utilizza una media dei due valori $l_{(\lfloor \alpha m \rfloor)}, l_{(\lfloor \alpha m \rfloor + 1)}$ (se diversi), dove $\lfloor x \rfloor =$ massimo intero minore o uguale a x
 - ★ si pone

$$\text{VaR}_\alpha^R = (1 - \gamma)l_{(\lfloor \alpha m \rfloor)} + \gamma l_{(\lfloor \alpha m \rfloor + 1)}$$
 dove $0 \leq \gamma \leq 1$ è il peso
 - ★ classica scelta: $\gamma = \alpha m - \lfloor \alpha m \rfloor$
 - ★ per $\gamma = 0$ se αm intero, $\gamma = 1$ se αm non intero, si ritorna alla definizione precedente

330

VALUE-AT-RISK: HISTORICAL SIMULATION

- ▷ Per calcolare il VaR con ragionevole precisione, m deve essere sufficientemente grande; ad esempio, per $\alpha = 99\%$ non ha senso usare meno di $m = 100$
- ▷ tipicamente si usa una finestra includente gli m rendimenti più recenti; scelte tipiche per rendimenti giornalieri
 - ★ $m = 250$ (un anno)
 - ★ $m = 1000$ (quattro anni)
- ▷ La scelta di m influenza il VaR
- ▷ m troppo elevato rende il VaR insensibile avendo ogni osservazione un peso basso
- ▷ al muoversi della finestra, il VaR ha dei movimenti improvvisi (salti) dovuti all'**inclusione di nuove osservazioni/esclusione di vecchie osservazioni**

331

VALUE-AT-RISK: HISTORICAL SIMULATION

▷ ESEMPIO: $l_1 = 1\%$, $l_2 = -2\%$, $l_3 = 0\%$, $l_4 = -1\%$, $l_5 = 2.5\%$, $l_6 = -1\%$, $l_7 = 3\%$, $l_8 = 0.5\%$, $l_9 = 1\%$, $l_{10} = 4\%$

★ statistica d'ordine:

$$l_{(1)} = -2\%, l_{(2)} = l_{(3)} = -1\%, l_{(4)} = 0\%, l_{(5)} = 0.5\%,$$

$$l_{(6)} = l_{(7)} = 1\%, l_{(8)} = 2.5\%, l_{(9)} = 3\%, l_{(10)} = 4\%$$

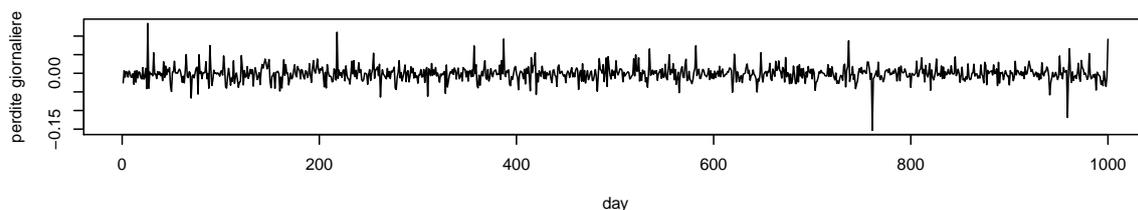
si trova $\text{VaR}_{0.9} = l_{(9)} = 3\%$

- ★ se $l_{10} = 10\%$ invece di 4% , il VaR non cambia \rightsquigarrow il VaR è “**blind to the tail**”, non dà informazioni sulle perdite superiori al VaR
- ★ Se si usa una finestra di 10 osservazioni e l_{11} è la nuova perdita, mentre esce $l_1 = 1\%$ dal campione: se $l_{11} \leq 3\%$ allora $\text{VaR}_{0.9} = 3\%$; se $3\% < l_{11} \leq 4\%$ allora $\text{VaR}_{0.9} = l_{11}$; se $l_{11} > 4\%$ allora $\text{VaR}_{0.9} = 4\%$

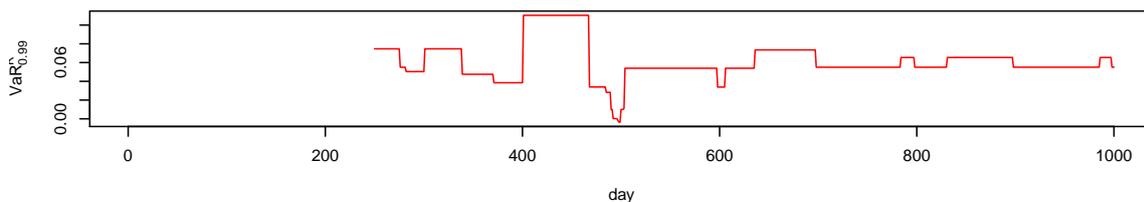
332

VALUE-AT-RISK: HISTORICAL SIMULATION

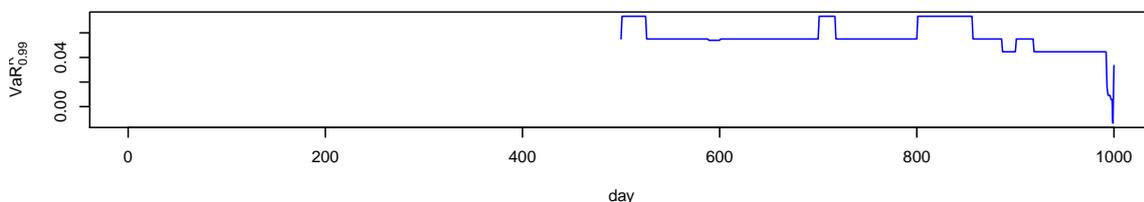
historical VaR: perdite simulate da distribuzione t



historical VaR: rolling window – 250 giorni



historical VaR: rolling window – 500 giorni



333

WEIGHTED HISTORICAL VALUE-AT-RISK (WHVaR)

- ▷ Per rimediare alla mancanza di robustezza/eccessiva sensibilità dell' historical VaR, si usa uno schema di pesi
- ★ nel VaR, tutte le osservazioni hanno lo stesso peso
 - ★ nel WHVaR, si usano pesi esponenzialmente decrescenti a seconda di quanto recente è l'osservazione: date le perdite l_1, \dots, l_m , il peso di l_i è

$$w_i = \frac{\eta^{m-i}(1-\eta)}{1-\eta^m}$$

con $0 < \eta < 1$ (tipicamente $\eta > 0.9$)

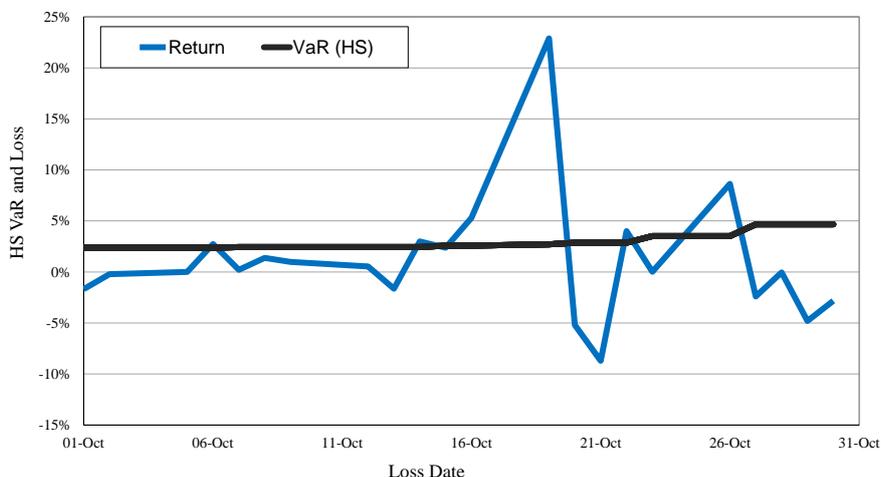
- ★ in questo modo l'osservazione più vecchia che esce dal campione ha poco peso, mentre ha peso massimo la più recente
- ★ il ruolo di m è meno importante
- ★ si calcola poi il percentile della distribuzione (tenendo conto dei pesi)

334

WEIGHTED HISTORICAL VALUE-AT-RISK

Figure 2.2 A:
Historical Simulation VaR and Daily Losses from
Long S&P500 Position, October 1987

15

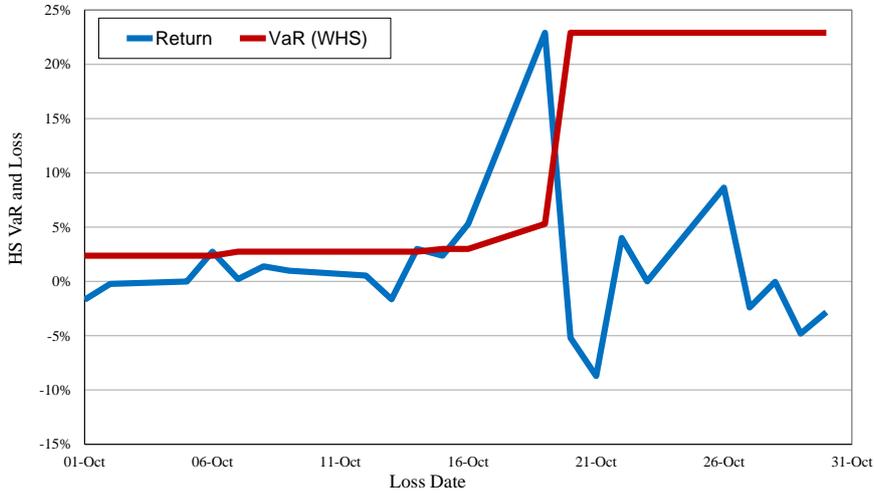


335

WEIGHTED HISTORICAL VALUE-AT-RISK

16

Figure 2.2 B:
 Historical Simulation VaR and Daily Losses from
Long S&P500 Position, October 1987



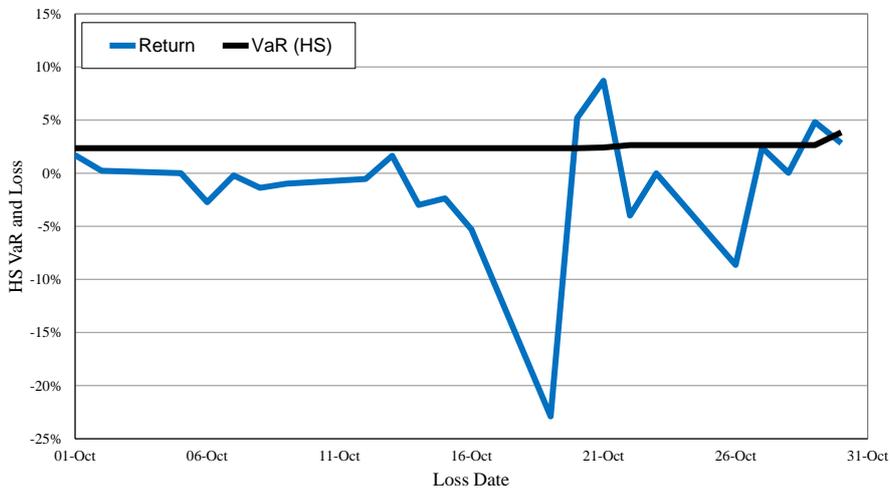
Elements of Financial Risk Management Second Edition © 2012 by Peter Christoffersen

336

WEIGHTED HISTORICAL VALUE-AT-RISK

17

Figure 2.3 A:
 Historical Simulation VaR and Daily Losses from
Short S&P500 Position, October 1987



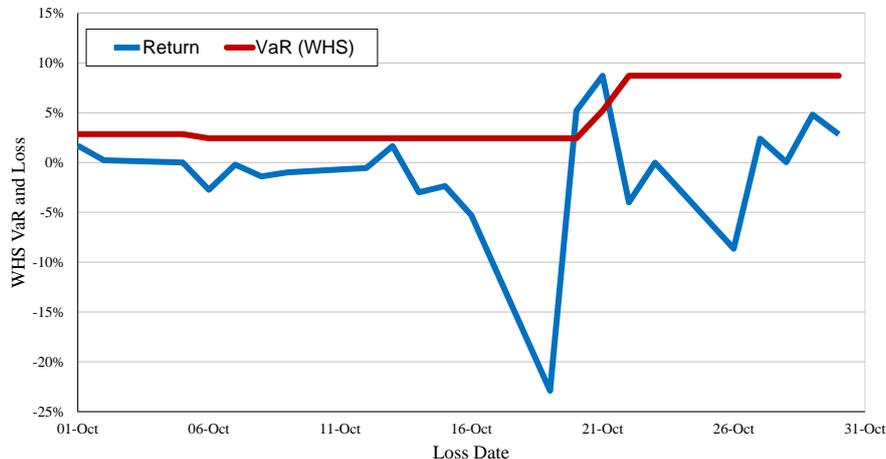
Elements of Financial Risk Management Second Edition © 2012 by Peter Christoffersen

337

WEIGHTED HISTORICAL VALUE-AT-RISK

18

Figure 2.3 B:
Weighted Historical Simulation VaR and Daily Losses
from **Short** S&P500 Position, October 1987



Elements of Financial Risk Management Second Edition © 2012 by Peter Christoffersen

338

VALUE-AT-RISK: BOOTSTRAP

- ▷ problemi della simulazione storica:
 - * a differenza del VaR parametrico, non si può estendere facilmente il caso uniperiodale a quello n -periodale
 - * si potrebbe applicare il metodo direttamente a periodi di lunghezza n al costo di una perdita notevole di dati (e.g. con 250 rendimenti giornalieri ci sono solo 12 rendimenti mensili)
- ▷ alternativa: **bootstrap** non parametrico (Efron (1979))
 - * tecnica introdotta in statistica inferenziale per sfruttare campioni limitati
 - * idea: (ri)estrarre **con reinserimento** un campione da quello dato, di uguale lunghezza
 - * calcolare la statistica di interesse sul nuovo campione
 - * ripetere la procedura un numero elevato di volte
 - * si ottiene così la distribuzione campionaria della statistica di interesse \Rightarrow media, intervalli di confidenza, ...

339

VALUE-AT-RISK: BOOTSTRAP

▷ bootstrap VaR, 1 periodo

1. è dato un campione r_1, \dots, r_m di rendimenti uniperiodali (e.g. giornalieri)
2. si costruisce un nuovo campione di medesima lunghezza m via **estrazione con rimpiazzo**, indicato con $\hat{r}_{1,1}, \dots, \hat{r}_{1,m}$
3. si calcola (via **simulazione storica**) il Value-at-Risk dal nuovo campione, indicato con $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,1}^R$
4. si ripetono 2. e 3. un numero scelto M di volte, ottenendo M campioni di lunghezza m
5. da ognuno degli M campioni si estrae il Value-at-Risk, indicati con $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,1}^R, \dots, \widehat{\text{VaR}}_{\alpha,M}^R$
6. si calcola poi la **stima di bootstrap** del VaR via

$$\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,\text{bootstrap}}^R = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \widehat{\text{VaR}}_{\alpha,i}^R$$

340

VALUE-AT-RISK: BOOTSTRAP

▷ bootstrap VaR, 1 periodo

- ★ si può usare il campione di bootstrap dei Value-at-Risk per costruire **intervalli di confidenza** per $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,\text{bootstrap}}^R$
 - ★ si calcolano i Value-at-Risk per ogni campione bootstrap come in 1.-5., $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,1}^R, \dots, \widehat{\text{VaR}}_{\alpha,M}^R$
 - ★ si sceglie un livello di confidenza α' , non collegato con il livello di confidenza del Value-at-Risk α !
 - ★ si calcolano poi il $(1 - \alpha')/2$ e il $(1 + \alpha')/2$ quantili della distribuzione $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,1}^R, \dots, \widehat{\text{VaR}}_{\alpha,M}^R$
- ▷ il metodo funziona bene se il campione iniziale non è **troppo piccolo** e se proviene da una distribuzione **ragionevolmente simmetrica**

341

VALUE-AT-RISK: BOOTSTRAP

- ▷ osservazioni sul metodo bootstrap
 - ★ ogni ricampionamento del campione originale ne genera uno **potenzialmente diverso**
 - ★ il Value-at-Risk calcolato su ogni ricampionamento sarà (potenzialmente) diverso da quello del campione originale
 - ★ in ogni ricampionamento, una data osservazione del campione originale potrà apparire più volte, o non apparire per niente
 - ★ una osservazione che appare ripetuta nel campione originale sarà ricampionata con probabilità proporzionale alla sua frequenza
 - ★ l'effetto di questa distorsione — i VaR di ogni bootstrap differiscono da quello empirico calcolato sul campione originale — se la dimensione campionaria m è sufficientemente grande
- ▷ idea del metodo bootstrap: la variabilità delle stime di bootstrap intorno alla stima empirica è simile/mima la variabilità della stima empirica intorno al valore “vero”
- ▷ per campioni di dimensione m ragionevolmente elevata, la distribuzione empirica è vicina alla popolazione \Rightarrow il bootstrap (campionare con rimpiazzo dalla distribuzione empirica) non differisce molto dal campionamento casuale dalla popolazione

342

VALUE-AT-RISK: BOOTSTRAP

- ▷ **bootstrap VaR, n periodi:** $(t, T) = (t, t + n\Delta)$
 1. è dato un campione r_1, \dots, r_m di rendimenti uniperiodali (e.g. giornalieri)
 2. si costruisce un nuovo campione di lunghezza n via **estrazione con rimpiazzo**, indicato con $\hat{r}_{1,1}(1), \dots, \hat{r}_{1,1}(n)$
 3. si ottiene un rendimento sul periodo $(t, t + n\Delta)$ via

$$\hat{r}_{1,1}(t, t + n\Delta) = \sum_{j=1}^n \hat{r}_{1,1}(j)$$

4. si ripetono 2.-3. m volte in maniera da ottenere un campione $\hat{r}_{1,1}(t, t + n\Delta), \dots, \hat{r}_{1,m}(t, t + n\Delta)$ di rendimenti n -periodali
5. si calcola (via **simulazione storica**) il Value-at-Risk dal campione multi periodale, indicato con $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,1}^R$
6. si ripetono 2.-4. un numero scelto M di volte, ottenendo M stime di Value-at-Risk, indicati con $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,1}^R, \dots, \widehat{\text{VaR}}_{\alpha,M}^R$
7. si calcola poi la **stima di bootstrap** del VaR via

$$\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,\text{bootstrap}}^R = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \widehat{\text{VaR}}_{\alpha,i}^R$$

343

VALUE-AT-RISK: BOOTSTRAP

- ▷ **bootstrap VaR, n periodi:** $(t, T) = (t, t + n\Delta)$
 - ★ similmente si aggiungono intervalli di confidenza
 - ★ l'ipotesi fondamentale è che i rendimenti siano indipendenti su periodi diversi \Rightarrow estrazioni indipendenti dallo stesso campione
 - ★ lo schema di base può essere modificato per includere **correlazione seriale** dei rendimenti e **volatilità stocastica** (e.g. tramite process GARCH = Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity)

344

VALUE-AT-RISK: BOOTSTRAP

- ▷ vantaggi:
 - ★ procedura non parametrica (**model-free**) \Rightarrow non richiede stima di parametri e scelta di un modello
 - ★ procedura semplice da implementare
 - ★ implicitamente include asimmetria e code pesanti
 - ★ si estende in maniera relativamente semplice al caso di autocorrelazione e/o volatilità stocastica
- ▷ svantaggi:
 - ★ molto sensibile alla lunghezza del data set: tipicamente si usano da 250 a 1000 osservazioni giornaliere (da 1 a 4 anni); per ottenere la stessa accuratezza del metodo parametrico sono richiesti campioni di dimensioni anche superiori
 - ★ \Rightarrow serie temporali potrebbero non essere disponibili
 - ★ lunghe serie sono richieste per includere eventi estremi
 - ★ “Ghost feature”: il metodo reagisce lentamente a variazioni nel rischio di mercato
 - ★ nel caso n -periodale la procedura può essere computazionalmente pesante

345

VALUE-AT-RISK: LIMITI

- ▷ il Value-at-Risk non è **subadittivo**: esistono perdite L_1, L_2 tali che $\text{VaR}_\alpha^{L_1+L_2} > \text{VaR}_\alpha^{L_1} + \text{VaR}_\alpha^{L_2} \Rightarrow$ non è **coerente** (vedi in seguito)
- ▷ il Value-at-Risk **non descrive le perdite nella coda sinistra** della distribuzione del P&L
- ▷ il Value-at-Risk non è **robusto**
- ▷ di conseguenza diverse misure di rischio alternative al Value-at-Risk sono state proposte \Rightarrow **Expected-Shortfall** viene usata spesso in pratica come alternativa al Value-at-Risk

346

VALUE-AT-RISK E SUBADDITIVITÀ

- ▷ Value-at-Risk soddisfa tutte le proprietà elencate tranne **subaddittività (e convessità)** \Rightarrow esistono L_1, L_2 tali che

$$\text{VaR}_\alpha^{L_1+L_2} > \text{VaR}_\alpha^{L_1} + \text{VaR}_\alpha^{L_2}$$

aggregare due rischi richiede più capitale che detenere i due rischi separatamente

- ★ ESEMPIO: due bond soggetti a rischio di default, con uguali caratteristiche
- ★ prezzo 90
- ★ valore facciale 100
- ★ perdita totale in caso di default
- ★ probabilità di default 4%
- ★ il default del primo e secondo bond sono indipendenti
- ★ riesce $\text{VaR}_{95\%}^{L_1} = \text{VaR}_{95\%}^{L_2} = -10$ mentre $\text{VaR}_{95\%}^{L_1+L_2} = 80$
- ▷ problema: la distribuzione della perdita è fortemente asimmetrica

347

VALUE-AT-RISK E SUBADDITIVITÀ

- ▷ la proprietà di subadditivita vale se L_1, L_2 è **normale bivariata** e $\alpha > 50\%$
- ▷ Tale proprietà si estende ad altre famiglie di distribuzioni multivariate, in particolare alle distribuzioni ellittiche
 - ★ generalizzano al caso multivariato le proprietà di simmetria della normale
 - ★ hanno in comune diverse proprietà con la normale multivariata:
 - ★ distribuzioni **marginali** di distribuzioni ellittiche sono ancora ellittiche
 - ★ trasformazioni **affini** di distribuzioni ellittiche sono ancora ellittiche
 - ★ distribuzioni **condizionate** di distribuzioni ellittiche sono ancora ellittiche

348

VALUE-AT-RISK E SUBADDITIVITÀ

- ▷ un vettore $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_d]^\top$ ha **distribuzione sferica** se

$$UX \sim X$$

per ogni **matrice ortogonale** U (cioè tale che $UU^\top = U^\top U = I_d$)

- ★ se \mathbf{X} ha densità congiunta f , allora è sferica se e solo se

$$f(\mathbf{x}) = \tilde{f}(x_1^2 + \dots + x_d^2), \text{ per ogni } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$$

dove $\tilde{f}: [0, +\infty) \rightarrow [0, \infty)$, cioè la densità è costante sulle sfere.

- ★ t_ν multivariata, con densità

$$f(\mathbf{x}) = C_\nu \left(1 + \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}{\nu} \right)^{-(d+\nu)/2}$$

- ★ logistica multivariata, con densità

$$f(\mathbf{x}) = C_\nu \frac{\exp(-\mathbf{x}^\top \mathbf{x})}{[1 + \exp(-\mathbf{x}^\top \mathbf{x})]^2}$$

349

VALUE-AT-RISK E SUBADDITIVITÀ

▷ un vettore $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_d]^T$ ha **distribuzione ellittica** se

$$\mathbf{X} \sim \mu + AY$$

dove $\mu \in \mathbb{R}^d$ e A è una matrice $d \times d$

★ **subadditività del VaR** : se L_1, L_2 sono perdite con distribuzione ellittica, allora per $\alpha \geq 0.5$

$$\text{VaR}_\alpha^{L_1+L_2} \leq \text{VaR}_\alpha^{L_1} + \text{VaR}_\alpha^{L_2}$$

★ **Value-at-Risk è consistente con la varianza** se L_1, L_2 sono perdite con distribuzione ellittica, allora

$$\text{VaR}_\alpha^{L_1} - E[L_1] \leq \text{VaR}_\alpha^{L_2} - E[L_2] \Leftrightarrow \text{var}(L_1) \leq \text{var}(L_2)$$

↔ ottimizzazione di portafoglio media-varianza o media-VaR coincidono

350

VALUE-AT-RISK “BLIND TO THE TAIL”

▷ Il Value-at-Risk non descrive le perdite nella coda sinistra della distribuzione del P&L

- ★ il VaR_α stabilisce solo il livello della perdita che non viene superato con probabilità (almeno) pari ad $\alpha \Rightarrow$ non dà informazioni sul livello delle perdite se queste superano VaR_α
- ★ due perdite L_1, L_2 possono avere lo stesso Value-at-Risk, $\text{VaR}_\alpha^{L_1} = \text{VaR}_\alpha^{L_2}$ mentre le perdite in eccesso possono essere diverse

$$E[L_1|L_1 \geq \text{VaR}_\alpha^{L_1}] \neq E[L_2|L_2 \geq \text{VaR}_\alpha^{L_2}]$$

★ ESEMPIO:

$$L_1 = \begin{cases} -100 & \text{con prob. } 50\% \\ 50 & 46\% \\ 100 & 4\% \end{cases}, \quad L_2 = \begin{cases} -100 & \text{con prob. } 50\% \\ 50 & 46\% \\ 1000 & 4\% \end{cases}$$

$$\text{VaR}_{95\%}^{L_1} = \text{VaR}_{95\%}^{L_2} = 50,$$

$$E[L_1|L_1 \geq \text{VaR}_{95\%}^{L_1}] = 54, \quad E[L_2|L_2 \geq \text{VaR}_{95\%}^{L_2}] = 126$$

351

EXPECTED SHORTFALL

- ▷ **Expected shortfall**: dato $P\&L = -L$ con $E|L| < +\infty$ ed un livello di confidenza $0 < \alpha < 1$

$$ES_{\alpha}^{P\&L} = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 VaR_{\beta}^{P\&L} d\beta$$

- ★ a volte chiamato **Tail-Value-at-Risk**, $TVaR_{\alpha}^{P\&L}$
- ★ media dei capitali che garantiscono una probabilità almeno pari a α di assorbire le perdite
- ★ per definizione, ES riflette il peso della coda della distribuzione oltre VaR

352

EXPECTED SHORTFALL

- ▷ proprietà dell'Expected shortfall
- ★ è sub-additiva e coerente
 - ★ $ES_{\alpha} \geq VaR_{\alpha}$, ES_{α} funzione nondecreciente e continua di α
 - ★ limiti:

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} ES_{\alpha} = E[L]$$

$$\lim_{\alpha \uparrow 1} ES_{\alpha} = \text{massimo di } L$$

- ▷ Tuttavia, VaR esiste sempre, ES richiede speranza finita

353

EXPECTED SHORTFALL

▷ Expected shortfall può essere rappresentato al modo seguente:

$$\begin{aligned} \text{ES}_\alpha^{\text{P\&L}} &= \frac{1}{1-\alpha} \{ E[L; L \geq \text{VaR}_\alpha^{\text{P\&L}}] + \\ &+ \text{VaR}_\alpha^{\text{P\&L}} (1 - \alpha - \text{Prob}[L \geq \text{VaR}_\alpha^{\text{P\&L}}]) \} \end{aligned}$$

dove $E[X; A] = E[X1_A]$

▷ se la distribuzione di L è **continua**, $\text{Prob}[L \geq \text{VaR}_\alpha^{\text{P\&L}}] = 1 - \alpha$ e quindi

$$\text{ES}_\alpha^{\text{P\&L}} = E[L|L \geq \text{VaR}_\alpha^{\text{P\&L}}] = E[L|L > \text{VaR}_\alpha^{\text{P\&L}}]$$

⇒ ES = **perdite attese sopra il VaR**

354

EXPECTED SHORTFALL

▷ approccio parametrico: $R \sim N(\mu, \sigma^2)$ e quindi
 $L = -R \sim N(-\mu, \sigma^2)$

★ $\text{VaR}_\alpha^R = -(\mu + \sigma\Phi^{-1}(1 - \alpha))$

★ caso normale standard: $\mu = 0, \sigma^2 = 1, \text{VaR}_\alpha^R = \Phi^{-1}(\alpha)$, se
 $\phi(z) = (2\pi)^{-1/2}e^{-z^2/2}$ è la densità della normale standard

$$\text{ES}_\alpha^R = E[L|L \geq \text{VaR}_\alpha^R] = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{+\infty} z\phi(z)dz = \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}$$

★ nel caso generale, $L \sim N(-\mu, \sigma^2)$

$$E[L|L \geq \text{VaR}_\alpha^R] = -\mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}$$

355

EXPECTED SHORTFALL

- ▷ approccio parametrico: se $R \sim \mu + \sigma t_\nu$ dove t_ν è t di student con $\nu > 1$ gradi di libertà, densità f_ν e funzione di ripartizione F_ν ; quindi $L = -R \sim -\mu + \sigma t_\nu$

★ un calcolo diretto mostra che

$$ES_\alpha^R = -\mu + \sigma \frac{f_\nu(F_\nu^{-1}(\alpha))}{1-\alpha} \frac{\nu + (F_\nu^{-1}(\alpha))^2}{\nu - 1}$$

α	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.9975	0.999
normal	0.30	0.36	0.42	0.48	0.53	0.57	0.62
ν							
10.00	0.35	0.43	0.51	0.62	0.71	0.79	0.91
5.00	0.41	0.53	0.65	0.84	1.00	1.18	1.45
2.50	0.62	0.87	1.19	1.77	2.36	3.15	4.57
2.10	0.75	1.09	1.57	2.47	3.47	4.86	7.55
2.01	0.79	1.17	1.70	2.73	3.89	5.52	8.74

356

EXPECTED SHORTFALL: HISTORICAL SIMULATION

- ▷ ESEMPIO: $l_1 = 1\%$, $l_2 = -2\%$, $l_3 = 0\%$, $l_4 = -1\%$, $l_5 = 2.5\%$, $l_6 = -1\%$, $l_7 = 3\%$, $l_8 = 0.5\%$, $l_9 = 1\%$, $l_{10} = 4\%$

★ statistica d'ordine:

$$l_{(1)} = -2\%, l_{(2)} = l_{(3)} = -1\%, l_{(4)} = 0\%, l_{(5)} = 0.5\%,$$

$$l_{(6)} = l_{(7)} = 1\%, l_{(8)} = 2.5\%, l_{(9)} = 3\%, l_{(10)} = 4\%$$

si trova $VaR_{0.9} = l_{(9)} = 3\%$

★ per $\beta > 0.9$, riesce $VaR_\beta = 4\%$

★ l'expected shortfall è

$$ES_{0.9} = \frac{1}{0.1} \int_{0.9}^1 VaR_\beta d\beta = 4\% = E[L|L > VaR_{0.9}]$$

★ si noti che $E[L|L \geq VaR_{0.9}] = 3.5\%$

- ▷ L'approccio bootstrap si può applicare con l'expected shortfall

357

MISURE DI RISCHIO

- ▷ dato una perdita L (e.g. $L = -\text{P\&L}$) indichiamo con $\rho(L)$ la **misura di rischio** corrispondente ad L
- ▷ $\rho(L)$ è il **capitale da allocare alla perdita (potenziale) L per renderla accettabile**
- ▷ approccio **assiomatico**: stabilire proprietà ragionevoli che una misura di rischio dovrebbe soddisfare
 - ★ **no rip-off**: $\rho(L) \leq \max L := \inf\{x \in \mathbb{R} : F_L(x) = 1\}$; non si dovrebbe allocare più capitale della perdita massima
 - ★ **invarianza di distribuzione**: $\rho(L)$ dipende da L solo attraverso F_L ; richiesta naturale, dato che osservazioni di L permettono di ricostruire solo F_L
 - ★ **monotonia**: $\rho(L_1) \leq \rho(L_2)$ se $\text{Prob}(L_1 \leq L_2) = 1$; la perdita L_2 non è mai inferiore a $L_1 \Rightarrow$ richiede più capitale

358

MISURE DI RISCHIO

- ▷ approccio **assiomatico**: stabilire proprietà ragionevoli che una misura di rischio dovrebbe soddisfare
 - ★ **Invarianza per traslazioni**: $\rho(L + c) = \rho(L) + c$ per ogni $c \in \mathbb{R}$; se si aggiunge una perdita certa c ad L , si deve aumentare il capitale dello stesso ammontare
 - ★ **Sub-additività**: $\rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2)$
 - beneficio della **diversificazione**
 - beneficio di una **fusione**
 - sistema di allocazione di capitale può essere **decentralizzato**
 - ★ **positiva omogeneità**: $\rho(\lambda L) = \lambda \rho(L)$ per $\lambda > 0$; non si penalizza per **rischio di concentrazione e liquidità**
 - ★ **convessità**: $\rho(\lambda L_1 + (1 - \lambda)L_2) \leq \lambda \rho(L_1) + (1 - \lambda)\rho(L_2)$; diversificazione su composizioni di portafogli
- ▷ una misura di rischio **monotona, invariante per traslazioni, positivamente omogenea e sub-additiva** si dice **coerente**
- ▷ ogni misura di rischio coerente è convessa (non viceversa)

359

MISURE DI RISCHIO

- ▷ Il Value-at-Risk soddisfa tutte le proprietà (in particolare monotonia, invarianza per traslazioni e positiva omogeneità) ma non la subadditività e quindi neanche la convessità \rightsquigarrow il Value-at-Risk non è coerente
 - ★ il Value-at-Risk diventa coerente se ci si restringe a certi insiemi di variabili aleatorie (eg ellittiche)
- ▷ L'expected shortfall verifica tutte le proprietà viste prima

360

TEORIA DEI VALORI ESTREMI

- ▷ la **teoria dei valori estremi** (EVT) è una branca della probabilità e statistica il cui scopo è
 - ★ costruire modelli per la misurazione (ie calcolare probabilità, quantili, momenti, ...) di eventi estremi
 - ★ sviluppare procedure per la stima di tali modelli
- ▷ cosa significa **estremo**? alcune possibili definizioni:
 - ★ *eccedente l'ordinario, usuale, o atteso*
 - ★ *non frequente, non comune, raro*
 - ★ *remoto in ogni direzione*

361

TEORIA DEI VALORI ESTREMI

- ▷ alcune citazioni famose sulla Teoria dei Valori Estremi (fonte: <http://www.isse.ucar.edu/extremevalues/quotes.html>)
 - ★ **Sir Ronald Fisher:**
“The ‘one chance in a million’ will occur, with no less and no more than its appropriate frequency, however surprised we may be that it should occur to us.”
 - ★ **Emil Gumbel:**
“Il est impossible que l’improbable n’arrive jamais.”
“Il y aura toujours une valeur qui dépassera toutes les autres.”
 - ★ **John Tukey:**
“As I am sure almost every geophysicist knows, distributions of actual errors and fluctuations have much more straggling extreme values than would correspond to the magic bell-shaped distribution of Gauss and Laplace.”

362

TEORIA DEI VALORI ESTREMI

- ▷ formalizzando i concetti visti prima, si consideri una sequenza di variabili aleatorie

$$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$$

indipendenti e identicamente distribuiti (iid)

- ▷ tipica interpretazione: l’indice n rappresenta il **tempo**, cioè X_n potrebbe essere
 - ★ livello del mare (in una data posizione) / ammontare nevicata / ammontare pioggia / velocità del vento / rendimento / ... al giorno n -esimo
 - ★ oppure minuto / ora / settimana / mese / anno
- ▷ n potrebbe essere l’**indice dell’ n -esima osservazione** (eg $X_n =$ magnitudo del n -esima scossa di terremoto)
- ▷ interpretazione “**spaziale**” di n : X_n potrebbe essere
 - ★ livello del mare all’ n -esima posizione
 - ★ sinistro registrato dall’ n -esima polizza assicurativa
 - ★ tempo registrato dall’ n -esimo atleta in una gara

363

TEORIA DEI VALORI ESTREMI

- ▷ **Approccio classico alla EVT** (block-maxima approach) permette di approssimare probabilità tipo

$$P[\max\{X_1, \dots, X_n\} > x]$$

per n grande, cioè la probabilità che **almeno** una osservazione ecceda il livello x

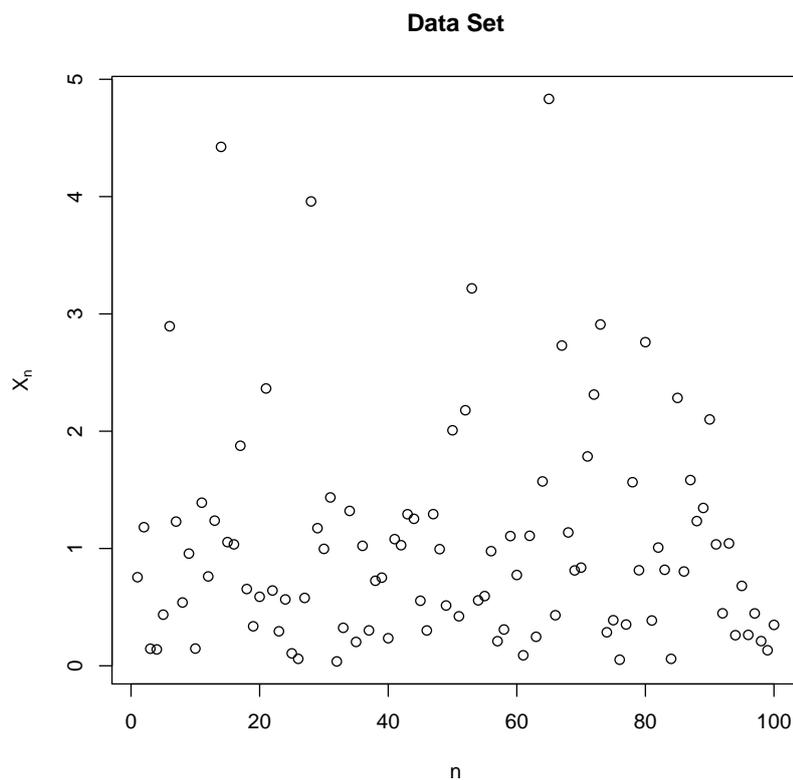
- ▷ si possono considerare **minimi**, dal momento che

$$\min\{X_1, \dots, X_n\} = -\max\{-X_1, \dots, -X_n\}$$

- ▷ in questo approccio,
- ★ un evento estremo corrisponde alla massima osservazione
 - ★ il campione viene diviso in blocchi e il massimo viene estratto da ogni blocco \rightsquigarrow la scelta del blocco è critica
 - ★ valori inferiori al massimo vengono scartati

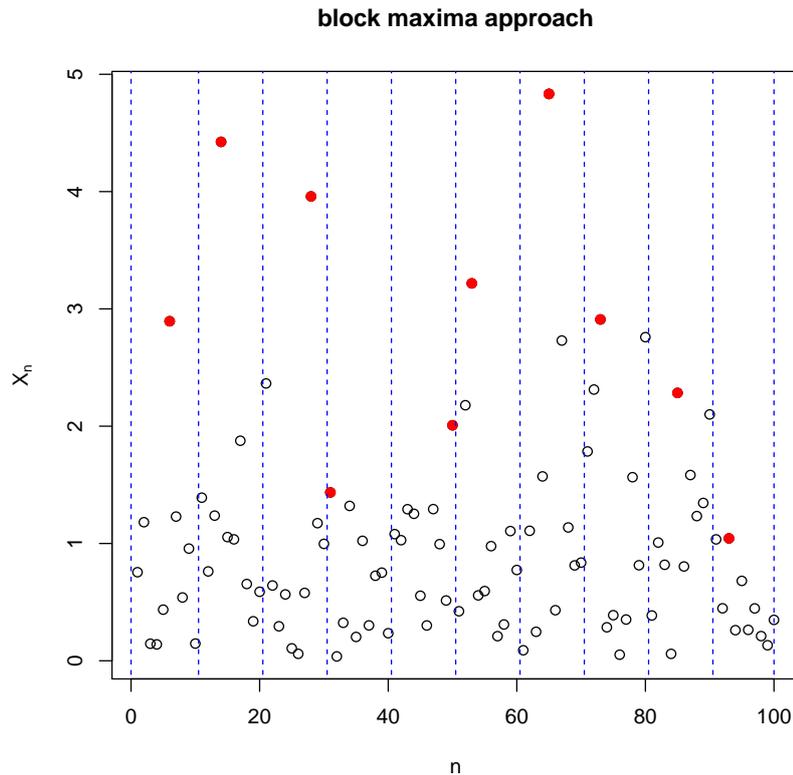
364

TEORIA DEI VALORI ESTREMI



365

TEORIA DEI VALORI ESTREMI



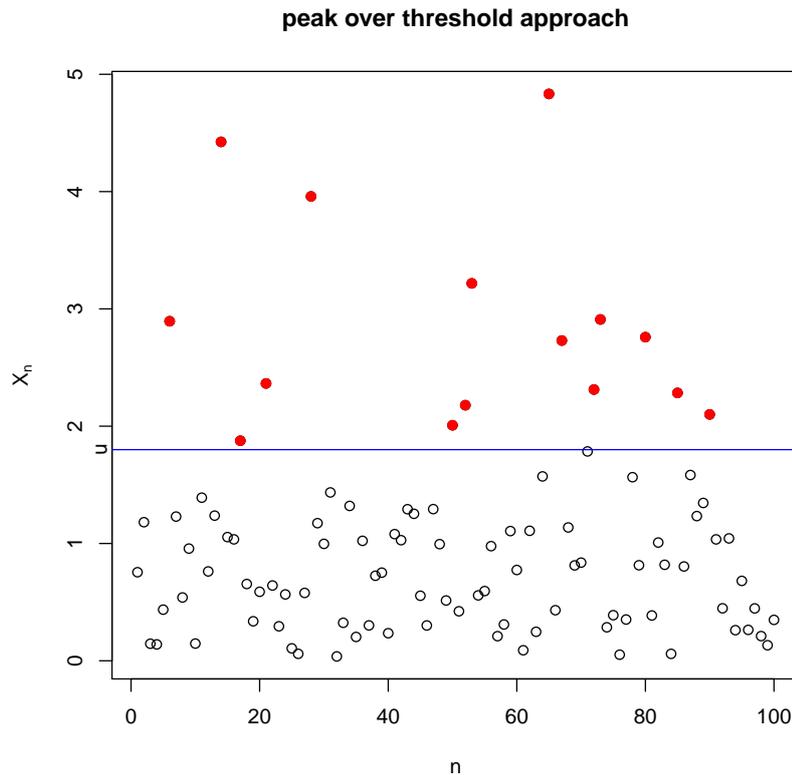
366

TEORIA DEI VALORI ESTREMI

- ▷ Un approccio alternativo è chiamato **Peak over Threshold (POT) approach**: viene considerata una **soglia elevata** u e si possono approssimare quantità tipo
 - * $P[X_n > u + y | X_n > u], y \geq 0$
 - * $E[X_n - u | X_n > u]$
 per n fissato e u grande
- ▷ nell'approccio POT
 - * un evento estremo corrisponde a un **eccesso della soglia** u
 - * valori inferiori a u vengono scartati
 - * la scelta di u è critica
 - * si possono considerare eccessi sotto una soglia u
 - $P[X_n \leq u - y | X_n \leq u], y \geq 0$

367

TEORIA DEI VALORI ESTREMI



368

TEORIA DEI VALORI ESTREMI

▷ Vantaggi dell'EVT

- ★ permette di utilizzare al meglio i dati disponibili per quantificare eventi estremi
- ★ tecniche statistiche standard non sono adatte:
 - il problema in questione richiede di valutare probabilità di eventi nella coda della distribuzione, **possibilmente al di là del range dei dati**
 - la teoria standard tratta i valori estremi come outliers
 - errori di stima possono essere amplificati quando si valutano eventi estremi
- ★ l'EVT invece usa una teoria **asintotica** (come nel CLT) che permette di calcolare le quantità richieste senza far ipotesi sulla distribuzione sottostante dei dati \rightsquigarrow l'**errore di modello** è meno importante
- ★ l'EVT fornisce una chiara indicazione sulla natura della coda della distribuzione dei dati

369