NOTE DI ISTITUZIONI DI GEOMETRIA SUPERIORE 3

14 maggio 2018

Indice

Capitolo 1

Dimensione

1.1 Dimensione combinatoria di uno spazio topologico

Definizione 1.1 (Dimensione combinatoria di uno spazio topologico)**.** Sia X spazio topologico. La dimensione combinatoria di X è definita

$$dim(X) = sup\{n \in \mathbb{N};\ \emptyset \subset Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_n \text{ con } Z_i \text{ chiusi e irriducibili}\}$$

Osservazione 1.2. Se X è uno spazio topologico di Hausdorff, la dimensione combinatoria risulta banalmente $\dim(X) = 0$, infatti abbiamo già osservato che gli unici chiusi irriducibili sono i punti.

Osservazione 1.3. La definizione di dimensione combinatoria di uno spazio topologico nel caso delle varietà affini munite della topologia di Zariski corrisponde alla nozione algebrica di dimensione di Krull di un anello. Infatti, ricordiamo che su un campo algebricamente chiuso abbiamo la corrispondenza biunivoca:

$$\{\text{ideali primi}\}[\quad V \quad] \quad I \quad \{\text{chiusi irriducibili}\}$$

e quindi, in particolare, si ha:

$$\{\text{chiusi irriducibili} \subseteq X\} \leftrightarrow \{\text{ideali primi} \supseteq I(X)\} \leftrightarrow \{\text{ideali primi di } A(X)\}$$

Ma allora possiamo riformulare la definizione di dimensione combinatoria nel caso delle varietà affini in termini degli ideali primi dell'anello delle coordinate:

$$\begin{aligned} dim(X) &= sup\{n \in \mathbb{N};\ \emptyset \subset Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_n \text{ con } Z_i \text{ chiusi e irriducibili}\} = \\ &= sup\{n \in \mathbb{N};\ A(X) \supset I_0 \supset I_1 \supset \ldots \supset I_n\} = \\ &= dim_{\text{Krull}} A(X) \end{aligned}$$

Esempio 1.4. Dalla definizione possiamo già determinare la dimensione di alcuni spazi molto semplici.
1. **Dimensione di un punto** $\{P\}$: se la topologia è T1, i punti sono chiusi; essendo irriducibili, l'unica catena possibile è data da:

$$\emptyset \subset \{P\}$$

che ha lunghezza 0, allora $\dim(\{P\}) = 0$.
2. **Dimensione di** $\mathbb{A}^1$: se $\mathbb{K}$ è infinito, abbiamo visto visto che gli unici chiusi irriducibili di $\mathbb{A}^1$ sono i singoletti e $\mathbb{A}^1$ stesso. Quindi le catene massimali sono della forma:

$$\emptyset \subset \{P\} \subset \mathbb{A}^1.$$

Segue che $\dim(\mathbb{A}^1) = 1$
3. **Dimensione di** $\mathbb{A}^n$: se $\mathbb{K}$ è infinito, una catena di chiusi irriducibili è data da:

$$\emptyset \subset V(x_1, \ldots, x_n) \subset V(x_2, \ldots, x_n) \subset \ldots \subset V(x_n) \subset \mathbb{A}^n$$

I chiusi $V(x_i, \ldots, x_n)$ sono irriducibili in quanto $V(x_i, \ldots, x_n) \cong \mathbb{A}^{n-i}$. Perciò abbiamo trovato una catena di lunghezza n, e per definizione di dimensione segue che $\dim(\mathbb{A}^n) \geq n$. Vedremo che tale dimensione è proprio $n = dim_{\text{Krull}}\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

Lemma 1.5. *Sia X spazio topologico e sia $Y \subseteq X$ un sottospazio, allora* $\dim(Y) \leq dim(X)$.

Dimostrazione. Dimostriamo che ogni catena stretta di chiusi irriducibili in Y dà luogo ad una una catena stretta di chiusi irriducibili in X. Sia perciò

$$\emptyset \subset Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_k \tag{1.1}$$

una catena di chiusi irriducibili di Y. Consideriamo $\overline{Z_i} \subseteq X$, chiusura di Z_i in X. Si ottiene quindi a partire da (1.1), la seguente catena di chiusi in X:

$$\emptyset \subseteq \overline{Z_0} \subseteq \overline{Z_1} \subseteq \ldots \subseteq \overline{Z_k} \tag{1.2}$$

Dalla proposizione (**??**) $\overline{Z_i}$ sono irriducibili. Poiché le inclusioni in (1.2) sono strette, abbiamo ottenuto una catena di lunghezza k di X e quindi la tesi è provata. $\square$

Proposizione 1. *Sia X spazio topologico irriducibile e sia $Y \subset X$ un chiuso proprio. Se* $\dim(X) < \infty$, *allora* $\dim(Y) < \dim(X)$

Osservazione 1.6. Osserviamo esplicitamente che la richiesta che X abbia dimensione finita è necessaria perché se avesse dimensione infinita, potrebbe accadere che Y, pur essendo un sottospazio proprio, abbia dimensione ancora infinita.

Dimostrazione. Dal lemma precedente $\dim(Y) \leq \dim(X)$, dobbiamo mostrare che vale la disuguaglianza stretta. Osserviamo che ad ogni catena di chiusi irriducibili di Y possiamo aggiungere X stesso; se

$$\emptyset \subset Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_k$$

è un catena in Y, poiché Y è chiuso, gli Z_i sono chiusi e irriducibili anche in X, ma allora la seguente

$$\emptyset \subset Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_k \subset X$$

è una catena di chiusi irriducibili di X. Allora da ogni catena di lunghezza n di Y se ne ricava una di X di lunghezza $n + 1$. Siccome la dimensione di X è finita, questo conclude la dimostrazione. $\square$

Proposizione 2. *Siano X, Y spazi topologici Noetheriani e sia $\pi\colon X \to Y$ continua, suriettiva e chiusa. Allora* $\dim(Y) \leq \dim(X)$.

Dimostrazione. Sia $\emptyset \subset Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_k$ una catena di chiusi irriducibili in Y. Vogliamo ottenere da questa una catena di chiusi irriducibili di X

$$\emptyset \subset H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_k \text{ tale che } \pi(H_i) = Z_i$$

Partiamo da Z_k: π è continua, quindi $\pi^{-1}(Z_k)$ è un chiuso in X; essendo uno spazio noetheriano, il chuiso $\pi^{-1}(Z_k)$ ammette una decomposizione finita in chiusi irriducibili massimali

$$\pi^{-1}(Z_k) = W_1 \cup \ldots \cup W_r \text{ con } W_i \text{ componenti irriducibili.}$$

Per ipotesi π è anche chiusa, quindi $\pi(W_i)$ sono chiusi in Y e $Z_k = \pi(W_1) \cup \ldots \cup \pi(W_r)$. Essendo Z_k irriducibile, esiste un indice $j(k)$ tale che

$$Z_k = \pi(W_{j(k)}).$$

Poniamo quindi $H_k := W_{j(k)}$. Restringendo π ad H_k e restringendo il codominio a Z_k, si ottiene ancora una funzione continua, suriettiva su Z_k e chiusa:

$$\pi_{|H_k}\colon H_k \longrightarrow Z_k.$$

Inoltre $H_k \subseteq X$ è ancora noetheriano, essendo un sottospazio topologico di uno spazio noetheriano. Applicando il procedimento di cui sopra possiamo scegliere $H_{k-1} \subseteq X$ chiuso irriducibile e tale che $\pi(H_{k-1}) = Z_{k-1}$. Risulta che $H_{k-1} \subset H_k$ in quanto π è suriettiva dunque se, per assurdo, fosse

$$H_{k-1} = H_k \Rightarrow \pi(H_k) = Z_k = \pi(H_{k-1}),$$

ma questa è una contraddizione. Reiterando il procedimento si conclude. □

Osservazione 1.7. Nella dimostrazione di questa proposizione non viene utilizzato il fatto che Y è uno spazio topologico noetheriano e quindi tale ipotesi sembra ridondante. In realtà Y è necessariamente uno spazio topologico noetheriano in quanto immagine mediante π, che è continua e suriettiva, di uno spazio noetheriano (si ricordi la proposizione (**??**)).

1.2 Morfismi finiti

Un importante strumento per la determinazione della dimensione delle varietà (affini e proiettive) è dato dalla teoria dei morfismi finiti. Un risultato centrale della teoria è il Lemma di Normalizzazione di Emmy Noether.

Definizione 1.8 (Algebra finitamente generata)**.** Siano $A \subseteq B$ due anelli. Diremo che B è un'algebra finitamente generata su A se esistono $b_1, \ldots, b_n \in B$ tali che ogni elemento di B si scriva come polinomio nelle b_i a coefficienti in A, sinteticamente:

$$B = A[b_1, \ldots, b_n].$$

Equivalentemente, esiste un omomorfismo suriettivo di A-algebre

$$A[x_1, \ldots, x_n] \to B.$$

Definizione 1.9 (Algebra finita)**.** Siano $A \subseteq B$ due anelli. Diremo che B è un'algebra finita su A se B è finitamente generato come A-modulo, cioè esistono $b_1, \dots, b_n \in B$ tali che

$$\forall b \in B,\ b = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n \ \text{ con } a_i \in A$$

Definizione 1.10 (Elemento intero)**.** Siano $A \subseteq B$ due anelli e sia $b \in B$. Diciamo che b è intero su A se soddisfa un'equazione polinomiale monica a coefficienti in A, cioè esistono $a_0, \dots, a_n \in A$ tali che

$$b^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i b^i = 0 \in B.$$

Diremo che B è un'algebra intera su A se ogni elemento di B è intero su A.

Definizione 1.11 (Morfismo finito)**.** Siano $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ due varietà affini e sia $f\colon X \to Y$ un morfismo. Il morfismo f si dice finito se che $A(X)$ è un'algebra $f^*A(Y)$-finita, dove $f^*\colon A(Y) \to A(X)$ è l'omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre dato dal pull-back.

Proposizione 3. *Siano $A \subseteq B \subseteq C$ anelli. Se C è finita su B e B è finita su A, allora C è finita su A.*

Dimostrazione. Si tratta di esprimere gli elementi di un sistema di generatori di C su B in termini del sistema di generatori di B su A. □

Corollario 1. *Siano X, Y, Z varietà affini e siano $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ due morfismi finiti, allora $g \circ f\colon X \to Z$ è morfismo finito.*

Proposizione 4. *Siano $A \subseteq B \subseteq C$ anelli. Se C è finita su A allora C è finita su B*

Dimostrazione. Sia $\{c_1, \dots, c_n\}$ un sistema di generatori per C su A, allora preso $c \in C$ si ha:

$$c = \sum a_i c_i \ \text{ con } a_i \in A$$

Ma $A \subseteq B$, quindi $a_i \in B$ e dunque C è finita su B. □

Corollario 2. *Siano X, Y, Z varietà affini e siano $f\colon X \to Y$ un morfismo, $g\colon Y \to Z$ un morfismo finito. Se $g \circ f\colon X \to Z$ è morfismo finito, allora anche f è morfismo finito.*

Proposizione 5. *Siano $A \subseteq B$ anelli e sia B una A-algebra finita. Supponiamo inoltre che B sia dominio d'integrità. Allora B è intera su A.*

Dimostrazione. Per definizione di algebra finita, B come A-modulo è finitamente generato. Sia quindi $\{b_1, \dots, b_r\}$ un sistema di generatori di B su A e, preso $b \in B$, consideriamo gli elementi

$$b\, b_i = a_{i1} b_1 + \ldots + a_{ir} b_r,\ \forall i \in \{1, \dots, r\}.$$

Otteniamo il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} (b - a_{11}) b_1 - a_{12} b_2 - \ldots - a_{1r} b_r = 0 \\ \quad \vdots \\ -a_{r1} b_1 - \ldots - a_{1,r-1} b_{r-1} + (b - a_{rr}) b_r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix} = 0 \tag{1.3}$$

dove la matrice dei coefficienti è

$$M = \begin{pmatrix} b - a_{11} & -a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ -a_{r1} & -a_{r2} & \dots & b - a_{rr} \end{pmatrix}$$

Afferimamo ora che $det(M) = 0$, dato che M è matrice dei coefficienti di un sistema omogeneo che ammette una soluzione non nulla. Infatti, supponiamo per assurdo che $det(M) \neq 0$. Allora $det(M)$ è invertibile in $Q(B)$, pertanto definendo

$$adj(M) = cof(M)^T, \text{ dove } cof(M)_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$$

si ha che

$$adj(M)\ M = det(M)\ Id \Leftrightarrow \frac{adj(M)\ M}{det(M)} = Id$$

Ciò implica, dal sistema (1.3), che

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix} = \frac{adj(M)M}{det(M)} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix} = 0$$

che è assurdo in quanto $b_1, \dots, b_r$ non possono essere tutti nulli. Dunque $det(M) = 0$ e, scrivendo la matrice M come:

$$M = b \cdot Id - \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ -a_{r1} & -a_{r2} & \dots & -a_{rr} \end{pmatrix}$$

si vede che $0 = det(M) = b^n - \sum c_i b^i$, con $c_i \in A$ e quindi b è intero su A. $\square$

Lemma 1.12. *Siano $A \subsetneq B$ anelli tali che B sia una A-algebra finita. Supponiamo B dominio d'integrità. Allora se $I \subset A$ è ideale proprio, $IB \subset B$ è un ideale proprio.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $IB = B$, allora, poiché per ipotesi B è finita su A, possiamo scrivere:

$$B = Ab_1 + \dots + Ab_r.$$

Segue che si ha

$$I\ B = I\ b_1 + \dots + I\ b_r = B$$

Ma allora per ogni $i \in \{1, \dots, r\}$

$$b_i = \sum a_{ij} b_j \text{ con } a_{ij} \in I \tag{1.4}$$

e quindi ponendo $N := Id - (a_{ij})_{ij}$, da (1.4), segue che

$$N \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix} = 0$$

Come nella dimostrazione di (5), ciò implica che $0 = det(N) = 1 + \beta$, con $\beta \in I$. Allora $1 \in I$ e perciò $I = A$, assurdo. $\square$

Proposizione 6. *Siano $A \subseteq B$ anelli e sia $b \in B$ un elemento intero su A, allora $A[b] \subseteq B$ è una sottoalgebra di B finita su A, dove $A[b] = \{g(b);\ g \in A[x]\}$.*

Dimostrazione. b è intero su A, perciò esistono degli elementi $a_i \in A$ t.c.

$$b^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i b^i = 0 \Leftrightarrow b^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i b^i.$$

Allora si ha:

$$b^{n+1} = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i b^{i+1} = -a_{n-1} b^n - \sum_{i=0}^{n-2} a_i b^{i+1} = a_{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} a_i b^{i+1} - \sum_{i=0}^{n-2} a_i b^{i+1}.$$

Dunque abbiamo espresso la potenza $(n+1)$-esima di b come combinazione lineare a coefficienti in A di potenze di b di ordine minore. Reiterando questo ragionamento si vede che ogni potenza di b, si può scrivere come combinazione lineare di $\{1, b, \dots, b^{n-1}\}$ a coefficienti in A e quindi quello è un sistema di generatori per $A[b]$ come modulo su A. □

Osservazione 1.13. Per induzione abbiamo che se $b_1, \dots, b_k \in B$ sono interi su A, $A[b_1, \dots, b_k]$ è un'algebra finita su A.

Corollario 3. *Siano $A \subseteq B$ anelli. Sia B un'algebra finitamente generata su A e dominio d'integrità. Allora B è una A-algebra finita se e solo se B è intera su A.*

Dimostrazione. L'implicazione $(\Rightarrow)$ è esattamente la proposizione (5). Viceversa, se B è intera su A e B è finitamente generata su A, allora $B = A[b_1, \dots, b_k]$ con $b_1, \dots, b_k$ interi. Perciò dalla proposizione (6) segue che B è finita su A. □

Esempio 1.14. Vediamo alcuni esempi di morfismi finiti e non finiti:
1. Sia $X = V(xy-1) \subseteq \mathbb{A}^2$ e su X consideriamo la proiezione sul primo fattore $p_1 \colon X \to \mathbb{A}^1$. Osserviamo che p_1 non è un morfismo finito, infatti:

$$\begin{aligned} p_1^* \colon A(\mathbb{A}^1) &\longrightarrow A(X) \\ \mathbb{K}[t] &\longrightarrow \frac{\mathbb{K}[x,y]}{(xy-1)} \\ g(t) &\longmapsto (g \circ p_1)(x,y) \end{aligned}$$

In particolare, per $g(t) = t$ si ha $p_1^*(t) = \overline{x}$, dunque:

$$\begin{aligned} p_1^* \colon \mathbb{K}[t] &\longrightarrow \frac{\mathbb{K}[x,y]}{(xy-1)} \\ t &\longmapsto \overline{x} = [x]_{(xy-1)} \end{aligned}$$

Ma allora $p_1^*(\mathbb{K}[t]) = \mathbb{K}[\overline{x}]$, quindi per vedere se p_1 è finito, dobbiamo valutare se $A(X)$ sia un'algebra $\mathbb{K}[\overline{x}]$-finita. Ora poiché $A(X)$ è una $\mathbb{K}[\overline{x}]$-algebra finitamente generata e ed è dominio d'integrità, $A(X)$ è un'algebra $\mathbb{K}[\overline{x}]$-finita se e solo se è intera su $\mathbb{K}[\overline{x}]$. Se verifichiamo che $\overline{y}$ non è un elemento intero su $\mathbb{K}[\overline{x}]$ concludiamo che p_1 non è finito.
Supponiamo per assurdo che $\overline{y}$ sia intero, che verifica

$$\overline{y}^n + \sum g_i(\overline{x}) \overline{y}^i = 0 \ \text{ con } g_i \in \mathbb{K}[\overline{x}]$$

Poiché $A(X) = \mathbb{K}[x,y]/(xy-1)$, l'uguaglianza sopra equivale a:

$$y^n + \sum g_i(x)y^i \in (xy-1).$$

Si verifica facilmente che ciò non si può mai verificare. Quindi p_1 non è finito.
2. Sia $X = V(y^2 - x^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^2$ e consideriamo nuovamente la proiezione sul primo fattore $p_1 \colon X \to \mathbb{A}^1$; $(x,y) \mapsto x$. In questo caso p_1 è finito. Con un conto analogo al precedente si vede che

$$\begin{aligned} p_1^* \colon \mathbb{K}[t] &\longrightarrow \frac{\mathbb{K}[x,y]}{(y^2-x^2-1)} \\ t &\longmapsto \overline{x} \end{aligned}$$

e quindi $p_1^*(\mathbb{K}[t]) = \mathbb{K}[\overline{x}]$. Dobbiamo verificare che $A(X) = \frac{\mathbb{K}[x,y]}{(y^2-x^2-1)}$ sia una $\mathbb{K}[\overline{x}]$-algebra finita o, equivalentemente intera. Abbiamo che $\overline{x}$ è intero su $\mathbb{K}[\overline{x}]$, d'altra parte in $A(X)$ vale:

$$\overline{y}^2 - \underbrace{(\overline{x}^2+1)}_{\in \mathbb{K}[\overline{x}]} = 0$$

quindi anche $\overline{y}$ annulla un polinomio monico a coefficienti in $\mathbb{K}[\overline{x}]$. Ma allora $A(X)$ è finita su $\mathbb{K}[\overline{x}]$ e quindi p_1 è un morfismo finito.

Osservazione 1.15. Le inclusioni di varietà affini sono morfismi finiti infatti, presa X varietà affine e $Z \subseteq X$, il pull-back di $i \colon Z \hookrightarrow X$, dato da

$$i^* \colon A(X) \longrightarrow A(Z)$$

è suriettivo, in quanto i è iniettiva. Allora $i^*A(X) = A(Z)$, quindi i è finito in quanto $A(Z)$ è algebra finita su stessa.

Possiamo dare la nozione di morfismo finito anche tra varietà quasi-proiettive a partire dal caso affine:

Definizione 1.16. Siano X, Y varietà **qp** e sia $f \colon X \to Y$ un morfismo. Diremo che f è un morfismo finito se esiste un ricoprimento affine di Y, i.e.

$$Y = U_1 \cup \ldots \cup U_k$$

tale che $W_i := f^{-1}(U_i)$ è un aperto affine in X e

$$f_{|W_i} \colon W_i \longrightarrow U_i$$

è un morfismo finito tra varietà affini.

Studiamo adesso le proprietà fondamentali dei morfismi finiti: vedremo che questi sono chiusi e preservano le inclusioni strette di chiusi irriducibili. Come corollario seguirà che i morfismi finiti suriettivi preservano la dimensione.

Teorema 1.17. *Siano X, Y varietà affini su un campo algebricamente chiuso e sia $f \colon X \to Y$ un morfismo finito. Allora f è una mappa chiusa.*

Dimostrazione. Sia $Z \subseteq X$ chiuso, possiamo supporre che Z sia anche irriducibile altrimenti è sufficiente ragionare sulle componenti irriducibili di Z. Definiamo il seguente morfismo:

$$\begin{aligned} h\colon Z &\longrightarrow \overline{f(Z)} \\ z &\longmapsto f(z) \end{aligned}$$

Osservaimo che h è ancora un morfismo finito; infatti, abbiamo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "i"] \arrow[rrr, bend left] \arrow[drr, dashed, "h"'] & X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\equiv"] & & Y \\
& & \overline{f(Z)} \arrow[ur, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

dove i, j sono inclusioni e quindi morfismi finiti da (1.15). Inoltre, anche $g := f \circ i$ è morfismo finito in quanto composizione di morfismi finiti. Poiché $g = j \circ h$, come si vede dal diagramma, applicando il corollario (2) si conclude che h è finito.
Dunque $h\colon Z \to \overline{f(Z)}$ è finito e dominante in quanto $h(Z) = f(Z)$. Se h è anche suriettivo allora

$$f(Z) = \overline{f(Z)}$$

e quindi f è chiusa. Il fatto che un morfismo finito e dominante sia suriettivo è un fatto generale come si vede nel lemma (1.18) seguente. □

Lemma 1.18. *Siano X, Y varietà affini su un campo algebricamente chiuso e sia $f\colon X \to Y$ un morfismo finito e dominante. Allora f è suriettivo.*

Dimostrazione. Per ipotesi $\overline{f(X)} = Y$, allora $f^*\colon A(Y) \to A(X)$ è iniettiva infatti:

$$Ker(f^*) = \{a \in A(Y);\ f^*(a) = 0 \text{ in } A(X)\}$$

perciò se $f^*(a) = 0$ in $A(X)$, si ha $f^*(a) = a \circ f = 0 \Rightarrow a_{|f(X)} = 0$ e da qui segue che $a_{|\overline{f(X)}} = 0$. Infine $a = 0$ in $A(Y)$ e quindi f^* è iniettiva e possiamo identificare $A(Y)$ con la sua immagine mediante f^*, i.e. $f^*A(Y) \subseteq A(X)$.
Ora sia $P = (p_1, \dots, p_m) \in Y$, allora

$$\begin{aligned} f^{-1}(P) &= \{Q \in X;\ f(Q) = P\} = \\ &= \{Q \in X;\ ((\overline{y}_i - p_i) \circ f)(Q) = f^*(\overline{y}_i - p_i)(Q) = 0,\ \forall i\}. \end{aligned}$$

Consideriamo quindi l'ideale

$$\mathfrak{M} := (\overline{y}_1 - p_1, \dots, \overline{y}_m - p_m) \subseteq A(Y)$$

dunque $f^*\mathfrak{M} = \mathfrak{M}A(X) \subseteq A(X)$ e vale

$$f^{-1}(P) = \{Q \in X;\ Q \in V(\mathfrak{M}A(X))\}$$

Perciò $f^{-1}(P) \neq \emptyset$ se e solo se $V(\mathfrak{M}A(X)) \neq \emptyset$ in $A(X)$. Ma poiché $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$

$$V(\mathfrak{M}A(X)) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathfrak{M}A(X) \text{ è ideale proprio}$$

dalla forma debole di NSS. Ma, dato che $\mathfrak{M} \subset A(Y)$ in quanto massimale, $\mathfrak{M}A(X)$ è sottoinsieme proprio dal lemma (1.12). Questo conclude la dimostrazione. □

Teorema 1.19. *Siano X, Y varietà affini su un campo algebricamente chiuso e sia $f \colon X \to Y$ un morfismo finito. Allora, se $Z \subset X$ è un chiuso irriducibile proprio di X, si ha $f(Z) \subset Y$.*

Dimostrazione. Sia $Z \subset X$ un chiuso irriducibile proprio e sia $g \in A(X);\ g_{|Z} = 0$ i.e. $g \in I(Z) \subseteq A(X)$. Ora poiché f è finito e X è varietà affine quindi in particolare irriducibile, $A(X)$ è algebra $f^*A(Y)$-finita e dominio, allora, dalla proposizione (5), $A(X)$ è intera su $f^*A(Y)$. Dunque g è intero su $f^*A(Y)$, perciò

$$g^n + \sum_{i=0}^{n-1} f^*(a_i)g^i = 0 \text{ con } f^*(a_i) \in f^*A(Y) \tag{1.5}$$

e possiamo supporre, senza perdita di generalità, che il grado n sia minimo. Ma allora il 'termine noto' $f^*(a_0) \in A(X)$ non è l'elemento nullo perchè se lo fosse potremmo dividere l'espressione (1.5) per g, ottenendo

$$g^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} f^*(a_i)g^{i-1} = 0$$

contraddicendo la minimalità del grado n. In particolare se $f^*(a_0) \neq 0$, segue da (1.5)

$$f^*(a_0) = -g^n - \sum_{i=1}^{n-1} f^*(a_i)g^i \in (g) \subseteq I(Z)$$

Ciò significa che $f^*(a_0)_{|Z} = (a_0)_{|f(Z)} = 0$. Ma di nuovo a_0 non si annulla su tutto $f(X)$ poiché altrimenti $f^*(a_0) = 0$ su $A(X)$, perciò concludiamo che $f(Z) \subset Y$. $\square$

Corollario 4. *Siano X, Y varietà affini e sia $f \colon X \to Y$ un morfismo finito. Se f è suriettivo, allora $\dim(X) = \dim(Y)$.*

Corollario 5. *Siano X, Y varietà affini e sia $f \colon X \to Y$ un morfismo finito. Allora $\forall P \in Y,\ f^{-1}(P)$ è vuoto oppure è un insieme finito di punti.*

Dimostrazione. Supponiamo $P \in Y;\ f^{-1}(P) \neq \emptyset$. Osserviamo innanzitutto che $f^{-1}(P) \subseteq X$ è un chiuso in quanto f è continua. Sia Z componente irriducibile di $f^{-1}(P)$ e sia $z \in Z$. Essendo il singoletto $\{z\} \subseteq Z$ un chiuso irriducibile, allora $f(\{z\}) = P = f(Z)$ è chiuso e irriducibile, dato che f è morfismo finito e quindi continuo e chiuso. Inoltre f preserva le inclusioni strette tra chiusi irriducibili e quindi si deve avere

$$\{z\} = Z$$

Questo conlude la dimostrazione. $\square$

1.3 Lemma di normalizzazione di Noether e sue conseguenze

Teorema 1.20 (Lemma di normalizzazione di Noether)**.** *Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso e siano $V(F) \subseteq \mathbb{A}^n$ un'ipersuperficie e $X \subset \mathbb{A}^n$ una varietà affine. Allora valgono le seguenti affermazioni:*

1. *esiste un morfismo finito e suriettivo*
$$\pi\colon V(F) \longrightarrow \mathbb{A}^{n-1}$$
e in particolare $\dim(V(F)) = \dim(\mathbb{A}^{n-1})$*. Inoltre,* π *è la composizione di un'affinità e della proiezione sulle prime* $n-1$ *coordinate;*

2. *esiste un morfismo finito suriettivo*
$$\pi\colon X \longrightarrow \mathbb{A}^{k}$$
per un opportuno $k \leq n-1$.

Dimostrazione. 1. Sia $F \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ di grado d e, come primo passo, cerchiamo un'affinità che trasformi il polinomio F in un polinomio della forma $x_n^d + \ldots$.
Sia $F_d(x_0, \ldots, x_{n-1}, 1)$ il termine omogeneo di grado massimo del polinomio F valutato in $x_n = 1$: affermiamo che tale polinomio non è il polinomio nullo; infatti, se F_d non contiene x_n non c'è nulla da dimostrare. Se, invece, F_d contiene dei fattori x_n, l'omomorfismo di deomogeneizzazione:
$$\begin{aligned} a\colon \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_d &\longrightarrow \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_{n-1}]_{\leq d} \\ x_i &\longmapsto x_i \qquad \forall i \neq n \\ x_n &\longmapsto 1 \end{aligned}$$
risulta un isomorfismo di spazi vettoriali; l'omomorfismo inverso si costruisce omogeneizzando $h \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_{n-1}]_{\leq d}$ rispetto a x_n e moltiplicandolo per $x_n^{d-deg(h)}$. Quindi l'unico polinomio di grado d che valutato in $x_n = 1$ risulti nulloè il polinomio nullo.
Essendo $F_d(x_0, \ldots, x_{n-1}, 1) \neq 0$, esiste $Q = (q_1, \ldots, q_{n-1}) \in \mathbb{A}^{n-1}$ t.c. $F_d(Q, 1) = C \neq 0$. Consideriamo quindi una qualunque affinità di $\mathbb{A}^n$ tale che:
$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{A}^n &\longrightarrow \mathbb{A}^n \\ (q_1, \ldots, q_{n-1}, 1) &\longmapsto (0, \ldots, 0, 1) \end{aligned}$$
Si ha $g(V(F)) \cong V(F)$ e adesso l'equazione di $g(V(F))$ è un polinomio $\tilde{F}$ della forma $Cx_n^d + \ldots$. A questo punto, poiché $\tilde{F}_d(0, \ldots, 0, 1) = C$, consideriamo il polinomio
$$\frac{1}{C}\tilde{F}(x_1, \ldots, x_n) = x_n^d + \ldots$$
Otteniamo così un polinomio della forma desiderata. Chiamiamo ancora F l'equazione riscalata di $g(V(F))$.
Sia ora $\pi\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{n-1}$ la proiezione sulle prime $n-1$ componenti. Vogliamo dimostrare che la restrizione di tale proiezione all'ipersuperficie $V(F)$, i.e. $\pi_{|V(F)}$ è un morfismo finito e suriettivo; denotiamo tale restrizione ancora con π:
Osserviamo innanzitutto che
$$\begin{aligned} \pi^*\colon A(\mathbb{A}^{n-1}) &\longrightarrow A(V(F)) \\ \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_{n-1}] &\longrightarrow \frac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]}{(F)} \\ H &\longmapsto H \circ \pi\colon V(F) \to \mathbb{K} \end{aligned}$$

Ora $\pi^*\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n] = \mathbb{K}[\overline{x}_0,\ldots,\overline{x}_{n-1}]$ e quindi per mostrare che π è finita, bisogna mostrare che $A(V(F))$ è finita su $\mathbb{K}[\overline{x}_0,\ldots,\overline{x}_{n-1}]$. È sufficiente mostrare che $\overline{x}_n$ è intero su $\mathbb{K}[\overline{x}_0,\ldots,\overline{x}_{n-1}]$. Ora si ha:

$$F = x_n^d + \sum_{i=0}^{d-1}\beta_i(x_1,\ldots,x_{n-1})x_n^i$$

per costruzione, quindi passando alle classi in modulo (F):

$$0 = \overline{x}_n^d + \sum_{i=0}^{d-1}\beta_i(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_{n-1})\overline{x}_n^i = \overline{x}_n^d + \sum_{i=0}^{d-1}\overline{\beta_i(x_1,\ldots,x_{n-1})}\overline{x}_n^i$$

Quindi π è morfismo finito.
Verifichiamo ora che π sia suriettiva: sia $(a_1,\ldots,a_{n-1}) \in \mathbb{A}^{n-1}$, allora

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(a_1,\ldots,a_{n-1}) &= \{(a_1,\ldots,a_{n-1},a);\ F(a_1,\ldots,a_{n-1},a)=0\} = \\ &= V(F(a_1,\ldots,a_{n-1},x)).\end{aligned}$$

Ma $F(a_1,\ldots,a_{n-1},x) = x^d + \sum\beta_i(a_1,\ldots,a_{n-1})x^i$ non è mai un polinomio costante, ed essendo $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, vale NSS:

$$\pi^{-1}(a_1,\ldots,a_{n-1}) = V(F(a_1,\ldots,a_{n-1},x)) \neq \emptyset$$

e quindi π è suriettiva. Questo conclude la dimostrazione.

2. Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$ una varietà affine. Se $X = \emptyset$, non c'è nulla da provare. Supponiamo dunque $X \neq \emptyset$ e proviamo l'asserto per induzione su n:
   Supponiamo $n = 1$: in questo caso ogni sottovarietà affine è un punto e quindi il risultato è provato.
   Passo d'induzione $n > 1$: sia $F \in I(X)$ un polinomio irriducibile, allora $X \subseteq V(F) \subseteq \mathbb{A}^n$. Per il primo punto del teorema esiste un morfismo finito e suriettivo:
   $$\pi\colon V(F) \longrightarrow \mathbb{A}^{n-1}$$
   Poiché π è morfismo finito e suriettivo, è chiuso e quindi $\pi(X) \subseteq \mathbb{A}^{n-1}$ è chiuso e irriducibile in quanto X lo è. Allora $\pi(X)$ è varietà affine in $\mathbb{A}^{n-1}$, quindi per l'ipotesi induttiva esiste un morfismo finito
   $$p\colon \pi(X) \longrightarrow \mathbb{A}^k$$
   con $k \leq n-1$. Componendo dunque $p \circ \pi_{|X}$ si ottiene il risultato voluto.

□

Corollario 6. *Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso. Valgono le seguenti:*

1. $\dim(\mathbb{A}^n) = n$*;*
2. *per ogni ipersuperficie $V(F)$ affine si ha* $\dim(V(F)) = n-1$*;*

3. *se $X \subseteq \mathbb{A}^n$ è una varietà affine di dimensione $n-1$, allora $X = V(F)$, cioè X è un'ipersuperficie.*

Dimostrazione. 1. Proviamo l'asserto per induzione su n:
Supponiamo $n = 0, 1$: abbiamo già calcolato la dimensione di $\mathbb{A}^0$ e $\mathbb{A}^1$ esplicitamente.
Passo d'induzione $n > 1$: supponiamo di sapere che $\dim(\mathbb{A}^k) = k$, $\forall k \leq n-1$. Dal lemma di normalizzazione di Noether segue che se $X \subset \mathbb{A}^n$ è sottovarietà affine propria allora $\dim(X) \leq n-1$. Pertanto, presa una catena di chiusi irriducibili in $\mathbb{A}^n$,

$$\emptyset \subset Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_{k-1} \subset Z_k = \mathbb{A}^n,$$

poiché, Z_{k-1} è una varietà affine propria, per quanto osservato sopra, vale

$$k-1 \leq sup\{\text{lunghezze catene in } Z_{k-1}\} = dim(Z_{k-1}) \leq n-1.$$

Ciò significa che ogni catena di $\mathbb{A}^n$ ha lunghezza $k \leq n$. Ma, per quanto visto nell'esempio (1.4), $\dim(\mathbb{A}^n) \geq n$. Questo conclude la dimostrazione.

2. Dal lemma di normalizzazione esiste $\pi\colon V(F) \to \mathbb{A}^{n-1}$ finita e suriettiva, perciò $\dim(V(F)) = dim(\mathbb{A}^{n-1}) = n-1$.

3. Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$ è una varietà affine di dimensione $n-1$, quindi X è una varietà affine propria, e sia $F \in I(X)$ un polinomio irriducibile. Allora, dal lemma di normalizzazione, si ha:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi_{|X}"'] & \subseteq & V(F) \arrow[d, "\pi"] \\ \pi(X) & \subseteq & \mathbb{A}^{n-1} \end{tikzcd}$$

dove $\pi\colon V(F) \to \mathbb{A}^{n-1}$ è morfismo finito e suriettivo. Dunque π è chiuso e preserva le inclusioni strette quindi $\dim(\pi(X)) = dim(X)$. Se, per assurdo, $X \neq V(F)$, $\pi(X) \subset \mathbb{A}^{n-1}$ e quindi $\dim(\pi(X)) < dim(\mathbb{A}^{n-1}) = n-1$. Ma $\dim(X) = n-1$ e quindi abbiamo una contraddizione.

□

Teorema 1.21. *Sia X varietà affine o proiettiva e sia $U \subset X$ un aperto non vuoto, allora $\dim(U) = dim(X)$.*

Corollario 7. *Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso, allora valgono le seguenti affermazioni:*

1. $\dim(\mathbb{P}^n) = n$;

2. $\dim(V_{\mathbb{P}}(F)) = n-1$, *per ogni ipersuperficie proiettiva $V_{\mathbb{P}}(F)$;*

3. *Se $X \subseteq \mathbb{P}^n$ è una varietà proiettiva di dimensione $n-1$, allora $X = V_{\mathbb{P}}(F)$, i.e. X è un'ipersuperficie.*

Dimostrazione. 1. Sia $U_i \subseteq \mathbb{P}^n$ una carta. È noto che $U_i \cong \mathbb{A}^n$ quindi $\dim(U_i) = dim(\mathbb{A}^n) = n$. Inoltre U_i è aperto in $\mathbb{P}^n$, perciò, dal teorema precedente,

$$dim(\mathbb{P}^n) = dim(U_i) = n.$$

2. Poiché la famiglia $\{U_j\}$ costituisce un ricoprimento aperto di $\mathbb{P}^n$, esiste un aperto U_i; $V_{\mathbb{P}}(F) \cap U_i \neq \emptyset$. Perciò si ha che

$$U := V_{\mathbb{P}}(F) \cap U_i \cong V(aF)$$

dove aF è il deomogeneizzato di F rispetto a x_i. Ma, dato che $V_{\mathbb{P}}(F)$ è irriducibile, $V(aF)$ è un'ipersuperficie e quindi ha dimensione $n-1$, e U è un aperto in $V_{\mathbb{P}}(F)$ perciò ha la stessa dimensione. Questo conclude la dimostrazione.

3. Analogamente al punto precedente esiste i t.c. $X' := U_i \cap X \neq \emptyset$. X' è isomorfa ad una varietà affine U e

$$dim(X') = dim(U) = dim(X \cap U_i) = dim(X) = n-1$$

per ipotesi e dal teorema precedente. Ma allora, per l'analogo risultato nel caso affine,

$$U = V(f) \subseteq \mathbb{A}^n \Rightarrow X = j_i(U) = V_{\mathbb{P}}(F)$$

dove $F = hf$ è l'omogeneizzato di f.

□

1 Dimensione di Intersezioni con Ipersuperfici

Teorema 1.22. *Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso. Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$ una varietà affine e sia $V(F) \subseteq \mathbb{A}^n$ ipersuperficie irriducibile. Se $X \cap V(F) \neq \emptyset$ e $X \nsubseteq V(F)$, allora* $\dim(X \cap V(F)) = dim(X) - 1$.

Dimostrazione. Per il lemma di normalizzazione di Noether esiste $\pi\colon X \to \mathbb{A}^k$ morfismo finito e suriettivo. Ciò significa che il suo pull-back

$$\begin{aligned} \pi^*\colon A(\mathbb{A}^k) &\longrightarrow A(X) \\ \mathbb{K}[x_1, \dots, x_k] &\longrightarrow \frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}{I(X)} \end{aligned}$$

è un omomorfismo iniettivo, quindi $\pi^*\mathbb{K}[x_1, \dots, x_k] \cong \mathbb{K}[x_1, \dots, x_k]$.
Sia ora $f \in A(X)$ t.c. F sia un rappresentante di f, dalle ipotesi $f \neq 0$ in $A(X)$. Dato che π è finito, f è intero su $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_k]$:

$$\exists\, a_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_k];\ f^d + \sum_{i=0}^{d-1} \pi^* a_i(x_1, \dots, x_k) f^i = 0 \text{ in } A(X).$$

Poniamo quindi:

$$H(x_1, \dots, x_{k+1}) := x_{k+1}^d + \sum_{i=0}^{d-1} \pi^* a_i(x_1, \dots, x_k) x_{k+1}^i$$

e supponiamo H irriducibile (se non lo fosse, poiché siamo in un dominio, f annullerebbe uno dei suoi fattori irriducibili).
Definiamo a questo punto la mappa $\varphi\colon X \to \mathbb{A}^{k+1}$ come segue: Osserviamo che $\varphi = (p_k, F)$ è regolare in quanto le sue componenti lo sono. Inoltre possiamo fattorizzare π nel seguente modo:

$$\begin{tikzcd} \varphi\colon & X \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{A}^{k+1} \arrow[dl, "p_k"] \\ & \mathbb{A}^k & \end{tikzcd}$$

Ma allora, dal corollario (2), φ è finito, in quanto π è finito e $\pi = p_k \circ \varphi$. Ma se φ è finito, restringendo il suo codominio all'immagine otteniamo un morfismo finito e suriettivo, quindi chiuso, perciò $\varphi(X)$ è un chiuso in $\mathbb{A}^{k+1}$ e

$$dim(\varphi(X)) = dim(X) = k.$$

Vogliamo ora dimostrare che $\varphi(X) = V(H)$. Affermiamo che $\varphi(X) \subseteq V(H)$; infatti, preso

$$(p_1, \dots, p_k, F(p_1, \dots, p_n)) \in \varphi(X), \text{ con } (p_1, \dots, p_n) \in X$$

si ha che:

$$H(p_1, \dots, p_k, F(p_1, \dots, p_n)) = F(p_1, \dots, p_n)^d + \sum_{i=0}^{d-1} \pi^* a_i(p_1, \dots, p_k) F(p_1, \dots, p_n)^i$$

Ma F è un rappresentante di f e f annulla il polinomio H in $A(X)$ nel senso che ogni suo rappresentante valutato in H annulla tutti i punti di X pertanto se $(p_1, \dots, p_n)) \in X$,

$$H(p_1, \dots, p_k, F(p_1, \dots, p_n)) = 0$$

Dunque abbiamo l'inclusione $\varphi(X) \subseteq V(H)$. D'altra parte $\varphi(X)$ è chiuso e irriducibile, $V(H)$ è irriducibile e, infine, $\dim(\varphi(X)) = dim(V(H)) = k$, allora necessariamente $\varphi(X) = V(H)$.
A questo punto vogliamo caratterizzare l'intersezione $X \cap V(F)$, a partire da $V(H)$:

$$\begin{aligned} X \cap V(F) &= \{(p_1, \dots, p_n) \in X;\ F(p_1, \dots, p_n) = 0\} \xrightarrow{\varphi} \{(p_1, \dots, p_k, 0)\} \\ &= \varphi^{-1}(V(H) \cap V(x_{k+1})) \end{aligned}$$

Quindi un punto $(x_1, \ldots, x_{k+1}) \in \mathbb{A}^{k+1}$ sta nell'intersezione se soddisfa il seguente sistema:

$$\begin{cases} H = x_{k+1}^d + \sum_{i=0}^{d-1} \pi^* a_i(x_1, \ldots, x_k) x_{k+1}^i = 0 \\ x_{k+1} = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow a_0(x_1, \ldots, x_k) = 0^1$$

Allora possiamo descrivere $X \cap V(F)$ come:

$$\begin{aligned} X \cap V(F) &= \varphi^{-1}(V(H) \cap V(x_{k+1})) = \\ &= \varphi^{-1}(\underbrace{V(a_0(x_1, \ldots, x_k)) \times \{0\}}_{\subseteq \mathbb{A}^k \times \mathbb{A}^0 = \mathbb{A}^k}) \end{aligned}$$

Ma $V(a_0(x_1, \ldots, x_k)) \times \{0\} \cong V(a_0(x_1, \ldots, x_k))$ e quindi ha dimensione $k-1$, dato che $V(a_0(x_1, \ldots, x_k))$ è un'ipersuperficie di $\mathbb{A}^k$, allora

$$dim(\varphi^{-1}(V(a_0(x_1, \ldots, x_k)) \times \{0\}) = k - 1.$$

Quindi poiché φ è finito, anche

$$dim(X \cap V(F)) = k - 1 = dim(X) - 1.$$

□

Proposizione 7. *Sia $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ un chiuso riducibile, allora*

$$dim(Y) = max\{dim(Y_i);\ Y_i \textit{ componente irriducibile di } Y\}.$$

Dimostrazione. Innanzitutto decomponiamo Y nelle sue componenti irriducibili

$$Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_r, \text{ con } Y_i \not\subseteq Y_j.$$

Poiché $Y_i \subseteq Y,\ \forall i$, la disuguaglianza $(\geq)$ è verificata.
Viceversa sia

$$Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_k$$

una catena di Y. Vogliamo dimostrare che questa è in realtà una catena di una qualche comoponente irriducibile di Y, i.e.

$$\exists\ i;\ Z_k \subseteq Y_i.$$

Supponiamo, per assurdo, che non esista una tale componente allora abbiamo due casi: o Z_k contiene almeno una componente irriducibile Y_i di Y ma allora $Y_i = Z_k$ per unicità delle decomposizione di Y oppure Z_k non contiene nemmeno una componente irriducibile di Y. In tal caso avremo la decomposizione

$$Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_r \cup Z_k$$

che contraddice l'unicità della decomposizione di Y. In conclusione ogni catena di Y è una catena di una sua componente irriducibile e quindi vale la disuguaglianza $(\leq)$. □

[1]Notiamo esplicitamente che il polinomio a_0 non è nullo perché H è irriducibile, e non può essere nemmeno il polinomio costante in quanto se lo fosse allora

$$V(a_0(x_1, \ldots, x_k)) = \emptyset \ \Rightarrow\ X \cap V(F) = \emptyset$$

ma, per ipotesi, tale intersezione non è vuota.

Se X è irriducibile non è detto che l'intersezione con un'ipersuperficie $X \cap V(F)$ sia ancora irriducibile, tuttavia in ogni caso la dimensione scende di 1. Ora, nel caso generale, non avremmo informazioni sulla dimensione delle componenti irriducibili dell'intersezione tuttavia per $X \cap V(F)$ abbiamo il seguente risultato:

Proposizione 8. *Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso. Siano $X \subseteq \mathbb{A}^n$ una varietà affine e $V(F) \subseteq \mathbb{A}^n$ un'ipersuperficie t.c. $X \cap V(F) \neq \emptyset$ e $X \nsubseteq V(F)$. Allora, per ogni componente irriducibile Z di $X \cap V(F)$, si ha:*

$$dim(Z) = dim(X) - 1.$$

Dimostrazione. Decomponiamo $X \cap V(F)$ nelle sue componenti irriducibili, i.e.

$$X \cap V(F) = Z \cup W_1 \cup \ldots \cup W_s \text{ con } Z, W_i \text{ componenti irriducibili.}$$

Denotiamo $W := \bigcup W_i$, sia $G \in I(W) \setminus I(Z)$, allora $W \subseteq V(G)$ ma $Z \nsubseteq V(G)$ e quindi $G \notin I(X)$. Perciò ha senso considerare $X_G = X \setminus V(G)$ aperto principale: X_G è isomorfo ad una varietà affine

$$X_G \cong V(I(X), x_{n+1}G - 1) = Y \text{ mediante } X_G \xrightarrow{(Id, \frac{1}{G})} \mathbb{A}^{n+1}$$

ed, in particolare, vale che $\dim(X_G) = dim(Y)$. Ora si ha che

$$Y \cap V(F) \cong X_G \cap V(F) = X_G \cap Z \subseteq X \cap V(F)$$

D'altra parte è noto che $\dim(Y \cap V(F)) = dim(Y) - 1 = dim(X_G) - 1$ e dal teorema (1.21), $\dim(X_G) = dim(X)$, quindi si conclude che

$$dim(X_G \cap V(F)) = dim(X_G \cap Z) = dim(X_G) - 1 = dim(X) - 1.$$

□

Osservazione 1.23. Tutti i risultati finora enunciati per il caso affine, valgono per varietà proiettive, infatti dal teorema (1.21), possiamo studiare la dimensione di una varietà proiettiva X, lavorando su un suo sottoinsieme aperto. Ma allora basta mettersi su una carta affine di $\mathbb{P}^n$ che intersechi X, in quanto la carta affine è un aperto denso e quindi preserva le dimensioni.

2 Dimensione delle fibre di un morfismo

Teorema 1.24. *Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso. Siano X, Y varietà affini o proiettive e sia $f\colon X \to Y$ un morfismo tra di esse che sia suriettivo. Allora valgono le seguenti affermazioni:*

1. *Per ogni fibra $y \in Y$, $\dim(f^{-1}(y)) \geq dim(X) - dim(Y)$;*

2. *Se $\exists\, U \subseteq Y$ aperto t.c. $\forall y \in U,\ dim(f^{-1}(y)) = r$, allora $\dim(X) = dim(Y) + r$;*[2]

[2]Chiedendo, in aggiunta, che $f^{-1}(y)$ sia un chiuso irriducibile, la dimostrazione si semplifica notevolmente.

3. *Se $f\colon X \to Y$ è morfismo di varietà proiettive, esiste sempre un aperto non vuoto $U \subseteq Y$ t.c. $\forall y \in U,\ dim(f^{-1}(y)) = r$*

Corollario 8. *Valgono le seguenti affermazioni:*

1. *Siano X, Y varietà **qp**, allora $\dim(X \times Y) = dim(X) + dim(Y)$;*
2. *Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva non vuota. Allora, detto $C(X)$ il cono affine di X, vale $\dim(C(X)) = dim(X) + 1$.*

Dimostrazione. 1. Consideriamo la proiezione sulla prima componente:

$$p_1\colon X \times Y \longrightarrow X$$

Questo è un morfismo suriettivo con la fibra isomorfa a Y. Allora le fibre sono irriducibili e di dimensione costante e costantemente uguali a $\dim(Y)$, pertanto

$$dim(X \times Y) = dim(X) + dim(Y)$$

2. Sia $C(X) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ il cono affine sopra X e consideriamo $C(X) \setminus \{0\}$ aperto in $C(X)$. È noto che possiamo definire la proiezione dal cono affine tolto lo 0 in X, otteniamo quindi:

$$\begin{tikzcd} C(X) \setminus \{0\} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[d] \\ X \arrow[r] & \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

Ora $\forall x \in X$, $\pi^{-1}(x) \cong \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, irriducibile e dimensione 1, per ogni x. Ma allora si ha

$$dim(C(X) \setminus \{0\}) = dim(X) + 1.$$

Ma $C(X) \setminus \{0\}$ è aperto non vuoto di $C(X)$ e quindi hanno la stessa dimensione.

□

Teorema 1.25. *Siano $X \subseteq \mathbb{P}^n$ un chiuso proiettivo, $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ una varietà proiettiva e sia $f\colon X \to Y$ un morfismo suriettivo t.c. $\dim(f^{-1}(y)) = r$ e $f^{-1}(y)$ è irriducibile $\forall y \in Y$. Allora X è irriducibile.*

Dimostrazione. Decomponiamo X nelle sue componenti irriducibili

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_s$$

Per il teorema di completezza f è chiusa[3] , quindi $f(X_i) \subseteq Y$ è un chiuso $\forall i$ e $Y = \bigcup_{i=1}^{s} f(X_i)$. Ma Y è irriducibile pertanto

$$Y = f(X_i) \text{ per qualche } i$$

[3]Noi abbiamo enunciato il teorema di completezza per varietà proiettive ma in questo caso X è solo un chiuso proiettivo. Ciò non è un problema in quanto in realtà la dimostrazione fornita del teorema di completezza non sfrutta l'ipotesi di irriducibilità di X.

e in questo caso la restrizione di f alla componente X_i, i.e.

$$f_i := f_{|X_i} \colon X_i \longrightarrow Y$$

è ancora un morfismo suriettivo. Dunque dal teorema precedente esiste un aperto denso $V_i \subseteq Y$ t.c. $\dim(f_i^{-1}(y)) = r_i, \ \forall y \in V_i$ e, in più,

$$r_i = dim(X_i) - dim(Y).$$

Invece per quegli indici j tali che $f(X_j) \neq Y$, poniamo $U_j = Y \setminus f(X_j)$. Sia quindi $y \in \bigcap U_j$: allora, dato che per ipotesi $f^{-1}(y)$ è irriducibile in X, $f^{-1}(y) \subseteq X_i$ per qualche i, supponiamo $i = 1$, senza perdere di generalità. Ma allora segue che

$$f^{-1}(y) \subseteq f_1^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(y)$$

da cui

$$r_1 = dim(f_1^{-1}(y)) \leq dim(f^{-1}(y)) = r \leq r_1$$

e quindi $r = r_1$. D'altra parte se $y \notin \bigcap U_i$, poiché f_1 è suriettiva, la fibra sopra y non è vuota e vale l'inclusione

$$f_1^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(y)$$

quindi $\dim(f_1^{-1}(y)) \leq dim(f^{-1}(y)) = r$. Inoltre, dal teorema precedente,

$$dim(f_1^{-1}(y)) \geq dim(X_1) - dim(Y) = r_1 = r$$

allora $\dim(f_1^{-1}(y)) = dim(f^{-1}(y))$. Pertanto $f_1^{-1}(y) = f^{-1}(y)$, per ogni $y \in Y$, quindi $X = X_1$, irriducibile. □

3 Dimensione di Intersezioni

Teorema 1.26 (Dimensione di intersezioni tra varietà affini)**.** *Siano $X, Y \subseteq \mathbb{A}^n$ varietà affini t.c. $X \cap Y \neq \emptyset$. Allora ogni componente irriducibile Z di $X \cap Y$ è tale che*

$$dim(Z) \geq dim(X) + dim(Y) - n$$

Dimostrazione. Sia $\Delta \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ la diagonale e sia

$$\begin{aligned} \delta \colon \mathbb{A}^n &\longrightarrow \Delta \\ P &\longmapsto (P, P) \end{aligned}$$

isomorfismo tra Δ e $\mathbb{A}^n$. Dunque si ha:

$$\delta(X \cap Y) = \Delta \cap (X \times Y)$$

e perciò $X \cap Y$ è isomorfo a $\Delta \cap (X \times Y)$ e dunque hanno la stessa dimensione. Ma $\dim(X \times Y) = dim(X) + dim(Y)$ e

$$\Delta = V(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n) = V(x_1 - y_1) \cap \ldots \cap V(x_n - y_n)$$

e quindi, intersecando con ogni iperpiano la varietà prodotto la dimensione dell'intersezione può diminuire al più di 1, a seconda di come è fatto l'iperpiano. Pertanto si ottiene che:

$$dim(X \cap Y) \geq dim(X) + dim(Y) - n$$

□

Teorema 1.27 (Dimensione di intersezioni tra varietà proiettive)**.** *Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso. Siano $X, Y \subseteq \mathbb{P}^n$ varietà proiettive, allora valgono le seguenti affermazioni:*

1. *Se $X \cap Y \neq \emptyset$, allora $\forall Z \subseteq X \cap Y$ componente irriducibile, vale*
$$dim(Z) \geq dim(X) + dim(Y) - n;$$
2. *Se $\dim(X) + dim(Y) - n \geq 0$, allora $X \cap Y \neq \emptyset$.*

Osserviamo che, a differenza del caso affine, abbiamo informazioni sull'intersezione di due varietà a partire dalle dimensioni: in particolare il punto (2) di questo teorema non vale nell'affine, basti pensare a due rette parallele in $\mathbb{A}^2$, pertanto è un risultato notevole. Inoltre può essere interpretato come una generalizzazione del teorema di Bezout per curve algebriche piane.

Dimostrazione. 1. Consideriamo i coni affini sopra X e sopra Y, i.e. $C(X), C(Y) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$. Questi sono ancora irriducibili ed inoltre vale che $\forall Z$, componente irriducibile di $X \cap Y$, il cono sopra Z è irriducibile in $C(X \cap Y) = C(X) \cap C(Y)$. Infine, poiché per ipotesi $X \cap Y \neq \emptyset$, allora anche $C(X) \cap C(Y) \neq \emptyset$. Ma allora siamo nelle ipotesi del teorema (1.26), dunque:
$$dim(C(Z)) \geq dim(C(X)) + dim(C(Y)) - (n+1).$$
Ora, ricordando che, per ogni cono, vale $\dim(C(X)) = dim(X) + 1$, si ottiene che
$$dim(Z) \geq dim(X) + dim(Y) - n$$
e questo conclude la dimostrazione.

2. Supponiamo ora che valga $\dim(X) + dim(Y) - n \geq 0$. Osserviamo che $\{0\} \subseteq C(X) \cap C(Y)$ per definizione di cono. Ma allora per il teorema (1.26), presa una componente irriducibile $S \subseteq C(X) \cap C(Y)$, vale che
$$dim(S) \geq dim(C(X)) + dim(C(Y)) - (n+1).$$
Ma una componente irriducibile di $C(X) \cap C(Y)$ è necessariamente della forma cono sopra Z, con Z irriducibile, infatti ogni sottoinsieme irriducibile di un cono è contenuto in un cono irriducibile e le componenti irriducibili sono massimali rispetto all'inclusione. Pertanto otteniamo:
$$\begin{aligned} dim(C(Z)) &\geq dim(C(X)) + dim(C(Y)) - (n+1) = \\ &= dim(X) + 1 + dim(Y) + 1 - (n+1) \geq \\ &\geq dim(X) + dim(Y) - n + 1 \geq \\ &\geq 1 \end{aligned}$$
e da ciò segue che $C(Z)$ contiene almeno un elemento non nullo e dunque
$$Z \subseteq X \cap Y \neq \emptyset.$$

□

Corollario 9. $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \ncong \mathbb{P}^{n+m}$.

Dimostrazione. Supponiamo $m \geq n$. Se per assurdo $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \cong \mathbb{P}^{n+m}$, allora, in particolare si avrebbe che

$$\mathbb{P}^m \cong \{P\} \times \mathbb{P}^m \xrightarrow{\cong} Z_1 \subseteq \mathbb{P}^{n+m}$$
$$\mathbb{P}^m \cong \{Q\} \times \mathbb{P}^m \xrightarrow{\cong} Z_2 \subseteq \mathbb{P}^{n+m}$$

e, valutando le dimensioni di Z_1, Z_2 si ottiene:

$$dim(Z_1) + dim(Z_2) - (n+m) = 2m - n - m \geq 0.$$

Ma allora dal teorema (1.27) segue che $Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$, nonostante

$$(\{P\} \times \mathbb{P}^m) \times (\{Q\} \times \mathbb{P}^m) = \emptyset.$$

Abbiamo raggiunto una contraddizione. $\square$