Note di Istituzioni di Geometria Superiore 3

14 maggio 2018

Indice

Capitolo 1

Prodotti

1.1 Prodotti di varietà affini

Abbiamo già incontrato gli spazi prodotto in alcuni casi particolari, vogliamo adesso definire il prodotto di varietà affini e studiarne le proprietà.
Abbiamo già osservato che la topologia di Zariski $\mathbb{A}^{n+m}$ è strettamente più fine della topologia prodotto di $\mathbb{A}^n$ e $\mathbb{A}^m$. Date $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$, muniamo il prodotto cartesiano $X \times Y$ della topologia indotta da $\mathbb{A}^{n+m}$, sfruttando l' identificazione $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m}$.

Teorema 1. *Siano $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ due varietà affini. Allora*

1. *$X \times Y \subseteq A^{n+m}$, munito della topologia di Zariski indotta, è una varietà affine;*
2. *Le due proiezioni sono morfismi di varietà affini*

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & X \\ Y & \end{tikzcd}$$

3. *Per ogni varietà affine $Z \subseteq \mathbb{A}^k$, esiste una biezione*

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}\,(Z, X \times Y) &\longrightarrow \mathrm{Mor}\,(Z, X) \times \mathrm{Mor}\,(Z, Y) \\ h &\longmapsto (p_1 \circ h,\ p_2 \circ h) \end{aligned}$$

cioè il prodotto di varietà affini gode della proprietà universale nella categoria $\mathcal{C} := \{$varietà affini, morfismi$\}$.

Dimostrazione. 1. Per ipotesi, X, Y sono chiusi quindi $X = V(f_1, \ldots, f_r)$ e $Y = V(g_1, \ldots, g_s)$. Quindi

$$\begin{aligned} X \times Y &= \{(x, y) \in \mathbb{A}^{n+m};\ x \in V(f_1, \ldots, f_r), y \in V(g_1, \ldots, g_s)\} = \\ &= V(f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s) \subseteq \mathbb{A}^{n+m}. \end{aligned}$$

Dobbiamo ora mostrare che $X \times Y$ è irriducibile. Definiamo, $\forall P \in X,\ \forall Q \in Y$ le seguenti applicazioni:

$$\begin{aligned} i_Q \colon X &\longmapsto X \times Y \qquad & j_P \colon Y &\longmapsto X \times Y \\ x &\longmapsto (x, Q) & y &\longmapsto (P, y) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Queste mappe sono continue: ad esempio sia $Q = (q_1, \ldots, q_m) \in Y$, allora $i_Q(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, q_1, \ldots, q_m)$. Poichè tutte le componenti sono regolari, i_Q è un morfismo e quindi una funzione continua. Analogamente anche j_P è un morfismo, e quindi continuo. Essendo X e Y irriducibili, segue che anche $X \times Y$ è irriducibile (Esercizio).

2. Osserviamo che le componenti delle due proiezioni sono delle funzioni coordinate, quindi sono funzioni regolari.

3. L'applicazione che associa a $h \in \mathrm{Mor}\,(Z, X \times Y)$ l'elemento $(\pi_X \circ h,\ \pi_Y \circ h) \in \mathrm{Mor}\,(Z, X) \times \mathrm{Mor}\,(Z, Y)$ è ben definita, in quanto $\pi_X \circ h,\ \pi_Y \circ h$ sono morfismi perché composizione di morfismi. Viceversa, presi $h_1 \in Hom(Z, X),\ h_2 \in Hom(Z, Y)$, definendo $h = (h_1, h_2) \colon Z \to X \times Y$, otteniamo un morfismo in quanto le sue componenti sono regolari. Questa applicazione è proprio l'inversa di (3) e questo conclude la dimostrazione.

□

1.2 Prodotti di varietà qp

Diversamente dal caso affine, nel caso proiettivo, un prodotto di varietà qpnon si immerge in modo immediato in uno spazio proiettivo; vedremo, infatti, che $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ non è identificabile con $\mathbb{P}^N$ per un qualche N. C'è un modo naturale di immergere un prodotto di spazi proiettivi in uno spazio proiettivo, tramite la mappa di Segre.

Definizione 1.1 (Immersione di Segre)**.** Denotiamo con $M((n+1) \times (m+1), \mathbb{K})$, l'insieme delle matrici $(n+1) \times (m+1)$ a coefficienti in $\mathbb{K}$. Diremo immersione di Segre di tipo (n, m), l'applicazione

$$\begin{aligned} \sigma_{n,m} \colon \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \times \mathbb{K}^{m+1} \setminus \{0\} &\longrightarrow M((n+1) \times (m+1), \mathbb{K}) \\ (v, w) &\longmapsto v \cdot w^T \\ (v_0, \ldots, v_n),\ (w_0, \ldots, w_m) &\longmapsto \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \cdot (w_0, \ldots, w_m) = \begin{pmatrix} v_0 w_0 & \ldots & v_0 w_m \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_n w_0 & \ldots & v_n w_m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Osservazione 1. *Se $v' = \lambda v,\ w' = \mu w$ allora*

$$\sigma_{n,m}(v', w') = v' \cdot w'^T = \lambda\mu\, v \cdot w^T$$

La mappa di Segre si può quindi definire anche sul prodotto di spazi proiettivi.

Definizione 1.2 (Immersione di Segre proiettiva)**.** Definiamo immersione di Segre proiettiva di tipo (n, m) l'applicazione

$$\begin{aligned} \sigma_{n,m} \colon \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m &\longrightarrow \mathbb{P}(M((n+1) \times (m+1), \mathbb{K})) \\ ([v], [w]) &\longmapsto [v \cdot w^T] \end{aligned}$$

Denotiamo con

$$\Sigma_{n,m} := \sigma_{n,m}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$$

l'immagine della mappa di Segre.

Teorema 1.3. *Valgono le seguenti affermazioni:*

1. $\sigma_{n,m} : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}(M((n+1)\times(m+1),\mathbb{K}))$ *è iniettiva,* $\Sigma_{n,m}$ *è un chiuso, e coincide con la proiezione dell'insieme delle matrici di rango* 1*, i.e.*
$$\Sigma_{n,m} = V_{\mathbb{P}}(\{z_{ij}z_{kl} - z_{kj}z_{il}\})$$
dove $z_{ij}z_{kl} - z_{kj}z_{il}$*, al variare degli indici, sono tutti i minori di ordine* 2 *della matrice:*
$$\begin{pmatrix} z_{00} & \dots & z_{0m} \\ \vdots & & \\ z_{n0} & \dots & z_{nm} \end{pmatrix}$$

2. *Se* $P \in \mathbb{P}(M((n+1)\times(m+1),\mathbb{K}))$ *ha coordinate omogenee*
$$P = [(p_{00}, p_{01}, \dots, p_{nm})] = [(p_{ij})],$$
poniamo $\Sigma^{ij} := \Sigma_{n,m} \cap U_{ij}$*, dove*
$$U_{ij} = \{P \in \mathbb{P}(M((n+1)\times(m+1),\mathbb{K}));\ p_{ij} \neq 0\}.$$
Sia $\psi_{ij} \colon \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \to \Sigma^{ij}$ *l'applicazione che rende il seguente diagramma commutativo:*
$$\begin{tikzcd} U_i \times V_j \arrow[r, "\sigma_{ij}"] \arrow[d, "\varphi_i \times \phi_j"'] & \Sigma^{ij} \\ \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \arrow[ur, "\psi_{ij}"'] & \end{tikzcd}$$
dove
$$\sigma_{ij} := (\sigma_{n,m})_{|U_i \times V_j}.$$
Allora ψ_{ij} *sono isomorfismi;*

3. $\forall Q \in \mathbb{P}^n, \forall P \in \mathbb{P}^m$*, le mappe:*
$$\begin{array}{rcl} i_Q \colon \mathbb{P}^n & \longmapsto & \mathbb{P}^N \\ P & \longmapsto & \sigma_{n,m}(P,Q) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} j_P \colon \mathbb{P}^m & \longmapsto & \mathbb{P}^N \\ R & \longmapsto & \sigma_{n,m}(P,R) \end{array}$$
sono morfismi che immergono rispettivamente $\mathbb{P}^n,\ \mathbb{P}^m$*, come sottospazi lineari;*

4. *Siano* $X \subseteq \mathbb{P}^n,\ Y \subseteq \mathbb{P}^m$ *varietà* ***qp****, allora* $\sigma_{n,m}(X \times Y)$ *è una varietà* ***qp****.*

Esempio 1.4. Consideriamo il caso $n = 1 = m$. Allora $\mathbb{P}(M(2\times 2,\mathbb{K})) = \mathbb{P}^3$ e la mappa di Segre è data da:
$$\sigma_{1,1} \colon \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3 \tag{1.2}$$
$$([v_0, v_1], [w_0, w_1]) \longmapsto \begin{pmatrix} v_0w_0 & v_0w_1 \\ v_1w_0 & v_1w_1 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Allora $\Sigma_{1,1} = V_{\mathbb{P}}(z_{00}z_{11} - z_{01}z_{10}) = Q$ è una quadrica di $\mathbb{P}^3$ (infatti deomogeneizzando nella carta $U_{00} = \{z_{00} \neq 0\}$ si ha $z - xy = 0$, i.e. una sella).
Fissato un punto $P = [p_0, p_1] \in \mathbb{P}^1$, si ha:

$$\begin{aligned} j_P \colon \mathbb{P}^m &\longmapsto \mathbb{P}^N \\ [w_0, w_1] &\longmapsto \sigma_{1,1}(P, W) = \begin{pmatrix} p_0w_0 & p_0w_1 \\ p_1w_0 & p_1w_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dunque otteniamo che l'immagine del morfismo j_P, con P punto fissato, in $\mathbb{P}^3$ è dato dai punti della forma

$$[p_0w_0, p_0w_1, p_1w_0, p_1w_1] = w_0[a_0, 0, a_1, 0] + w_1[0, a_0, 0, a_1]$$

al variare di $[w_0, w_1]$. Ma questa è una retta di $\mathbb{P}^3$ come ci aspettavamo da (1.3).
Infine vediamo com'è fatta la mappa σ_{00} definita sulla carta $U_0 \times V_0 \subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$:

$$\sigma_{00} = (\sigma_{1,1})_{|U_0 \times V_0} \colon ([1, v], [1, w]) \mapsto (v, w) \in \mathbb{A}^2 \to \begin{pmatrix} 1 & w \\ v & vw \end{pmatrix} \in \Sigma_{00}$$

Procediamo ora alla dimostrazione del teorema (1.3):

Dimostrazione. 1. Vediamo innanzitutto l'iniettività della mappa di Segre. Prendiamo due punti in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$:

$$\begin{aligned} [v; w] &= ([v_0, \ldots, v_n], [w_0, \ldots, w_m]) \\ [v'; w'] &= ([v'_0, \ldots, v'_n], [w'_0, \ldots, w'_m]) \end{aligned}$$

e supponiamo $\sigma_{n,m}([v; w]) = \sigma_{n,m}([v'; w'])$, allora vale che $[v \cdot w^T] = [v' \cdot w'^T] \Leftrightarrow [(v_iw_j)] = [(v'_iw'_j)]$. Ma allora esiste uno scalare non nullo λ t.c. $v'_iw'_j = \lambda v_iw_j,\ \forall i, j$. In particolare, poiché siamo nel proiettivo, troviamo una coordinata non nulla, i.e.

$$\exists\, k, l;\ v_kw_l \neq 0 \Rightarrow v_kw_l = \underbrace{\lambda}_{\neq 0} \underbrace{v'_kw'_l}_{\neq 0}$$

quindi $\forall i, v_iw_l = \lambda v'_iw'_l$ implica che $v_i = \lambda \frac{w'_l}{w_l} v'_i$. Analogamente si vede che i w_j sono proporzionali ai w'_j e ciò implica che $\sigma_{n,m}$ è iniettiva.
Per la seconda parte della dimostrazione, segue dalla definizione che $\Sigma_{n,m} \subseteq V_{\mathbb{P}}(\{z_{ij}z_{kl} - z_{kj}z_{il}\})$. Verifichiamo l'inclusione opposta: sia quindi $P = [(a_{ij})] \in V_{\mathbb{P}}(\{z_{ij}z_{kl} - z_{kj}z_{il}\})$. Sicuramente esiste una coordinata $a_{kl} \neq 0$ dunque $[(a_{ij})] = [(a_{ij}a_{kl})]$. Ma le coordinate di P soddisfano il legame $z_{ij}z_{kl} - z_{kj}z_{il}$ e quindi segue che:

$$P = [(a_{ij})] = [(a_{ij}a_{kl})] = [(a_{kj}a_{il})] = \sigma_{n,m}\Big(\begin{pmatrix} a_{0l} \\ \vdots \\ a_{nl} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k0} \\ \vdots \\ a_{km} \end{pmatrix} \Big).$$

Questo conclude la dimostrazione.
3. Fissiamo $Q \in \mathbb{P}^m$ e studiamo l'immagine di $\mathbb{P}^n$ mediante i_Q:
$i_Q(P) = i_Q([x_0, \ldots, x_n]) = \sigma_{n,m}(P, Q) =$

$$\begin{pmatrix} x_0q_0 & \ldots & x_0q_m \\ \vdots & & \\ x_nq_0 & \ldots & x_nq_m \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} q_0 & \ldots & q_m \\ \vdots & & \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \\ q_0 & \ldots & q_m \end{pmatrix}$$

e tutte le matrici hanno rango 1 (perchè almeno una delle coordinate q_i è non nulla) e inoltre sono tutte linearmente indipendenti quindi identificano punti in posizione generale di $\mathbb{P}^N$. Ciò mostra che $\mathbb{P}^n$ si immerge come sottospazio lineare in $\mathbb{P}^N$. In modo del tutto analogo si verifica l'altra parte del teorema.
2. Vogliamo dimostrare che ψ_{ij} sia un isomorfismo. Studiamo il caso $i = 0 = j$, per gli altri il ragionamento sarà analogo. Osserviamo che la mappa ψ_{00} agisce nel seguente modo:

$$\psi_{00}\colon \overbrace{(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_m)}^{\in \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m} \to \overbrace{[1, a_1, \dots, a_n; 1, b_1, \dots, b_m]}^{\in U_0 \times V_0} \to \begin{pmatrix} 1 & b_1 & \dots & b_m \\ a_1 & a_1 b_1 & \dots & a_1 b_m \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

Ora ψ_{00} è un'applicazione tra uno spazio affine ed un sottoinsieme di uno spazio proiettivo, dunque per verificare che sia un morfismo, possiamo studiare la sua azione su $\varphi_{00}(\Sigma^{00}) \cong \Sigma^{00}$: si ha perciò la mappa

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m &\longrightarrow \mathbb{A}^N \\ (a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_m) &\longmapsto (b_1, \dots, b_m, a_1, a_1 b_1, \dots, a_1 b_m, \dots) \end{aligned}$$

Ma questa mappa ha componenti polinomiali allora ψ_{00} è un morfismo.
Ricerchiamo ora un'inversa di ψ_{00} e verifichiamo sia anch'essa un morfismo. L'inversa insiemistica è data dalla mappa

$$\begin{aligned} \Sigma^{00} &\longmapsto \mathbb{A}^{n+m} \\ \begin{pmatrix} a_{00} & \dots & a_{0m} \\ \vdots & & \\ a_{n0} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} &[a_{00}, a_{10}, \dots, a_{n0}; a_{00}, a_{01}, \dots, a_{0m}] \\ &\mapsto \left(\frac{a_{10}}{a_{00}}, \dots, \frac{a_{n0}}{a_{00}}; \frac{a_{01}}{a_{00}}, \dots, \frac{a_{0m}}{a_{00}}\right) \end{aligned}$$

Dato che si tratta di un'applicazione da un sottoinsieme di uno spazio proiettivo ad uno spazio affine, è un morfismo se e solo se tutte le sue componenti sono regolari, i.e. stanno in $\mathcal{O}_{\Sigma^{00}}(\Sigma^{00})$. In questo caso poiché in Σ^{00}, a_{00} non è mai nullo le componenti sono sempre ben definite e sono quozienti di polinomi omogenei dello stesso grado, dunque sono le componenti sono funzioni regolari. Questo conclude la dimostrazione.
4. Verifichiamo innanzitutto che $\sigma_{n,m}\colon \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^N$ è un omeomorfismo sull'immagine. Sicuramente $\sigma_{n,m}$ è continua infatti, preso $Z \subseteq \Sigma_{n,m}$ chiuso (nella topologia indotta da $Zar(\mathbb{P}^N)$), allora $Z = V_{\mathbb{P}}(G_1, \dots, G_k) \cap \Sigma_{n,m}$, con G_i polinomi omogenei. Perciò

$$\sigma_{n,m}^{-1}(Z) = \{[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m];\ G_i(\dots, x_k y_l, \dots) = 0,\ \forall i\}$$

ma questo è un chiuso in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ in quanto è luogo di zeri di polinomi biomogenei di bigrado (d_i, d_i) (infatti G_i è un polinomio omogeneo di grado d_i, valutato in $x_k y_l$ che sono polinomi biomogenei di bigrado $(1, 1)$).
Inoltre $\sigma_{n,m}$ è iniettiva e quindi invertibile sull'immagine. Rimane solo da provare che l'inversa sia continua: verifichiamo dunque che sia chiusa. Sia $C \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$

un chiuso, allora $C = V_{\mathbb{P}}(F_1, \dots, F_s)$ con $F_i = F_i(x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m)$ polinomi biomogenei di bigrado (d_i, e_i). Quindi si ha:

$$\sigma_{n,m}(C) = \{[(p_i q_j)_{ij}];\ F_i(p_0, \dots, p_n, q_0, \dots, q_m) = 0,\ \forall i\}.$$

Ora F_i è biomogeneo ma, in generale, non ha bigrado (d_i, d_i), come richiesto per avere un chiuso in questo caso (infatti vorremmo descrivere $\sigma_{n,m}(C)$ come luogo di zeri di polinomi che sono omogenei quando valutati in $[(p_i q_j)_{ij}]$). Ma ciò è sempre possibile sostituendo a F_i un insieme di polinomi ottenuti moltiplicando F_i con opportune potenze di opportune indeterminate: otterremo lo stesso luogo di zeri perchè il punto di coordinate omogenee tutte nulle non ha senso nel proiettivo (si veda l'esempio (1.5)).
In conclusione $\sigma_{n,m}$ è un omeomorfismo sull'immagine. Siamo ora pronti per dimostrare l'ultimo punto del teorema.
Siano X, Y come nelle ipotesi, allora $X \times Y$ è chiuso in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ infatti $X = V_{\mathbb{P}}(F_1, \dots, F_r)$, $Y = V_{\mathbb{P}}(G_1, \dots, G_s)$ e quindi $X \times Y = V_{\mathbb{P}}(F_1, \dots, F_r, G_1, \dots, G_s)$ dove adesso gli F_i sono polinomi biomogenei di bigrado $(d_i, 0)$ e i G_j sono polinomi biomogenei di bigrado $(0, e_j)$. Ma allora $\sigma_{n,m}(X \times Y)$ è chiuso. È anche irriducibile? Dai punti precedenti è noto che:

$$\Sigma_{n,m} = \bigcup_{i,j} \Sigma^{ij},\ \text{con } \Sigma^{ij} \cong \mathbb{A}^{n+m}$$

e in particolare i Σ^{ij} sono irriducibili. Dunque

$$\sigma_{n,m}(X \times Y) = \bigcup_{i,j} (\Sigma^{ij} \cap \sigma_{n,m}(X \times Y)) = \bigcup_{i,j} \sigma_{n,m}((U_i \times V_j) \cap (X \times Y)). \tag{1.4}$$

Ma ora $(U_i \times V_j) \cap (X \times Y) = (U_i \cap X) \times (V_j \cap Y)$ e $U_i \cap X$, $V_j \cap Y$ sono irriducibili in quanto, ad esempio, $U_i \cap X$ è aperto in X irriducibile e quindi è a sua volta irriducibile oppure è vuoto. Allora $(U_i \cap V_j) \times (X \cap Y)$ è prodotto di irriducibili in $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$ e quindi è irriducibile, inoltre $\sigma_{n,m}((U_i \cap V_j) \times (X \cap Y))$ è irriducibile in quanto è immagine continua di un irriducibile.
Infine si ottiene che (1.4) è un ricoprimento di $\sigma_{n,m}(X \times Y)$ di aperti irriducibili con intersezione a due a due non vuota; non è difficile verificare che uno spazio topologico con questa proprietà risulta irriducibile. $\square$

Esempio 1.5. Sia $F(x_0, x_1; y_0, y_1) = x_0^2 y_1 - x_0 x_1 y_0 + x_1^2 y_1$ polinomio biomogeneo di bigrado $(2, 1)$. Tale polinomio individua in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ un chiuso $C := V_{\mathbb{P}}(F)$. Vogliamo studiare la sua immagine mediante la mappa di Segre, i.e. $\sigma_{1,1}(C)$. Ora, ricordando l'azione di $\sigma_{1,1}$ in (1.2), si ha che per avere un chiuso in $\mathbb{P}^3$, F deve essere omogeneo quando valutato in $z_{ij} = x_i y_j \Rightarrow F$ deve essere biomogeneo di bigrado $(2, 2)$. Definiamo il sistema:

$$\begin{cases} y_0 F = 0 \\ y_1 F = 0 \end{cases}$$

Questo sistema è equivalente ad avere $F = 0$ nel proiettivo, ma ora i polinomi che vi compaiono sono di bigrado $(2, 2)$. In questo modo si vede che $\sigma_{1,1}(C)$ è un chiuso nella topologia indotta infatti:

$$\sigma_{1,1}(C) = \Sigma_{1,1} \cap V_{\mathbb{P}}(z_{00} z_{01} - z_{00} z_{10} + z_{10} z_{11}, z_{01}^2 - z_{00} z_{11} + z_{11}^2).$$

Teorema 1.6. *Siano $X \subseteq \mathbb{P}^n$, $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ varietà* **qp***. Allora $\sigma_{n,m}(X \times Y)$ gode della proprietà universale.*

1.3 Proprietà topologiche delle varietà qp

Per spazi topologici qualsiasi abbiamo le seguenti caratterizzazioni: uno spazio topologico X è di Hausdorff se e solo se la diagonale

$$\Delta_X := \{(x, x);\ x \in X\} \subseteq X \times X$$

è chiusa nella topologia prodotto. Inoltre si ha che uno spazio topologico è compatto e di Hausdorff se e solo se $\forall Y$ spazio topologico, la proiezione sul secondo fattore $p_2\colon X \times Y \to Y$ è chiusa. L'implicazione $(\Leftarrow)$ è nota come teorema di Kuratowski-Mrowka (1930). Nel caso delle varietà quasi-proiettive otteniamo dei risultati analoghi, a patto di munire il prodotto di varietà con la topologia di Zariski, come fatto nella sezione precedente.

Definizione 1.7 (Varietà separata)**.** Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà **qp**. Diremo che X è separata se la diagonale $\Delta \subseteq X \times X$ è chiusa nella topologia (di Zariski) di $X \times X$, indotta dalla topologia di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$.

Definizione 1.8 (Varietà completa)**.** Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà **qp**. Diremo che X è completa se per ogni varietà **qp** $Y \subseteq \mathbb{P}^m$, la proiezione sul secondo fattore $p_2\colon X \times Y \to Y$ è chiusa.

Proposizione 1. *Ogni varietà* **qp** *è separata.*[1]

Dimostrazione. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà **qp** e sia $\Delta_X \subseteq X \times X \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ la diagonale. Naturalmente $\Delta_X = \{(P; P);\ P \in X\}$ si può scrivere come $\Delta_{\mathbb{P}^n} \cap X \times X$, ma allora basta provare che $\Delta_{\mathbb{P}^n}$ sia chiusa in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$. Ora scriviamo

$$\Delta_{\mathbb{P}^n} = \{[a_0, \dots, a_n; b_0, \dots, b_n] \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n;\ rk \begin{pmatrix} a_0 & \dots & a_n \\ b_0 & \dots & b_n \end{pmatrix} = 1\}.$$

Ma allora $\Delta_{\mathbb{P}^n} = V_{\mathbb{P}}(\{x_i y_j - x_j y_i\})$ e quindi è un chiuso in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ in quanto i polinomi $x_i y_j - x_j y_i$ sono biomogenei di bigrado $(1, 1)$. $\square$

Corollario 1. *Siano X, Y varietà* **qp** *e siano $f, g\colon X \to Y$ morfismi, allora l'insieme $Z := \{P \in X;\ f(P) = g(P)\}$ è un chiuso in X.*

Dimostrazione. Dalla proposizione precedente sappiamo che $\Delta_{X \times Y}$ è chiusa. Definiamo dunque l'applicazione:

$$\begin{aligned} (f, g)\colon X &\longrightarrow X \times Y \\ P &\longmapsto (f(P), g(P)) \end{aligned}$$

Tale mappa è sicuramente continua in quanto f e g sono morfismi, quindi continui. Ma allora $Z = (f, g)^{-1}(\Delta_{X \times Y})$ è un chiuso. $\square$

[1] Questo risultato non è in contraddizione col fatto che $\mathbb{P}^n$ con la topologia di Zariski non è di Hausdorff, infatti la topologia che andiamo a considerare su $X \times X$ è strettamente pi̇̆fine della topologia prodotto.

Corollario 2. *Siano X, Y varietà* **qp** *e sia $f\colon X \to Y$ un morfismo tra varietà* **qp**, *allora $G_f = \{(x,y);\ y = f(x)\} \subseteq X \times Y$ è chiuso. Inoltre*

$$\begin{aligned} g\colon X &\longrightarrow G_f \\ P &\longmapsto (P, f(P)) \end{aligned}$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione. Definiamo il morfismo seguente:

$$\begin{aligned} f \times Id_Y\colon X \times Y &\longrightarrow Y \times Y \\ (P,Q) &\longmapsto (f(P), Q) \end{aligned}$$

Tale morfismo è continuo e $G_f = (f \times Id_Y)^{-1}(\Delta_{Y\times Y})$. Poiché, dalla proposizione (1), $\Delta_{Y\times Y}$ è chiusa, anche G_f lo è.
Ora $g\colon X \to G_f;\ P \mapsto (P, f(P)) \in X \times Y \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \cong \Sigma_{n,m}$ è sicuramente un morfismo. Inoltre g è invertibile e l'inversa insiemistica è data da

$$\begin{aligned} g^{-1}\colon G_f &\longrightarrow X \\ (P, f(P)) &\longmapsto P \end{aligned}$$

Questa è la restrizione a G_f della proiezione sulla prima componente e quindi è un morfismo. □

Teorema 1.9 (Teorema di completezza)**.** *Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso e sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva allora X è una varietà completa. In più vale che $X \subseteq \mathbb{P}^n$ è una varietà* **qp** *completa $\Leftrightarrow$ X è una varietà proiettiva.*

Dimostrazione. Sia $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ una varietà **qp**, dobbiamo provare che $p_2\colon X \times Y \to Y$ sia chiusa. Osserviamo innanzitutto che è sufficiente provare il risultato per $X = \mathbb{P}^n$ infatti se la proiezione sul secondo fattore $p_2\colon \mathbb{P}^n \times Y \to Y$ è chiusa anche la sua restrizione a $X \times Y$, i.e.

$$(p_2)_{|X\times Y}\colon X \times Y \longrightarrow Y$$

è chiusa: sia $Z \subseteq X \times Y$ un chiuso $\Rightarrow$ $Z \subseteq \mathbb{P}^n \times Y$ è chiuso in quanto X è varietà proiettiva e quindi è chiusa in $\mathbb{P}^n$. Ciò significa dunque che $p_2(Z)$ è chiuso $\Rightarrow$ $(p_2)_{|X\times Y}(Z)$ è chiuso in Y.
Inoltre possiamo supporre senza perdere di generalità, che $Y = \mathbb{P}^m$ infatti, preso $Z \subseteq \mathbb{P}^n \times Y$ chiuso, sicuramente $\overline{Z} \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ è chiuso, ma allora, denotando con $\tilde{p}_2\colon \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^m$, $\tilde{p}_2(\overline{Z})$ è chiuso. Ora si ha:

$$p_2(Z) = p_2(\overline{Z} \cap (\mathbb{P}^n \times Y)) = \tilde{p}_2(\overline{Z} \cap (\mathbb{P}^n \times Y)) = \tilde{p}_2(\overline{Z}) \cap Y$$

e questo è un chiuso in Y (osserviamo esplicitamente che in generale per funzioni non iniettive non è vero che $\tilde{p}_2(\overline{Z} \cap (\mathbb{P}^n \times Y)) = \tilde{p}_2(\overline{Z}) \cap Y$, tuttavia in questo caso l'uguaglianza è comunque valida).
Procediamo dunque alla dimostrazione del teorema con $X = \mathbb{P}^n$ e $Y = \mathbb{P}^m$: sia $Z \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ un chiuso, allora $Z = V_{\mathbb{P}}(f_1, \ldots, f_r)$, dove i polinomi $f_i \in$

$\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n; y_0, \ldots, y_m]$ sono biomogenei di bigrado (d_i, e_i). Eventualmente sostituendo f_i con $x_0^{d-d_i} f_i, \ldots, x_n^{d-d_i} f_i$, possiamo supporre che tutti i $d_i = d$. Ora $P = [p_0, \ldots, p_m] \in p_2(Z) \subseteq \mathbb{P}^m$ se e solo se $\exists Q \in \mathbb{P}^n$; $(Q; P) \in Z$, ma

$$\begin{aligned}(Q; P) \in Z &\Leftrightarrow V_{\mathbb{P}}(f_1(x_i; P), \ldots, f_r(x_i; P)) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow (f_1(x_i; P), \ldots, f_r(x_i; P)) \not\supseteq \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_s,\ \forall s \end{aligned} \tag{1.5}$$

come segue dalla proposizione che caratterizza l'insieme vuoto nello spazio proiettivo. Ma allora, definendo

$$T_s := \{P \in \mathbb{P}^m;\ (f_1(x_i; P), \ldots, f_r(x_i; P)) \not\supseteq \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_s\}$$

si ottiene che $p_2(Z) = \bigcap_{s \in \mathbb{N}} T_s$. Allora, dimostrando che T_s è chiuso, si conclude. Innanzitutto si ha che i polinomi $f_j(x_i; P)$ hanno tutti grado d (nelle x_i), allora per $s < d$ la condizione (1.5) è soddisfatta da ogni $P \in \mathbb{P}^m$, quindi $T_s = \mathbb{P}^m$ è chiuso. Se invece $s \geq d$, la condizione (1.5) è verificata se e solo se

$$(f_1(x_i; P), \ldots, f_r(x_i; P)) \cap \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_s \subset \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_s.$$

Ma $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_s$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione $\binom{n+s}{n}$ e quindi possiamo vedere $(f_1(x_i; P), \ldots, f_r(x_i; P)) \cap \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_s$ come un sottospazio vettoriale $\Rightarrow$ possiamo riformulare la condizione (1.5), in maniera equivalente:

$$dim((f_1(x_i; P), \ldots, f_r(x_i; P)) \cap \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_s) < \binom{n+s}{n} \tag{1.6}$$

Ora $(f_1(x_i; P), \ldots, f_r(x_i; P)) \cap \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_s = Span\{N_\beta(x_i) f_j(x_i; P)\}$, dove $N_\beta(x_i)$ sono tutti i monomi di grado $s - d$ nelle x_i, poniamo

$$G_{\beta_j}(x_i; y_k) := N_\beta(x_i) f_j(x_i; y_k).$$

G_{β_j} sono polinomi biomogenei di bigrado (s, e_j), possiamo pertanto evidenziare la parte di grado s nelle x_i, scrivendo:

$$G_{\beta_j}(x_i; y_k) = \sum_\alpha A_\alpha^{\beta_j}(y_k) M_\alpha(x_i),$$

dove M_α sono i monomi di grado s nelle x_i e gli $A_\alpha^{\beta_j}$ sono opportuni polinomi omogenei di grado e_j. Infine abbiamo che:

$$Span\{N_\beta(x_i) f_j(x_i; P)\} = Span\{G_{\beta_j}(x_i; P)\} = Span\{\sum_\alpha A_\alpha^{\beta_j}(P) M_\alpha(x_i)\}.$$

Poiché $\{M_\alpha(x_i)\}$ è una base di $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_s$, la matrice associata al sottospazio in esame è data da $(A_\alpha^{\beta_j}(P))_\alpha$, perciò vale (1.6) se e solo se

$$rk(A_\alpha^{\beta_j}(P)) < \binom{n+s}{n}$$

che è equivalente a chiedere che tutti i minori di ordine $\binom{n+s}{n}$ di tale matrice siano nulli. Ora la matrice $(A_\alpha^{\beta_j}(P))$ ha su ogni riga polinomi omogenei dello stesso grado e_j (per la j-esima riga) nelle $y_1, \ldots, y_m$ allora tutti i minori sono polinomi omogenei $\Rightarrow$ imponendo la condizione sul rango si trovano dei polinomi omogenei il cui luogo degli zeri è proprio T_s che è quindi un chiuso in $\mathbb{P}^m$. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Teorema 1.10. *Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso e siano $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva, $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ una varietà* **qp**. *Allora ogni morfismo $f\colon X \to Y$ è chiuso.*

Dimostrazione. Sia $g\colon X \to G_f$ l'isomorfismo definito in (2). Allora abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \\ G_f \arrow[ur, "p_2"'] & \end{tikzcd}$$

da cui segue che $f(X) = p_2(G_f)$ e quindi $f(X)$ è chiuso. Sia quindi $Z \subseteq X$ un chiuso: poiché X è una varietà proiettiva, X è uno spazio topologico Noetheraino e quindi possiamo scrivere Z evidenziandone le componenti irriducibili, i.e.

$$Z = Z_1 \cup \ldots \cup Z_r \text{ con } Z_i \text{ chiuso e irriducibile}$$

Poiché Z_i è chiuso e irriducibile in $\mathbb{P}^n$, è una varietà proiettiva e quindi, dal teorema di completezza, Z_i è completa. Ma allora $f(Z_i) = p_2(g(Z_i))$ è un chiuso di Y in quanto g è isomorfismo e p_2 è chiusa per completezza. Pertanto $f(Z) = \bigcup_{i=1}^r f(Z_i)$ è chiuso in quanto unione finita di chiusi. □

Corollario 3. *Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso e sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva, allora $\mathcal{O}_X(X) \cong \mathbb{K}$ e ogni morfismo $f\colon X \to \mathbb{A}^n$ è costante, i.e. $f(x) = P \in \mathbb{A}^n$, $\forall x \in X$.*

Dimostrazione. La seconda parte del risultato segue direttamente dal fatto che $\mathcal{O}_X(X) \cong \mathbb{K}$ infatti è noto che f è morfismo se e solo se $f = (f_1, \ldots, f_n)$ e $f_i \in \mathcal{O}_X(X)$. Dimostriamo dunque che $\mathcal{O}_X(X) \cong \mathbb{K}$: sia $h \in \mathcal{O}_X(X) \Rightarrow h\colon X \to \mathbb{A}^1$ morfismo (h ha un'unica componente regolare dappertutto). Poiché X è varietà proiettiva e $\mathbb{A}^1$ è varietà **qp**, segue dal teorema (1.10) che h è chiusa, in particolare $h(X)$ è un chiuso di $\mathbb{A}^1$ e, in più, è irriducibile, in quanto X lo è. Pertanto

$$h(X) = \{P\} \vee h(X) = \mathbb{A}^1$$

Supponiamo per assurdo che $h(X) = \mathbb{A}^1$: definiamo il morfismo:

$$\tilde{h}\colon X \xrightarrow{h} \mathbb{A}^1 \xrightarrow{j_0} \mathbb{P}^1$$

$\tilde{h}$ è composizione di morfismi chiusi e quindi è ancora un morfismo chiuso e, in particolare $\tilde{h}(X)$ è chiuso. D'altra parte $\tilde{h}(X) = U_0$ che è un aperto. Abbiamo raggiunto una contraddizione, quindi $h(X) = \{P\}$. Questo conclude la dimostrazione. □

Corollario 4. *Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso. $X \subseteq \mathbb{P}^n$ è isomorfo ad una varietà proiettiva e ad una varietà affine se e solo se $X = \{P\}$*

1 Conseguenze del Teorema di Completezza

Il teorema (1.10) ha una conseguenza notevole: permette infatti di caratterizzare le ipersuperfici riducibili di $\mathbb{P}^n$. Innanzitutto osserviamo il seguente fatto: sia $V_{\mathbb{P}}(F) \subseteq \mathbb{P}^n$ un'ipersuperficie irriducibile, allora (F) è un ideale primo quindi radicale, i.e. $(F) = \sqrt{(F)}$ con $F \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_d$. Se esiste $G \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_d$; $(G) = \sqrt{(G)}$ e $V_{\mathbb{P}}(F) = V_{\mathbb{P}}(G)$, allora si ha da NSS proiettivo che $(G) = (F) \Leftrightarrow G = \lambda F$ per un qualche $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Ciò significa perciò che un'ipersuperficie irriducibile $V_{\mathbb{P}}(F)$ determina un punto in $\mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_d) = \mathbb{P}^{\binom{n+d}{n}-1}$. Analogamente a quanto fatto nel caso di $\mathbb{P}^5$, possiamo costruire una corrispondenza biunivoca tra le ipersuperfci irriducibili di grado d in $\mathbb{P}^n$ e un aperto in $\mathbb{P}^{\binom{n+d}{n}-1}$.

Proposizione 2. *L'insieme delle ipersuperfici irriducibili di grado d in $\mathbb{P}^n$ corriponde ad un aperto di $\mathbb{P}^{\binom{n+d}{n}-1}$.*

Dimostrazione. Mostriamo che l'insieme delle ipersuperfici riducibili di grado d forma un chiuso proprio di $\mathbb{P}^{\binom{n+d}{n}-1}$.
Consideriamo $V_{\mathbb{P}}(F)$, è riducibile $\Leftrightarrow$ (F) non è primo $\Leftrightarrow$ F non è un polinomio primo, e quindi F è riducibile:

$$F = G_k H_{d-k}, \quad \text{con } 1 \leq k \leq \frac{d}{2} \text{ e } G_k \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_k, \; H_{d-k} \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_{d-k}$$

eventualmente riducibili. Definiamo dunque, per ogni k, l'insieme

$$\Sigma_k := \{F \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_d; \; F = G_k H_{d-k}\} \subseteq \mathbb{P}^{\binom{n+d}{n}-1}.$$

Con questa scrittura abbiamo che:

$$\{\text{polinomi omogenei riducibili di grado } d\} = \bigcup_{1 \leq k \leq \frac{d}{2}} \Sigma_k \subseteq \mathbb{P}^{\binom{n+d}{n}-1}.$$

Mostriamo quindi che i Σ_k sono chiusi, facendo vedere che sono immagine di un qualche morfismo. A tale scopo, definiamo, per ogni k, il morfismo:

$$\begin{tikzcd} l_k \colon \mathbb{P}^{\binom{n+k}{n}-1} \times \mathbb{P}^{\binom{n+d-k}{n}-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{P}^{\binom{n+d}{n}-1} \\ \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^s \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_{m,s}"'] & \mathbb{P}^{\binom{n+d}{n}-1} \\ \Sigma_{m,s} \subseteq \mathbb{P}^M \arrow[ur, "\psi_k"'] & \end{tikzcd} \tag{1.7}$$

dove $\sigma_{m,s}$ è un'immersione di Segre e quindi è omeomorfismo sull'immagine e ψ_k è il morfismo così definito: se

$$G_k = g_0 x_0^k + g_1 x_0^{k-1} x_1 + \ldots + g_m x_n^k, \; H_{d-k} = h_0 x_0^{d-k} + h_1 x_0^{d-k-1} x_1 + \ldots + h_s x_n^{d-k}$$

allora in $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^s$ si ha:

$$\begin{aligned}([G_k];[H_{d-k}]) = ([g_0,\dots,g_m];[h_0,\dots,h_s]) &\mapsto \sigma_{m,s}[g_0h_0, g_0h_1,\dots,g_mh_s] \\ &\mapsto \psi_k[g_0h_0, g_0h_1 + g_1h_0,\dots]\end{aligned}$$

Essendo Σ_k immagine di una varietà di Segre tramite un morfismo, Σ_k è chiuso. Ciò significa che il suo complementare, i.e.

$$\{\text{polinomi omogenei irriducibili}\} \subseteq \mathbb{P}^{\binom{n+d}{n}-1}$$

è un aperto. Ma tale aperto corrisponde proprio alle ipersuperfici irriducibili di grado d nel proiettivo mediante la corrispondenza

$$\{\text{ipersuperfici irriducibili di grado } d\} \ni V_{\mathbb{P}}(F) \longmapsto [F] \in \mathbb{P}^{\binom{n+d}{n}-1}.$$

□

Esempio 1.11. Studiamo il morfismo (1.7) nel caso $n = 2,\ d = 3,\ k = 1$,

$$\Sigma_1 = \{F \in \mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]_3;\ F = G_1H_2\} \subseteq \mathbb{P}^9.$$

e (1.7) diventa:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^5 \arrow[rr] \arrow[dr, "\sigma_{2,5}"'] & & \mathbb{P}^9 \\
& \Sigma_{2,5} \subseteq \mathbb{P}^{17} \arrow[ur, "\psi_1"'] &
\end{tikzcd}$$

e quindi presi due polinomi

$$G_1 = g_0x_0 + g_1x_1 + g_2x_2,\ H_2 = h_0x_0^2 + h_1x_0x_1 + h_2x_0x_2 + h_3x_1^2 + h_4x_1x_2 + h_5x_2^2$$

le loro coordinate in $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^5$ sono

$$([g_0,g_1,g_2];[h_0,\dots,h_5]) \mapsto [g_0h_0, g_0h_1,\dots,g_2h_5] \in \Sigma_{2,5}$$

perciò si ha:

$$\psi_1([g_0h_0, g_0h_1,\dots,g_2h_5]) = [g_0h_0, g_0h_1 + g_1h_0, g_0h_2 + g_2h_0,\dots,g_2h_5]$$

Vediamo esplicitamente che ψ_1 è un morfismo in quanto le sue componenti sono o funzioni coordinate o somma di funzioni coordinate ed effettivamente l'immagine del punto $([g_0,g_1,g_2];[h_0,\dots,h_5])$, mediante ψ_1 sono proprio le coordinate del polinomio G_1H_2.
Un'altra cosa interessante che si ricava da (1.7) è lo studio delle fattorizzazioni di un'ipersuperficie di grado d, in funzione delle dimensioni degli spazi proiettivi coinvolti. Supponiamo di sapere che $dim(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) = n + m$, e consideriamo il caso $n = 2,\ d = 4$. La fattorizzazione (1.7) fornisce due diagrammi, per $k = 1$ e per $k = 2$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^9 \arrow[rr] \arrow[dr, "\sigma_{2,9}"'] & & \mathbb{P}^{14} \\
& \Sigma_{2,9} \subseteq \mathbb{P}^{29} \arrow[ur, "\psi_1"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5 \arrow[rr] \arrow[dr, "\sigma_{5,5}"'] & & \mathbb{P}^{14} \\
& \Sigma_{5,5} \subseteq \mathbb{P}^{35} \arrow[ur, "\psi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Allora, poiché $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^9$ ha dimensione 11 e $\mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5$ ha dimensione 10, possiamo concludere che le quartiche che fattorizzano in una cubica e una retta (i.e. $F = G_1 H_3$) sono di più delle quartiche che si spezzano in due coniche (i.e. $F = G_2 H_2$). Inoltre esistono quartiche che ammettono entrambe le fattorizzazioni, quindi i due insiemi $\Sigma_1,\ \Sigma_2$ non sono disgiunti.