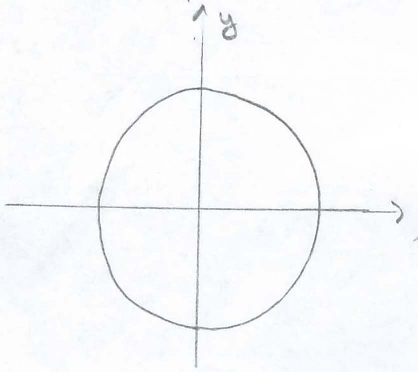
CURVE IN $\mathbb{R}^n$

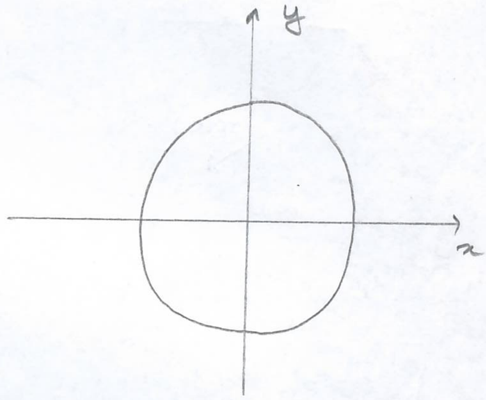
Consideriamo $x: I \to \mathbb{R}^n$ continua, dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo e indichiamo con $\gamma = Im(x)$ = l'immagine di I attraverso x

Def: Si dice curva in $\mathbb{R}^n$, la coppia $(\gamma, x(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$

- x è la parametrizzazione della curva → info cinematiche (velocità, accelerazione, ..)
- γ è il sostegno della curva → info geometriche (traiettoria).

Oss: Ovviamente lo stesso sostegno γ può essere associato a diverse parametrizzazioni





$x: [0; 2\pi] \to \mathbb{R}^2$
$t \longmapsto (\cos(t), \sin(t))$

$\tilde{x}: [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$
$t \longmapsto (\cos(2t), \sin(2t))$

$\gamma = Im(x) = Im(\tilde{x})$ = circonferenza unitaria.

A seconda delle loro proprietà, possiamo dare una classificazione delle curve

Def: ① Sia $x: I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ (chiuso) allora diremo che la curva è chiusa se $x(a) = x(b)$

② Sia $x: I \to \mathbb{R}^n$ allora diremo che la curva è semplice se x è iniettiva in $\mathring{I}$ (insieme dei punti interni di I) e $x(a)$ e $x(b)$ non appartengono a $x(\mathring{I})$.

Oss: Curve semplici non chiuse non hanno autointersezioni

③ Oss: Se richiediamo la sola continuità ci possiamo ritrovare con oggetti geometrici che sono lontani dalla nozione intuitiva

motivazione def. curve regolari

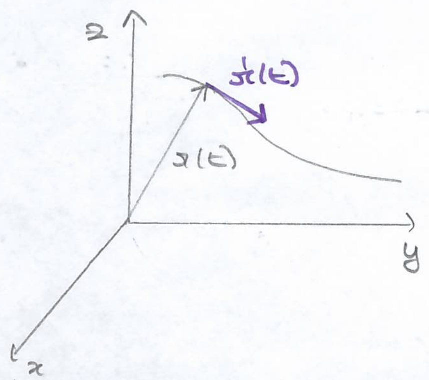
di curva. Ad esempio la così detta curva di Peano
$x : [0;1] \to Q$ = quadrato continua e suriettiva (ma non differenziabile).

la cui costruzione esplicita utilizza l'insieme di Cantor.

Una curva $x : I \to \mathbb{R}^n$ si dice regolare se $x \in C^1(I)$
e se $\dot{x}(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$.
Si dice regolare a tratti se I si può suddividere nell'unione di un numero finito di intervalli su ciascuno dei quali γ è regolare. I punti t_0 t.c. $\dot{x}(t_0) = 0$ si dicono punti singolari.

(3a) Sia $x : I \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare
$t \mapsto (x_1(t), \_\_, x_n(t))$ allora possiamo definire

- $\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \_\_, \dot{x}_n(t))$ il vettore tangente
- $\tau(t) = \dot{x}(t) / \|\dot{x}(t)\|$ il versore tangente

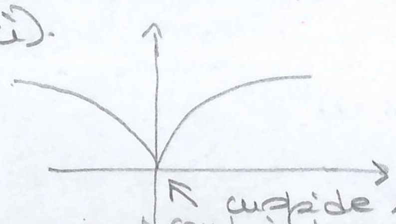


- La retta tangente alla curva x nel punto $x(t_0)$ è
  - Equazione vettoriale $\quad \gamma(t) = x(t_0) + \dot{x}(t_0) \cdot t$
  - Equazioni parametriche $\begin{cases} \gamma_1(t) = x_1(t_0) + \dot{x}_1(t_0) \cdot t \\ \\ \gamma_n(t) = x_n(t_0) + \dot{x}_n(t_0) \cdot t \end{cases}$

Interpretazione fisica: $\dot{x}(t)$ rappresenta il vettore velocità.
Chiameremo velocità scalare $v(t) = |\dot{x}(t)| = \sqrt{\dot{x}_1(t)^2 + \_\_\_ + \dot{x}_n^2(t)}$
Se la curva è anche $C^2(I)$ allora possiamo definire il vettore accelerazione $\ddot{x}(t)$ e $a(t) = |\ddot{x}(t)|$ il suo modulo
Problema: Cosa accade alla traiettoria di curve $C^1(I)$ ma per le quali la velocità si annulla in un punto? (quindi curve non regolari).

$t = (x)^{1/3}$
$y = t^2 = x^{2/3}$

→ es. $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
$t \mapsto (t^3, t^2)$ (x, y)
$\dot{x}(t) = (3t^2, 2t) \quad \dot{x}(0) = (0,0)$



cuspide in (0,0)
cambio brusco di direzione

la velocità è continua ma il mobile cambia bruscamente direzione in corrispondenza dell'origine che è punto singolare. Inoltre questo è un esempio di curva regolare a tratti.

Alcuni esempi:

1. Segmento di estremi x_0 e x_1

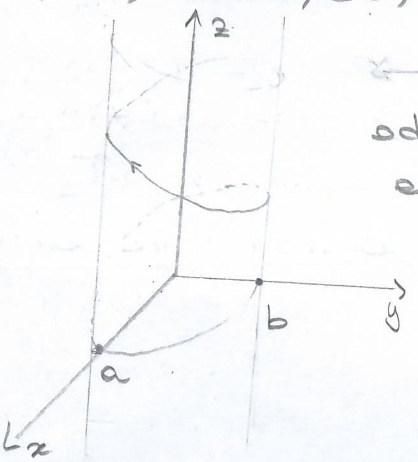
$x : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$t \longmapsto x(t) = x_0 + t(x_1 - x_0)$, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$

2. Elica cilindrica infinita (a sezione ellittica).

$x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è una curva semplice

$t \longmapsto (a\cos t, b\sin t, ct)$ $a, b, c \in \mathbb{R}^+$

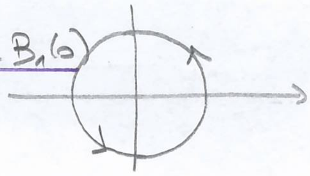


La curva si avvolge attorno ad un cilindro a sezione ellittica

Dopo un periodo 2π c'è un innalzamento di quota di $\underbrace{2\pi c}_{\text{passo dell'elica.}}$

3. $x : [0; 6\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ circonferenza $B_1(0)$

$t \longmapsto (\cos t, \sin t)$



$6\pi = 3 \times 2\pi$

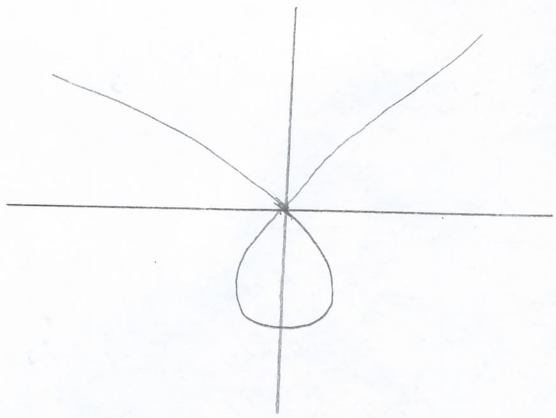
3 giri

è una curva chiusa non semplice.

4. Strofoide

$x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$t \longmapsto (t^3 - t, t^2 - 1)$



non è una curva semplice

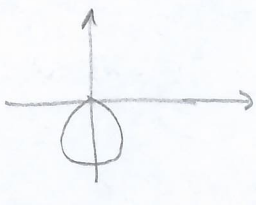
in quanto $\varphi(1) = \varphi(-1) = (0,0)$

$\dot{x}(t) = (3t^2 - 1, 2t) \rightarrow$ è regolare

La sua restrizione $\tilde{x} : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cappio di strofoide

$t \longmapsto (t^3 - t, t^2 - 1)$

è una curva semplice e chiusa.



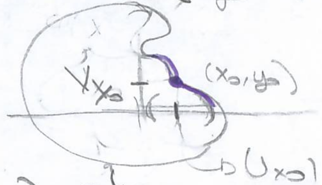
Def: Se il sostegno γ di una curva è contenuto in un piano allora la curva si dice piano.
Curve piane, semplici e chiuse si dicono curve di Jordan.

Ulteriori classificazione delle curve

4. Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione continua, allora la curva in forma parametrica $r: I \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, f(t))$ si chiama curva cartesiana e il suo sostegno è il grafico di f.
Le curve cartesiane sono semplici (hanno una componente, la prima, iniettiva)

5. Sia $g: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale per cui $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0,0)$ dove $(x_0, y_0) \in L_0(g) = \{(x,y) \in \Omega,\ g(x,y) = 0\}$.
Allora localmente (in un intorno del punto (x_0, y_0)) l'equazione $g(x,y) = 0$ definisce una curva cartesiana (r, γ) (r parametr., γ supporto).
Infatti supponiamo ad esempio che $\partial_y g(x_0, y_0) \neq 0$, allora per il teorema del Dini (o teorema della funzione implicita) esistono due intorni U_{x_0} e V_{y_0} e una funzione $\varphi: U_{x_0} \to V_{y_0}$ di classe C^1 tale che
($g(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in U_{x_0}$ e $y_0 = \varphi(x_0)$)

$$\underbrace{L_0(g)} \cap (U_{x_0} \times V_{y_0}) = \{\text{grafico di } \varphi\}$$



linea di livello di g $\longrightarrow = \{(x,y) \in \Omega : \ g(x,y) = 0\}$

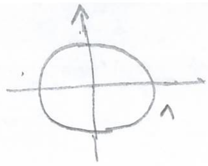
$$r: I = U_{x_0} \to \mathbb{R}^2 \qquad (\gamma = \text{supporto di } r = \{\text{grafico di } \varphi\} =$$
$$x \longmapsto (x, \varphi(x)) \qquad = L_0(g) \cap (U_{x_0} \times V_{y_0})$$

r è una curva regolare e semplice. (*)

Oss: Lo stesso ragionamento si può fare per le linee di livello $L_c(g) = \{(x,y) \in \Omega : \ g(x,y) = c\}$ basta definire $\tilde{g}(x,y) = g(x,y) - c$ e ci si riconduce al caso precedente

Esempio: Considero $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto x^2 + y^2 - 1$ di classe C^1

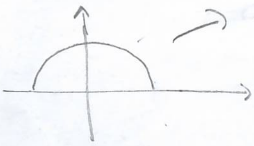
$L_0 g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-1=0\} \longrightarrow$



$\partial_y g(x,y) = 2y \neq 0$ se e solo se $y \neq 0$

Infatti, se ad esempio $y>0$:

$$\varphi : (-1,1) \longrightarrow (0,1)$$
$$x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$$



$\rightarrow$ grafico di φ e sostegno della curva

definisce la curva cartesiana parametrizzata da $(x, \varphi(x))$ e di sostegno la mezza circonferenza superiore

(*) Se $g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, di classe C^1 e se $\nabla g(x,y) \neq 0 \ \forall (x,y) \in L_0(g)$ allora $(g, L_0(g))$ è detta curva regolare in forma implicita.

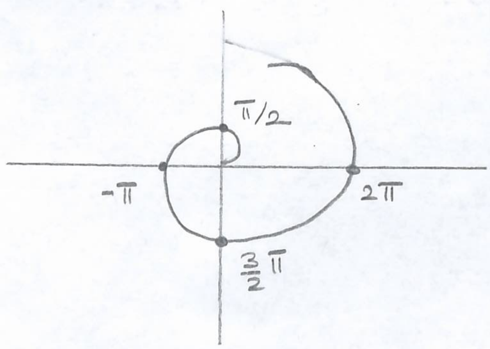
(6) Curva in forma polare

$$\gamma : [\vartheta_0, \vartheta_1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\vartheta \longmapsto (\underbrace{\rho(\vartheta)\cos(\vartheta)}_{x(\vartheta)}, \underbrace{\rho(\vartheta)\sin(\vartheta)}_{y(\vartheta)})$$

con ρ continua, $\rho(\vartheta) \geq 0 \ \forall \vartheta \in [\vartheta_0, \vartheta_1]$

definisce una curva in forma polare.

Esempio $\rho(\vartheta) = \vartheta$ con $\vartheta \in \mathbb{R}^+$ definisce la spirale di Archimede.



Una curva γ in forma polare è di classe C^1 quando ρ lo è. Facendo un po' di conti si vede che

$\|\gamma'(\vartheta)\| = \sqrt{\rho^2(\vartheta) + \rho'^2(\vartheta)}$, quindi γ è regolare quando ρ e ρ' non si annullano mai contemporaneamente e e ovviamente se $\rho \in C^1$

$\rho(\vartheta)$ è la distanza del punto $x(\vartheta), y(\vartheta)$ dall'origine.

Def: Due curve regolari

$\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ si dicono equivalenti se esiste una funzione $p : [a,b] \to [c,d]$ di classe C^1, suriettiva e con $p'(t) \neq 0$ $\forall\, t \in [a,b]$ tale che $\gamma_1(t) = \gamma_2(p(t))$. ($p$ è un diffeomorfismo).

Scriveremo $\gamma_1 \sim \gamma_2$.

Oss:
- Due curve equivalenti hanno lo stesso sostegno.
- Se $p' > 0$ allora $p(t)$ è crescente e quindi $p(a) = c$ e $p(b) = d$. Si dice che γ_1 e γ_2 hanno lo stesso verso
- Se $p' < 0$ allora $p(t)$ è decrescente e quindi $p(a) = d$ e $p(b) = c$. Si dice che γ_1 e γ_2 hanno verso opposto.
- La relazione $\sim$ è una relazione di equivalenza

Def: Data $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ si può definire la curva γ_2 opposta a γ_1, in questo modo. Considero

$$j : [a,b] \to [a,b] \qquad j(a) = b \qquad j'(t) < 0$$
$$t \longmapsto a+b-t \qquad j(b) = a$$

La curva $\gamma_2(t) = (\gamma_1 \circ j)(t) = \gamma_1(j(t)) = \gamma_1(a+b-t)$ si dice curva opposta (cioè si inverte il verso di percorrenza).

Teorema

Se due curve γ_1 e γ_2 sono equivalenti e hanno lo stesso verso, allora i versori tangenti coincidono.

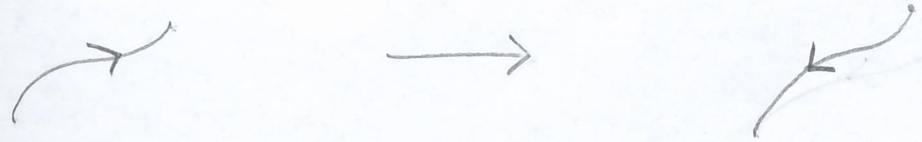
dim:
$$\tau_1(t) = \frac{\gamma_1'(t)}{\|\gamma_1'(t)\|} = \frac{\gamma_2'(q(t)) \cdot q'(t)}{\|\gamma_2'(q(t))\| \, |q'(t)|} = \frac{\gamma_2'(q(t))}{\|\gamma_2'(q(t))\|} = \tau_2(t)$$

(con $\frac{q'(t)}{|q'(t)|} = 1$, $q' > 0$) ∎

Diamo una generalizzazione di curva opposta.

Problema: Voglio trasformare una curva regolare

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n \qquad\qquad \tilde{\gamma} : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$$



mantenendo il sostegno ma cambiando verso e dominio di definizione

Allora definendo

$$p : [\alpha;\beta] \longrightarrow [a,b]$$
$$\tau \longmapsto -\frac{b-a}{\beta-\alpha}\cdot\tau + \frac{\beta b-\alpha a}{\beta-\alpha}$$

$$p'(t) = -\frac{b-a}{\beta-\alpha} < 0 \qquad p(\alpha) = b \quad p(\beta) = a$$

inoltre la nuova curva $\tilde{\gamma}(\tau) = (\gamma\circ p)(\tau)$ è regolare.

Ex. Consideriamo le due curve in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases}\varphi_1(t) = \cos t \\ \varphi_2(t) = \sin t\end{cases} \quad t\in[0,2\pi] \qquad \begin{cases}\psi_1(s) = \sin(3s) \\ \psi_2(s) = \cos(3s)\end{cases} \quad s\in[\pi/6, \tfrac{5}{6}\pi]$$

Facciamo vedere che sono curve equivalenti.

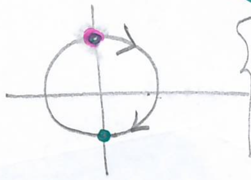
- Hanno lo stesso sostegno, ovvero la circonf. unitaria di centro l'origine
- Hanno versi di percorrenza opposti

$$\frac{\pi}{3} < \frac{2}{3}\pi$$

$\varphi(t)$

antioraria

$\psi(t)$



oraria

$$\begin{cases}\sin\left(3\frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ \cos\left(3\frac{\pi}{3}\right) = -1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\left(3\cdot\frac{2}{3}\pi\right) = 0 \\ \cos\left(3\cdot\frac{2}{3}\pi\right) = 1\end{cases}$$

Cerchiamo un diffeomorfismo

$p : [0,2\pi] \longrightarrow [\pi/6, 5/6\,\pi]$ t.c.

$$\psi(p(t)) = \varphi(t) \qquad p(t) = s \qquad p'(t) < 0 \quad p(0) = \frac{5}{6}\pi,\ p(2\pi) = \frac{\pi}{6}$$

Provo in qst modo...

$$\cos(t) = \sin(3s) = \sin(3p(t)) \overset{(*)}{=} \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3p(t)\right)$$

$$t = \frac{\pi}{2} - 3p(t) \qquad 3p(t) = \frac{\pi}{2} - t \qquad p(t) = \frac{\pi}{6} - \frac{t}{3}$$

$$p(0) = \frac{\pi}{6} \quad \text{e} \quad p(2\pi) = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}\pi = \frac{1-4}{6}\pi = -\frac{3}{6}\pi = -\frac{\pi}{2}$$

↳ NON vanno bene! Cerchiamo di adattare...

Però mi ricordo che $\sin(3s)$ è una funzione periodica di periodo $\frac{2}{3}\pi$ quind in $(*)$ posso sostituire

$$\sin\left(3\left(p(t) + \frac{2}{3}k\pi\right)\right) = \sin(3p(t)) \qquad \text{con } k\in\mathbb{Z}$$

Allora definisco $\tilde{p}(t) = p(t) + \frac{2}{3}k\pi$ e cerco k t.c.

$\tilde{p}(0) = \frac{\pi 5}{6}$ $\quad$ $\tilde{p}(2\pi) = \frac{\pi}{6}$

impongo

$\tilde{p}(0) = p(0) + \frac{2}{3}k\pi = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi = \frac{5}{6}\pi \longrightarrow k = 1$ ✓

$\tilde{p}(2\pi) = p(2\pi) + \frac{2}{3}\cdot 1\,\pi = -\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{6}$ ✓

$k = 1$

Dunque il diffeomorfismo cercato è

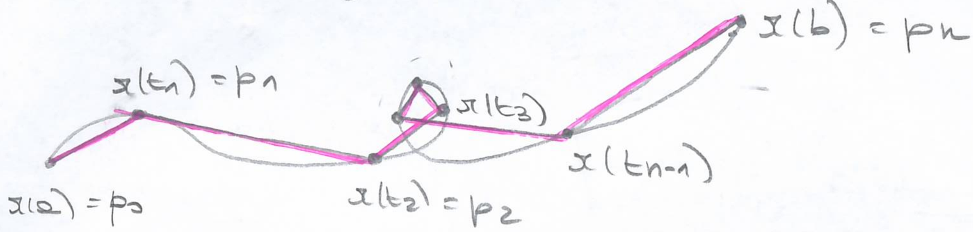
$$\tilde{p}(t) = \frac{\pi}{6} - \frac{t}{3} + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi - \frac{t}{3}$$

Lunghezza di una curva

Consideriamo una curva continua $x : [a;b] \to \mathbb{R}^n$.
Ad ogni partizione di $[a,b]$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

possiamo associare una poligonale P inscritta nella curva di vertici $x(a), x(t_1), \dots, x(b)$.



La lunghezza della poligonale P è data

$$l(P) = \sum_{i=1}^{n} |x(t_i) - x(t_{i-1})|$$

È naturale allora definire lunghezza di un arco di curva continua $x : [a;b] \to \mathbb{R}^n$ il numero

$$L(x) = \sup_{P} l(P)$$

dove P varia tra tutte le possibili poligonali inscritte nella curva.

Def: Se tale estremo superiore $L(x)$ è finito diremo che la curva (x, I) è rettificabile e la sua lunghezza è $L(x)$.

Esistono curve non rettificabili

(t, g(t)) = $\gamma(t)$
$\begin{cases} g(t) = t^2 \cos(\pi/t^2) & t > 0 \\ g(0) = 0 & t = 0 \end{cases}$
$\gamma'(0) = (1, 0)$ γ non è rettificabile
è derivabile in 0 ma non è C^1 ovviamente...

Esempio (di curva non rettificabile).

Sia $\gamma : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$t \longmapsto (x(t), y(t))$ dove

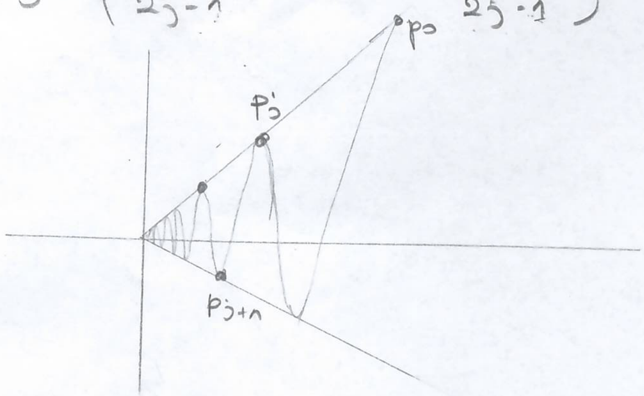
$x(t) = t$ e $y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t = 0 \\ t \cdot \sin \frac{\pi}{2t} & \text{se } t \neq 0 \end{cases}$ → non è di classe C^1 (non è proprio derivabile in 0)

$$y'(t) = \sin \frac{\pi}{2t} - \underbrace{\frac{\pi}{2t} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2t}\right)}$$
↳ per $t \to 0$ $y(t)$ oscilla sempre più bruscamente

Fissiamo n e consideriamo la suddivisione
$$D_n = \left\{ 0, \frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n-1}, \ldots, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1 \right\}$$

Poiché $\sin\left(\left(j - \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^{j+1}$ con $j = 1, \ldots, n+1$
allora i punti della poligonale P_n

$$p_j = \left(\frac{1}{2j-1}, (-1)^{j+1} \frac{1}{2j-1} \right) \text{ e l'origine}$$



$$\sin\left(\frac{\pi}{2\left(\frac{1}{2j-1}\right)}\right) = \sin\left(\frac{\pi(2j-1)}{2}\right) = \sin\left(\pi\left(j - \tfrac{1}{2}\right)\right)$$

Allora per $j \geq 1$ valutiamo

$$|p_{j+1} - p_j| = \sqrt{\left(\frac{1}{2j+1} - \frac{1}{2j}\right)^2 + \left(\frac{1}{2j+1} + \frac{1}{2j-1}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-2}{4j^2-1}\right)^2 + \left(\frac{4j}{4j^2-1}\right)^2} \geq \sqrt{\left(\frac{4j}{4j^2-1}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{4j - 1/j}\right)^2} \geq$$

$$\geq \frac{4}{4j} = \frac{1}{j}$$

Quindi sommando su j ottengo che $\ell(P_n) \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$ → termine generale serie armonica

Poiché la serie armonica è divergente segue che $\ell(P_n) \to +\infty$ per $n \to +\infty$. ed essendo $L(x) \geq L(P_n)$ $\forall n$ allora $L(x)$ non è rettificabile.

Teorema (di rettificabilità delle curve C^1).

Se $x: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è una curva di classe C^1 allora è rettificabile e la sua lunghezza $L(x)$ è data dall'integrale

$$L(x) = \int_a^b |\dot{x}(t)|\, dt$$

dim: • Facciamo vedere che $L(x) \leq \int_a^b |\dot{x}(t)|\, dt$

Consideriamo una poligonale inscritta nella curva (x, J) e associata alla partizione

$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ → teo fond. calcolo integr.

$$\ell(P_n) = \sum_{i=1}^n |x(t_i) - x(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{x}(s)\, ds \right| \leq$$

→ notazione

$$\left(\text{dove } \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{x}(s)\, ds = \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{x}_1(s)\, ds, \dots, \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{x}_n(s)\, ds \right) \right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{x}(s)|\, ds = \underbrace{\int_a^b |\dot{x}(s)|\, ds}$$

↳ indip. dalla partizione

Passando all'estremo superiore su tutte le partizioni ho che $L(x) \leq \int_a^b |\dot{x}(s)|\, ds$.

• Facciamo vedere che

$$\int_a^b |\dot{x}(s)| \leq L(x)$$

(Ricordiamo che per il teorema di Heine Cantor se $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua allora è uniform. continua.)

Quindi essendo $\dot{x}$ uniform. continua su $[a,b]$.

(UC) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ t.c $|t-s| < \delta$ t.c. $|\dot{x}(t) - \dot{x}(s)| < \varepsilon$

Consideriamo una partizione di $[a,b]$ in intervallini di lunghezza inferiore a δ e sia P la poligonale associata a tale partizione

Fissiamo un intervallino $[t_{i-1}, t_i]$ e e sia $s \in [t_{i-1}, t_i]$ allora si ha (va inteso componente per componente)

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} x'(t)\,dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(x'(t) - x'(s)\right)dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i} x'(s)\,dt$$

$$= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(x'(t) - x'(s)\right)dt + x'(s)\cdot(t_i - t_{i+1})$$

Da cui passando ai moduli e per la diseg. triangolare

$$|x'(s)|\overbrace{(t_i - t_{i+1})}^{>0} \leq |x(t_i) - x(t_{i-1})| + \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(x'(t) - x'(s)\right)dt\right| \leq$$

Usando l'uniforme continuità (uc)

$$\leq |x(t_i) - x(t_{i-1})| + \varepsilon(t_i - t_{i-1}), \quad \text{da cui}$$

$$|x'(s)| \leq \frac{|x(t_i) - x(t_{i-1})|}{t_i - t_{i-1}} + \varepsilon \qquad (*)$$

Integrando $(*)$ per $s \in [t_{i-1}, t_i]$ trovo

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} |x'(s)|\,ds \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{|x(t_i) - x(t_{i-1})|}{t_i - t_{i-1}}\,ds + \varepsilon(t_i - t_{i-1})$$

$$= |x(t_i) - x(t_{i-1})| + \varepsilon(t_i - t_{i-1}) \qquad (**)$$

Sommando per $i = 1, \to n$

$$\int_a^b |x'(s)|\,ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |x'(s)|\,ds \overset{(**)}{\leq}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |x(t_i) - x(t_{i-1})| + \varepsilon(b-a) =$$

$$= \ell(P_n) + \varepsilon(b-a) \leq L(x) + \varepsilon(b-a)$$

Per l'arbitrarietà di ε segue la tesi

$\blacksquare$

Oss ① A meno che x non sia iniettiva, la formula del teorema precedente non dà informazioni sulla misura del sostegno. Ad esempio:

$\varphi(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$ e

$\psi(t) = (\cos 2t, \sin 2t) \quad t \in [0, \frac{3}{2}\pi] \rightarrow$ non iniettiva

$L(\varphi) = 2\pi \neq 3\pi = L(\psi)$ pur avendo φ e ψ lo stesso sostegno.

Oss ② $\rightarrow$ vedi dopo.

Ex. Calcolare la lunghezza dell'elica cilindrica

$$x : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longmapsto (R\cos t, R\sin t, ct)$$

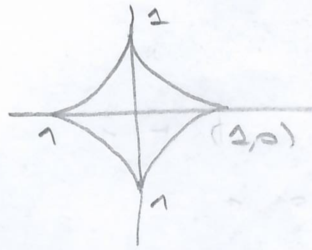
$$x'(t) = (-R\sin t, R\cos t, c)$$

$$|x'(t)| = \sqrt{R^2(\sin t)^2 + R^2(\cos t)^2 + c^2} = \sqrt{R^2 + c^2}$$

da cui $L(x) = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2+c^2}\, dt = 2\pi\sqrt{R^2+c^2}$

Ex. Calcolare la lunghezza dell'astroide

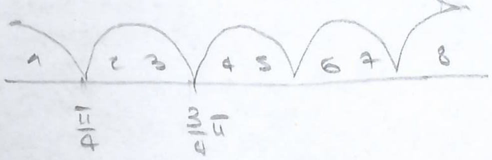
$$x : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$$



$$x'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)$$

$$|x'(t)| = \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cdot \cos^2 t} =$$
$$= \sqrt{9\cos^2 t \cdot \sin^2 t\, \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1}} =$$
$$= 3|\cos t \cdot \sin t|$$

$$L(x) = \int_0^{2\pi} 3|\cos t \sin t|\, dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} |\sin 2t|\, dt =$$
$$= 8 \cdot \frac{3}{2}\int_0^{\pi/4} \sin 2t\, dt = 12\left[-\frac{1}{2}\cos(2t)\right]_0^{\pi/4} = 6$$



- Lunghezza di una curva in forma cartesiana

$r: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ con $f \in C^1(I)$

$t \mapsto (t, f(t))$

è una curva regolare ($f \in C^1(I)$ e $r'(t) = (1, f'(t)) \neq 0$) e semplice ($x(t) = t$ è iniettiva).

$|r'(t)| = \sqrt{1 + |f'(t)|^2}$

$L(r) = \int_a^b \sqrt{1 + |f'(t)|^2}\, dt$

- Lunghezza di una curva in forma polare

$r: [\theta_0, \theta_1] \to \mathbb{R}^2$

$\theta \mapsto (\rho(\theta)\cos(\theta), \rho(\theta)\cdot\sin(\theta))$

con $\rho: [\theta_0, \theta_1] \to \mathbb{R}$ di classe C^1

$\theta \mapsto \rho(\theta)$

$|r'(\theta)| = \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}$

$L(r) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\, d\theta$.

Oss 2 : La rettificabilità di una curva dipende dalla parametrizzazione

Consideriamo

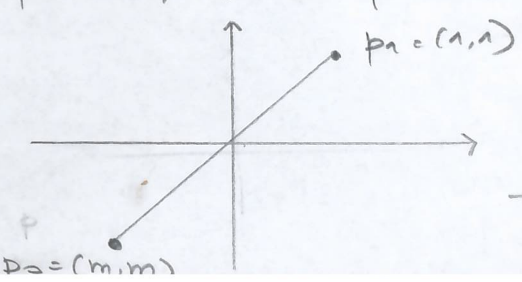
$r: [0;1] \to \mathbb{R}^2$

$t \mapsto (x(t), y(t))$ con

$$x(t) = y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t = 0 \\ t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2t}\right) & \text{se } t \neq 0 \end{cases}$$

$\lim_{t \to 0} x(t) = 0$ quindi $x(t)$ è continua su $[0,1]$ ⇒ ammette max e min. Sia $m = \min_{t \in [0,1]} x(t)$, definiamo

$p_0 = (m,m)$ e $p_1 = (1,1)$ allora il sostegno di r è il segmento di estremi p_0 e p_1



→ Con qst parametrizz si compiono ∞ oscillazioni vicino all'origine.

Con gli stessi ragionamenti fatti per l'esempio di curve non rettificabili si può dimostrare che γ non è rettificabile.

Mentre se la parametrizzassi in "maniera standard"

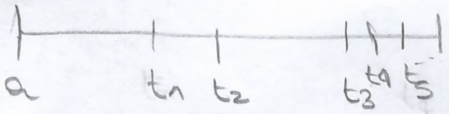
$$\tilde{\gamma} : [m,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto (t,t)$$

allora ovviamente sarebbe rettificabile.

Ex. Sia $\gamma : [a;b] \to \mathbb{R}^n$ una param. continua e sia γ rettificabile. Far vedere che $L(\gamma) = \lim_{n\to+\infty} \ell(P_n)$ dove P_n è una poligonale inscritta nella curva ottenuta suddividendo $[a,b]$ in n parti uguali.

dim: Fissato un $\varepsilon > 0$ per definizione di sup trovo una poligonale P tale che

(S) $\quad L(\gamma) < \ell(P) + \varepsilon \quad$ e sia P individuata dalla suddivisione $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$



Siano $p_i = \varphi(t_i) \quad i = 0, \dots, m$

osservo che φ è uniformemente continua perché continua su un compatto, allora

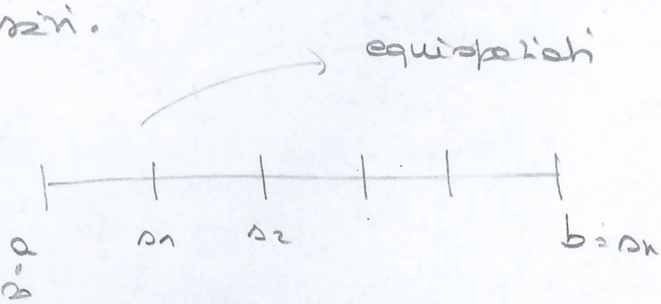
(U.C) $\forall \tilde{\varepsilon} \quad \exists\, \delta = \delta(\tilde{\varepsilon})$ t.c. se $|s_1 - s_2| < \delta$ allora $|\varphi(s_1) - \varphi(s_2)| < \tilde{\varepsilon}$

→ scelgo $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon / m$

Divido l'intervallo $[a,b]$ in intervalli d'ampiezza minore di $\delta = \delta(\varepsilon/m)$, da cui avrò $\frac{b-a}{n} < \delta$ (*)

Osservo che se (*) vale per un certo n vale ovviamente anche per tutti gli n successivi.

Definisco i punti



- $s_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i$

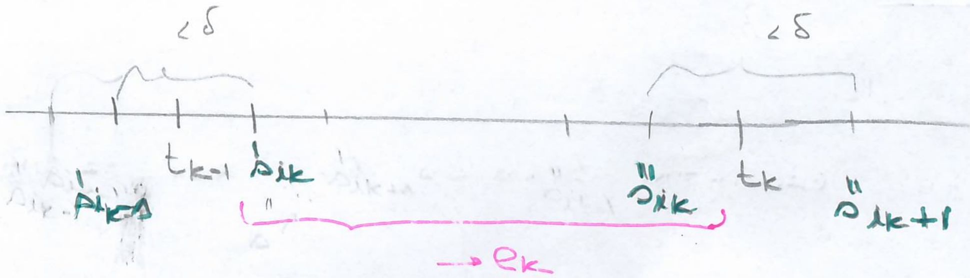
  $i = 0, \dots, n$

- $q_i = \varphi(s_i) \quad i = 0, \dots, n \quad$ e chiamo P_n la poligonale di vertici q_i

Considero un intervallino $[t_{k-1}, t_k]$ della partizione $\mathcal{P}$ di partenza e chiamo

$\acute{s}_{ik}$ è il primo dei punti s_i tale che $s_i > t_{k-1}$

$\ddot{s}_{ik}$ è l'ultimo dei punti s_i " " $s_i < t_k$



Osservo che $|\acute{s}_{ik} - t_{k-1}| < \delta$ (altrimenti $\acute{s}_{ik}$ non sarebbe il primo)

$|\ddot{s}_{ik} - t_k| < \delta$ (" $\ddot{s}_{ik}$ " " l'ultimo)

Se non "cadono" punti di tipo s_i in $[t_{k-1}, t_k]$ meglio significa che i t_k sono già suff. vicini

Chiamo e_k la (sotto) lunghezza della poligonale Q_n relativa all'intervallo $[\acute{s}_{ik}, \ddot{s}_{ik}]$. Allora si ha che

→ disug. triangolare

$$|p_k - p_{k-1}| = |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| \le \underbrace{|\varphi(t_k) - \varphi(\acute{s}_{ik})|}_{\le \varepsilon/m} +$$

$$+ \underbrace{|\varphi(\acute{s}_{ik}) - \varphi(\acute{s}_{ik+1})| + \dots + |\varphi(\ddot{s}_{ik-1}) - \varphi(\acute{s}_{ik})|}_{= e_k} +$$

uniform. cont. (u.c.)

$$+ \underbrace{|\varphi(t_{k+1}) - \varphi(\ddot{s}_{ik})|}_{\le \varepsilon/m} \le \frac{\varepsilon}{m} + e_k + \frac{\varepsilon}{m} = e_k + \frac{2\varepsilon}{m}$$

Quindi $|p_k - p_{k-1}| \le e_k + \frac{2\varepsilon}{m}$

Sommo su $k = 1, \dots, m$ e trovo.

$$\ell(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{m} |p_k - p_{k-1}| \le \sum_{k=1}^{m} e_k + 2\varepsilon$$

"$\le$" e non "$=$" posso aver lasciato fuori i contributi del tipo $(\ddot{s}_{ik-1}, \acute{s}_{ik})$ e $(\ddot{s}_{ik}, \acute{s}_{ik+1})$

da (S) deduco che

$$L(x) - \varepsilon \le \sum_{k=1}^{m} e_k + 2\varepsilon \le \ell(Q_n) + 2\varepsilon$$

Da cui $L(x) - 3\varepsilon \le \ell(Q_n)$ ← vale $\forall n$ t.c. $n > \frac{b-a}{\delta}$

Quindi $\forall \tilde{\varepsilon} = (3\varepsilon)$ $\exists \bar{n} = \left[\frac{b-a}{\delta}\right] + 1$ (parte intera) t.c. $\forall n \ge \bar{n}$ $|\ell(Q_n) - L(x)| < \tilde{\varepsilon}$

Proposizione

Siano $(\gamma, \varphi_1): [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $(\gamma, \varphi_2): [c,d] \to \mathbb{R}^n$ due curve regolari.

Se φ_1 ed φ_2 sono curve equivalenti allora $\ell(\gamma, \varphi_1) = \ell(\gamma, \varphi_2)$.

dim: $\to$ ex.

Additività delle curve

Consideriamo due curve $\varphi_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $\varphi_2 : [b,c] \to \mathbb{R}^n$ tali che $\varphi_1(b) = \varphi_2(b)$ (condizione di raccordo). Si può definire unione di γ_1 e γ_2 la curva $\gamma_1 \cup \gamma_2$ di equazione $\varphi : [a,c] \to \mathbb{R}^n$ definita da

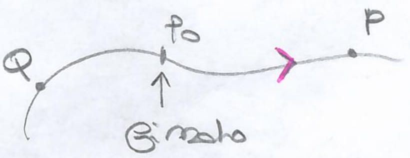
$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & , \ t \in [a,b] \\ \varphi_2(t) & , \ t \in [b,c] \end{cases}$$

Se φ_1 e φ_2 sono regolari allora φ è in generale regolare a tratti, se anche $\varphi_1'(b) = \varphi_2'(b)$ allora φ è regolare.

Ascissa curvilinea

Consideriamo una curva semplice e regolare $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

Fix $P_0 \in \Gamma$ = sostegno di



$P \in \Gamma \longleftrightarrow s(P)$ = ascissa curvilinea

(P segue P_0) = lunghezza dell'arco di curva tra P_0 e P

$Q \in \Gamma \longleftrightarrow s(Q) = -$ lunghezza dell'arco di curva tra Q e P_0

(Q precede P_0)

Corrisp. biunivoca tra i punti in Γ e i punti in un certo intervallo $[a,b]$ t.c.

se $s(P_1) = s_1$, $s(P_2) = s_2$ allora $|s_1 - s_2|$ = lunghezza arco di curva tra P_1 e P_2

Come definire s? a partire da φ?

Fisso $t_0 \in [a,b]$ e definisco

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\varphi'(\tau)| \, d\tau \qquad \forall\, t \in [a,b]$$

s è derivabile, e $s'(t) > 0 \ \forall t$, quindi realizzo una corrispondenza biunivoca

se $t_0 = a \Rightarrow [0; L]$

$$s : [a,b] \longrightarrow [s(a), s(b)]$$

Sia $t = t(s)$ la funzione inversa di $s = s(t)$, allora si ha che $\gamma(s) = \varphi(t(s))$ e $t : [s(a), s(b)] \longrightarrow [a,b]$

lunghezza

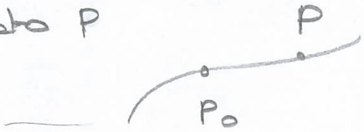
inoltre $\gamma'(s) = \varphi'(t(s)) \cdot t'(s) \underset{\text{deriv. inversa}}{=} \varphi'(t(s)) \cdot \dfrac{1}{s'(t)} =$

$s'(t) = |\varphi'(t)|$

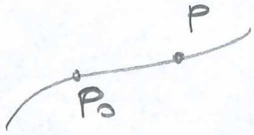
$= \dfrac{\varphi'(t(s))}{|\varphi'(t(s))|} \Rightarrow |\gamma'(s)| = 1 \quad \forall s$

Definisce un sistema intrinseco di coordinate su Γ

dato P



$\longrightarrow$ s = coordinata di P.



$\longleftarrow$ data la lunghezza s

posizione $\longleftrightarrow$ lunghezza

Ex. Determinare se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
$t \mapsto (\cos t, \sin t, 3t)$

è parametrizzata rispetto la lunghezza d'arco?

$\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t, 3)$

$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 9} = \sqrt{10} \neq 1$ → NO non è param. risp. la lungh. d'arco.

Allora con $t_0 = 0$

$s(t) = \int_0^t \sqrt{10}\, d\tau = \sqrt{10}\, t \qquad t(s) = \dfrac{s}{\sqrt{10}}$

$(\varphi \circ t)(s) = \left(\cos\left(\dfrac{s}{\sqrt{10}}\right), \sin\left(\dfrac{s}{\sqrt{10}}\right), 3\dfrac{s}{\sqrt{10}}\right).$

- - - -

Digressione

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

Def: Diciamo che f è a variazione limitata su $[a,b]$ se la seguente quantità, detta variazione totale, soddisfa

$$V_a^b(f) = \sup_{P} \sum_{i=1}^{k} |f(t_i) - f(t_{i-1})| < +\infty$$

L'insieme delle funzioni che soddisfano questa condizione, cioè a variazione totale finita, si indica con BV[a,b] (dall'inglese "bounded variation").

Oss: Una curva cartesiana parametrizzata

$$\pi: [a,b] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto (t, f(t))$$

con $f \in BV([a,b])$ è rettificabile.

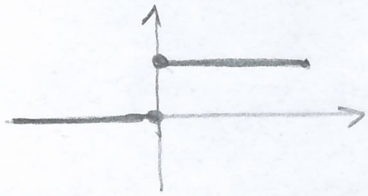
Oss: Vale la seguente catena di inclusioni

$$C^1([a,b]) \subset Lip([a,b]) \subset BV([a,b])$$

Oss: C'è qualche relazione tra le funzioni continue e le funzioni $BV([a,b])$.

- $BV([a,b]) \overset{?}{\subset} C^0([a,b]) \longrightarrow$ no

  basti pensare ad una funzione con un salto, è BV ma non continua



- $C^0([a,b]) \overset{?}{\subset} BV([a,b]) \rightarrow$ No

$$\begin{cases} f(t) = t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{t}\right) & t > 0 \\ f(t) = 0 & t = 0 \end{cases}$$

è continua ma non BV.