Analisi 3B (CdL in Matematica)
Elementi di Analisi Superiore (CdL in Fisica)
A.A. 2017/2018

Foglio 1

1. Consideriamo $r_i : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una classe di curve date da

$$r_i(t) = \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$$

definite su tre diversi domini $I_1 = [0,\pi], I_2 = [0,2\pi], I_3 = [0,3\pi]$. Studiare le proprietà delle tre curve (chiusa, semplice, regolare).

2. Consideriamo una curva $r : [\theta_0, \theta_1] \to \mathbb{R}^2$ in forma polare tale che ρ una funzione strettamente crescente su $[\theta_0, \theta_1]$. Dimostrare che r è una curva semplice.

3. SIa $\varphi(x,y) = x^4 + y^4 + 4xy - 2$ e sia Γ l'insieme di livello $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x,y) = 0\}$. Stabilire se (φ, Γ) è una curva regolare in forma implicita.

4. Dimostrare che la curva cartesiana $r : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ definita da $r(t) = (t, f(t))$ dove f è una funzione continua e crescente definita su $[a,b]$ e a valori reali, è rettificabile.

5. Far vedere che se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è tale $f(x) = h(x) - g(x)$ dove h, g sono funzioni crescenti su $[a,b]$ allora $f \in BV([a,b])$.

6. Sia (φ_n) una successione di curve definite su $[0,1]$ a valori in $\mathbb{R}^d$. Supponiamo che la successione $(\varphi_n)_n$ converga puntualmente a una curva φ. Si provi che se le φ_n sono rettificabili e tali che $L(\varphi_n) \leq M, \forall\, n$ allora anche φ è rettificabile con lunghezza minore o uguale a M.

7. Dimostrare che due curve regolari ed equivalenti hanno la stessa lunghezza.

8. Dimostrare che l'unione γ di due curve rettificabili γ_1 e γ_2 è rettificabile e vale $L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$.