1. Siano X ed Y variabili aleatorie indipendenti e con legge uniforme discreta su $\{1, 2, 3\}$ e sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la catena di Markov avente come legge iniziale la legge di X e come matrice di transizione la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare $P(X_1 > 1)$;

b) Calcolare $P(X_1 = 3, X_3 = 2)$;

c) Stabilire se esista una misura di probabilità invariante per la catena di Markov; in caso affermativo, determinarla e stabilire se essa sia unica.

2. Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una catena di Markov a valori in $\{0, 1, 2\}$, avente come legge iniziale la legge binomiale $B(2, 1/4)$ e come matrice di transizione la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

a) Determinare le densità discrete delle variabili aleatorie X_0, X_1, X_2;

b) Calcolare $P(X_1 = 2, X_2 = 0)$

c) Calcolare $E[X_1^2]$, $E[2X_2 + 3]$

d) Stabilire se esista una misura di probabilità invariante per la catena di Markov; in caso affermativo, determinarla e stabilire se essa sia unica.

3. Siano X ed Y variabili aleatorie indipendenti e con legge di Bernoulli di parametro $2/3$, sia la variabile aleatoria $Z = X + Y$ e sia la catena di Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una catena di Markov a valori in $\{0, 1, 2\}$, avente come legge iniziale la legge di Z e come matrice di transizione la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare le densità discrete delle variabili aleatorie X_0, X_1, X_2;

b) Calcolare $E[X_2]$, $Var[X_1]$;

c) Stabilire se esista una misura di probabilità invariante per la catena di Markov; in caso affermativo, determinarla e stabilire se essa sia unica.

4. Jack è in prigione e ha in tasca 3 euro. Per 8 euro un altro detenuto gli lascia fare una chiamata con il suo cellulare, di cui le guardie carcerarie non sono a conoscenza. Jack riesce a convincere una guardia a giocare d'azzardo con lui. Se Jack scommette n vince n con probabilità 0.4 e perde n con probabilità 0.6. Calcola la probabilità che Jack vinca 8 euro prima di perdere tutti i suoi soldi se:

a) scommette ogni volta il massimo a sua disposizione, ma non più del necessario per arrivare a 8 euro (strategia aggressiva);

b) scommette 1 euro ad ogni giocata (strategia timida); Quale delle due strategie dà a Jack le migliori chance di procurarsi quella chiamata?

Suggerimento: b) supponiamo che sia data una catena di Markov con probabilità di transazione P_{ij}. Supponiamo che A_j sia un evento tale che la catena di Markov visiti almeno una volta lo stato j e che f_{ij} sia la probabilità che lo stato j sia visitato almeno una volta iniziando dallo stato i, cioè

$f_{ij} = P(A_j \,|\, X_0 = i)$. Utilizzando le definizioni di probabilità condizionata e di catena di Markov troviamo

$$f_{ij} = P(A_j \,|\, X_0 = i) = \sum_k P(A_j \,|\, X_0 = i, X_1 = k) P(X_1 = k \,|\, X_0 = i)$$
$$= \sum_k P(A_j \,|\, X_1 = k) P(X_1 = k \,|\, X_0 = i) = \sum_k f_{kj} P_{ik}.$$

Nel nostro caso gli stati sono dati dalla quantità di euro che ha Jack, cioè $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. É chiaro che $f_{08} = 0$ (Jack ha perso tutto), $f_{88} = 1$ (Jack ha già la quantità necessaria per uscire). Utilizzando la formula sopra calcolate tutte le altre probabilità f_{i8}.

5. a) Avente una matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}, \qquad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$$

mostrate che

$$Q^n = \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \frac{(1-\alpha-\beta)^n}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix}.$$

b) Un gruppo di biologi sta studiando una particolare specie di virus. Esistono N ceppi diversi del virus in questione. Dopo ogni replicazione c'è una probabilità α che il virus cambi ceppo, scegliendo con eguale probabilità uno qualsiasi degli $N-1$ ceppi rimanenti. Qual è la probabilità che il ceppo originario (generazione 0) coincida con il ceppo a cui appartiene l'n-sima generazione?