Esercizi Analisi Matematica II

Anno accademico 2017-2018

Foglio 7

1. **P** Per ognuna delle seguenti funzioni f, si determinino i loro punti stazionari e si stabilisca, se possibile, se questi sono minimi locali, massimi locali o punti di sella.

   (a) $f(x,y) = x^3 - 3x - y^2$

   (b) $f(x,y) = e^{x^2y - y^2 - y}$

   (c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 2yz + x^2y$

   Suggerimento: per tutti i punti critici, $\lambda = 2$ è un autovalore della matrice Hessiana

2. **T** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che se f è *coerciva*, cioè

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

   allora f ammette minimo su $\mathbb{R}$.

3. **TF** Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una funzione. Diremo che f è *coerciva* se

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$$

   cioè per ogni $K > 0$ esiste $R > 0$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ con $\|x\| \geq R$ si ha $f(x) \geq K$. Dimostrare che se f è continua e coerciva, allora f ammette minimo su $\mathbb{R}^N$.

   Suggerimento: scegliere $K = f(0) + 1$ e dimostrare che, per il corrispondente valore R, si ha

$$\inf_{\mathbb{R}^N} f = \inf_{\overline{B_R(0)}} f = \min_{\overline{B_R(0)}} f.$$

   Concludere dimostrando che un punto di minimo per f su $\overline{B_R(0)}$ lo è anche per f su $\mathbb{R}^N$.

4. **PF** Per ognuna delle seguenti funzioni $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, determinare, se esiste,

$$\min_{\mathbb{R}^N} f.$$

   (a) $f(x,y) = x^4 + 3x^2 + 2y^2 + xy - 4$

   (b) $f(x,y) = 2x^2 + |x^2 - 2x - 1| + y^2$

   (c) $f(x,y,z) = \log(1 + x^2 - x + y^2 + z^2)$

5. **P** Determinare la retta tangente alla curva $(1+x)y\cos(y) + x^2 + e^x = 1$ nel punto $(0,0)$ passante per il punto $(0,0)$.

6. **P** Determinare la retta tangente alla curva $x\arctan(x)y - (\pi/4)e^{y-1} = 0$ nel punto $(1,1)$ passante per il punto $(1,1)$.

7. **P** Determinare il piano tangente alla superficie $x^2+y^2-z^2 = 9$ nel punto $(0,5,4)$ passante per il punto $(0,5,4)$.

8. **P** Determinare il piano tangente alla superficie $y^3 - xe^{zy} + z^2y^2 + e^x + z = 5$ nel punto $(0,0,4)$ passante per il punto $(0,0,4)$.

9. **P** Determinare il piano tangente all'insieme di livello 2 della seguente funzione $F(x,y,z) = x^3 - xy^2 + e^{zx} + \cos(y-1)$ nel punto $(0,1,3)$ passante per il punto $(0,1,3)$ e nel punto $(1,1,0)$ passante per il punto $(1,1,0)$.

10. **P$*$** Sia $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in ogni punto di A, A aperto. Sia $F : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e sia $C = \{x \in A :\ F(x) = 0\}$. Supponiamo che $F(x,y,z) = x^2 - y^2 - z$ e che il punto $P_0 = (2,1,3)$ appartenga ad A e quindi anche a C. Sapendo che $f(P_0) = \min_C f$ e che $\frac{\partial f}{\partial z}(P_0) = 2$, calcolare $\nabla f(P_0)$.

11. **PF$*$** Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una funzione di classe C^1 per cui valga $F(0) = 0$ e
$$JF(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Supponiamo che un punto materiale percorra la curva di livello $\{F = 0\}$ con velocità scalare costante pari a $2m/s$ e che al tempo $t = 0$ si trovi nell'origine $0 \in \mathbb{R}^3$. Sappiamo inoltre che esiste un $\delta > 0$ per cui per ogni t, $0 < t < \delta$, la coordinata x della posizione in cui si trova il punto materiale al tempo t è positiva. Sia $f(x,y,z) = x + 2y - z$. Sia $s(t)$ il valore della funzione f nella posizione in cui si trova il punto materiale al tempo t. Calcolare $s'(0)$.

12. **T** Dimostrare il Teorema di inversione locale per $N = 1$.

13. **TF$*$** Dimostrare il Teorema delle funzioni implicite nella sua versione generale come corollario del Teorema di inversione locale.

    Suggerimento: applicare il Teorema di inversione locale alla funzione $\tilde{F} : \mathbb{R}^{(N-M)+M} \to \mathbb{R}^{(N-M)+M}$ così definita
$$\tilde{F}(x,y) = (x, F(x,y)) \quad \text{per ogni } (x,y) \in \mathbb{R}^{N-M} \times \mathbb{R}^M.$$

14. **P** Per ognuna delle seguenti funzioni $f : C \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, determinare, se esiste,
$$\min_C f$$
dove

    (a) $f(x,y) = e^{xy} + xy$ e $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + 2y^2 \leq 1\}$

    (b) $f(x,y) = y^2 - \sqrt{6}x^2$ e $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [-1,1],\ x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^4\}$ oppure $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [-1,0],\ x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^4\}$

    (c) $f(x,y,z) = 2y^3 - 3y^2 + x^2 - z^2$ e $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$

15. **P** Risolvere i seguenti problemi di minimo vincolato. Determinare, se esiste,

$$\min_C f$$

dove

(a) $f(x,y) = |y| - |x|$ e $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 - 2y = 0\}$

(b) $f(x,y) = -x^2 - x - y^2$ e $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y + 2yx = 1, \ x \in [-2,-1] \cup [0,1]\}$

(c) $f(x,y,z) = x - 2y - 2z^2$ e $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + 2y^2 + z^2 = 1\}$

(d) $f(x,y,z) = x + y^2 - z^2$ e $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } y - 2z = 0\}$

16. **P** Determinare, se esiste,

$$\min_C f$$

dove

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 4(x^2 + y^2) \le z^2, \ 0 \le z \le 1\}$$

e $f(x,y,z) = x(z - 1/2)^2$.

17. **P** Determinare, se esiste,

$$\min_C f$$

dove

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1, \ z = y^2\}$$

e $f(x,y,z) = -(x^2 + z)$.

18. **P** Determinare, se esiste,

$$\min_C f$$

dove

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^4 + z^4 \le 1\}$$

e $f(x,y,z) = -x^2 + y - z$.

19. **P** Determinare, se esiste,

$$\min_C f$$

dove

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2\}$$

e $f(x,y,z) = (x^4 + y^4)(z - 1)$.

20. **P** Determinare, se esiste,

$$\min_C f$$

dove

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9\}$$

e $f(x,y,z) = x^3 - y^2 + z^2$.

21. **P** Determinare, se esiste,
$$\min_C f$$
dove
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$$
e $f(x,y) = -x\sqrt{1-xy}$.

22. **P** Determinare, se esiste,
$$\min_C f$$
dove
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 = z^2(1-z^2),\ z = x + y\}$$
e $f(x,y,z) = -(2xy + z^2 - z^4)$.

23. **P** Determinare, se esiste,
$$\min_C f$$
dove
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ z \ge y\}$$
e $f(x,y,z) = (z-y)^2 x$.

24. **P** Determinare, se esiste,
$$\min_C f$$
dove
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ y = z^3\}$$
e $f(x,y,z) = y^2 z$.

Legenda:
T esercizio teorico; **P** esercizio pratico; **F** esercizio facoltativo; $*$ esercizio difficile